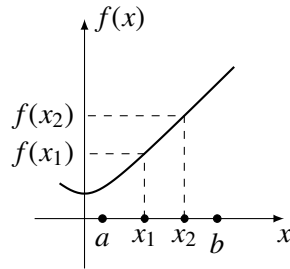


6.3 Croissance et extrémums

6.3.1 Croissance et décroissance

Définition 6.5. La fonction f est **croissante** sur $[a, b]$ si pour tout x_1 et x_2 dans l'intervalle $[a, b]$,

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

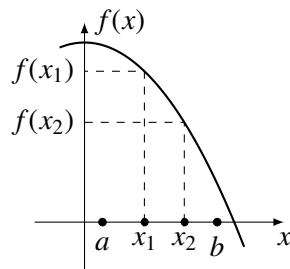


$f(x)$ est strictement croissante sur $[a, b]$ si pour tout x_1 et x_2 dans $[a, b]$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

La fonction f est **décroissante** sur un intervalle fermé $[a, b]$ si pour tout x_1 et x_2 dans l'intervalle $[a, b]$,

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$



$f(x)$ est strictement décroissante sur $[a, b]$ si pour tout x_1 et x_2 dans $[a, b]$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

Exemple 6.14. Pour illustrer l'utilisation de cette définition pour vérifier qu'une fonction est croissante sur un intervalle, montrons que $f(x) = x^2$ est croissante sur $[0, \infty[$.

Prenons deux nombres réels $x_1 < x_2$. On doit montrer que $f(x_1) \leq f(x_2)$, c'est à dire que $x_1^2 \leq x_2^2$.

$$x_1^2 \leq x_2^2 \iff x_2^2 - x_1^2 \geq 0 \iff (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \geq 0$$

Or, $x_1 < x_2$ implique que $x_2 - x_1 > 0$. De plus, comme $x_1, x_2 \geq 0$, (car ils sont dans l'intervalle $[0, \infty[$), on a aussi que $x_2 + x_1 \geq 0$.

On a donc montré que si $0 \leq x_1 < x_2$, alors

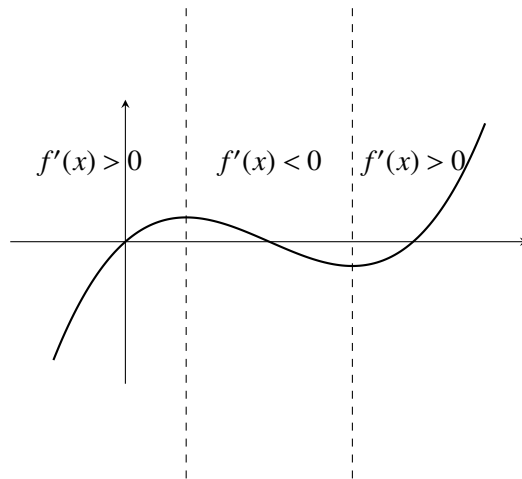
$$x_1^2 \leq x_2^2;$$

la fonction $f(x) = x^2$ est donc croissante sur $[0, \infty[$.

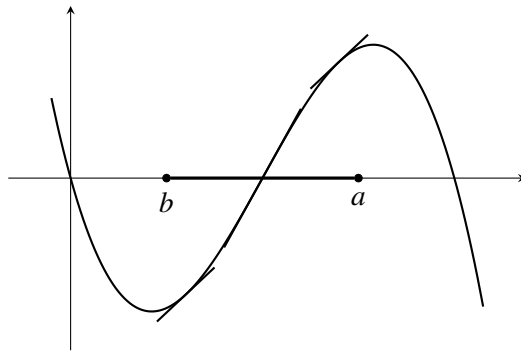
6.3.2 Croissance et dérivée première

L'intuition géométrique nous dit que la pente de la tangente à une fonction est liée à sa croissance. La pente est positive, la fonction doit être croissante, si la pente est négative, elle doit être décroissante.

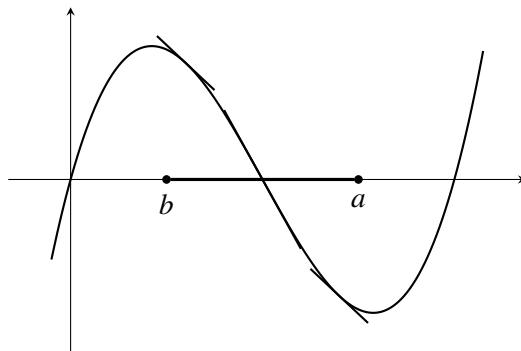
Comme la pente de la tangente est en fait $f'(x)$, la croissance est déterminée par le signe de $f'(x)$.



Théorème 6.1. Si $f'(x) \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $f(x)$ est croissante sur $[a, b]$.



Si $f'(x) \leq 0$ sur $[a, b]$, alors $f(x)$ est décroissante sur $[a, b]$.



Exemple 6.15. Déterminons pour quelles valeurs de x la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ est croissante.

Pour déterminer les valeurs de x où f est croissante, par le théorème de croissance-dérivée, il suffit de déterminer le signe de la dérivée.

La dérivée de la fonction est

$$f'(x) = 10x - 5.$$

Comme $10x - 5$ a un seul zéro $x = 1/2$ et est continue, $f'(x)$ ne change de signe qu'une seule fois en $x = 1/2$. De plus $f'(x) = 10x - 5$ est une droite de pente 10, donc croissante. Les valeurs de $10x - 5$ sont donc positives pour $x > 1/2$ et négatives pour $x < 1/2$. (Faire une esquisse de la droite pour mieux comprendre pourquoi!).

On peut résumer ces observations dans le tableau de signe suivant :

x	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	- 0 +

En utilisant le théorème 6.1, on peut compléter ce tableau avec une ligne indiquant la croissance et la décroissance de f .

x	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	\searrow MIN \nearrow

La fonction est donc décroissante sur $] -\infty, 1/2]$ et croissante sur $[1/2, \infty [$.

Enfin, notons que nous avons indiqué « MIN » car si la fonction décroissante et ensuite croissant, elle atteint nécessairement un minimum en $x = 1/2$.

6.3.3 Extrémums

Les **extrémums** d'une fonction sont étroitement liés à la croissance et à la décroissance de la fonction. Le terme « extrémum » désigne à la fois les maximums et les minimums, les deux types de « valeurs extrêmes » d'une fonction.

Extrémums globaux

Un **extrémum global** est la valeur la plus grande ou la plus petite atteinte par une fonction sur l'ensemble de son domaine.

Définition 6.6. Une fonction réelle f a un **maximum global** en $x = a$ si

$$f(a) \geq f(x)$$

pour tout x dans le domaine de f .

Une fonction réelle f a un **minimum global** en $x = a$ si

$$f(a) \leq f(x)$$

pour tout x dans le domaine de f .

Note : on appelle aussi **extrémum absolu** un extrémum global

6.3.4 Extrémums locaux

Un **extrémum local** est la valeur la plus grande ou la plus petite atteinte par une fonction dans une région de son graphe, autour d'une valeur de x donnée.

Définition 6.7. Une fonction réelle f a un **maximum local** en $x = a$ si

$$f(a) \geq f(x)$$

pour tout x assez près de a (c'est à dire dans un intervalle ouvert $]c, d[$ contenant a).

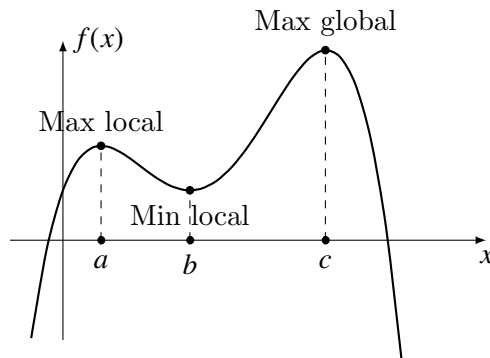
Une fonction réelle f a un **minimum local** en $x = a$ si

$$f(a) \leq f(x)$$

pour tout x assez près de a (c'est à dire dans un intervalle ouvert $]c, d[$ contenant a).

Note : on appelle aussi **extrémum relatif** un extrémum global

Exemple 6.16. La fonction suivante a un maximum global (qui est aussi un maximum local) en $x = c$ et un max local (qui n'est pas global) en $x = a$. Elle a aussi un minimum local en $x = b$, mais aucun minimum global.



6.3.5 Dérivées et extrémums

Si déterminer où une fonction a un maximum ou un minimum local sur son graphe est simple, le déterminer à partir de la définition de la fonction est généralement beaucoup plus complexe. Cependant, la dérivée est d'une aide précieuse : là où une fonction a un extrémum, la tangente est horizontale ou il n'y a pas de tangente du tout. Cela nous donne un critère pour déterminer où sont les extrémums locaux d'une fonction.

Définition 6.8. Une **valeur critique** c de la fonction f est un nombre c dans le domaine de f tel que

$$f'(c) = 0 \text{ ou } f'(c) \nexists.$$

Exemple 6.17. Déterminons les valeurs critiques de la fonction

$$f(x) = \frac{(x-1)}{x^2-1}.$$

On détermine les valeurs critiques de f .

$$f'(x) = \frac{(x^2-1) - (x-1)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2+2x-1}{(x^2-1)^2} = \frac{-(x-1)^2}{(x^2-1)^2}$$

On trouve les zéro de f' :

$$f'(x) = 0 \iff \frac{-(x-1)^2}{(x^2-1)^2} = 0 \iff -(x-1)^2 = 0 \iff x = 1.$$

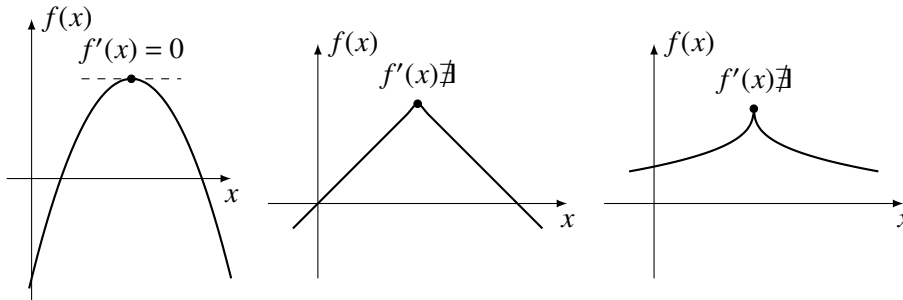
Mais si $x = 1$, le dénominateur s'annule : $(x^2 - 1) = 0$. La fonction f' n'a donc pas de zéros.

On trouve les valeurs de x où f' n'est pas définie.

$$f'(x) \nexists \iff \frac{-(x-1)^2}{(x^2-1)^2} \nexists \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1.$$

Les valeurs critiques de f sont $x = \pm 1$.

Théorème 6.2 (Fermat généralisé). Si $f(x)$ a un minimum ou un maximum local en $x = c$, alors c est une valeur critique de f .



Le théorème de Fermat généralisé nous permet de limiter la recherche des extrémum d'une fonction f aux valeurs où $f'(x)$ s'annule ou n'existe pas. La proposition suivante permet de déterminer le type d'extrémum en étudiant le signe de $f'(x)$.

Proposition 6.1. Si $f'(c) = 0$, alors

- f a un maximum en $x = c$ si f' change de signe de positif à négatif en $x = c$
- f a un minimum en $x = c$ si f' change de signe de négatif à positif en $x = c$
- f a un point stationnaire si f' a le même signe à droite et à gauche de c .

Exemple 6.18. Déterminons les maximums et les minimums globaux de la fonction

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x + 1.$$

On commence par trouver les valeurs critiques de f .

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -1.$$

$f'(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, il n'y a donc pas de point critique où $f'(x) \nexists$.

On fait un tableau de signe pour $f'(x)$ pour déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de $f(x)$. Notons que $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, ce qui

facilite la détermination du signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$	-1	3	∞
$(x+1)$	-	0	+	+
$(x-3)$	-	-	-	0
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow MAX	\searrow MIN	\nearrow ∞

Points stationnaires

La dérivée peut s'annuler à un point qui n'est ni un maximum, ni un minimum. On appelle un tel point un **point stationnaire**.

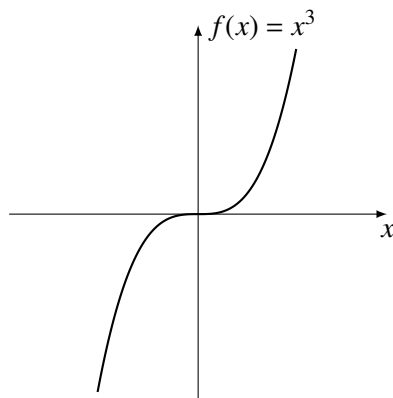
Exemple 6.19. Déterminons maximums et minimums de $f(x) = x^3$.

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Il n'y a aucun point où $f'(x) \neq 0$.

x	$-\infty$	0	∞
$f'(x) = 3x^2$	∞	+	0
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow STA	\nearrow ∞

$f(x)$ a un point stationnaire en $x = 0$.



Exemple 6.20. On analyse la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-1}.$$

Le domaine de la fonction est $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$.

On a que

$$f'(x) = \frac{(2x-1) - 2(x-1)}{(2x-1)^2} = \frac{1}{(2x-1)^2}.$$

Ainsi il est impossible que $f'(x) = 0$ puisque le numérateur est 1. Mais il y a une division par 0 quand $x = 1/2$. Donc la dérivée n'existe pas si $x = 1/2$; cette valeur est une valeur critique.

On a aussi que $\frac{1}{(2x-1)^2} \geq 0$.

Il y a une asymptote verticale en $x = 1/2$.

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{x-2}{2x-1} = \frac{-3/2}{0^+} = -\infty$$

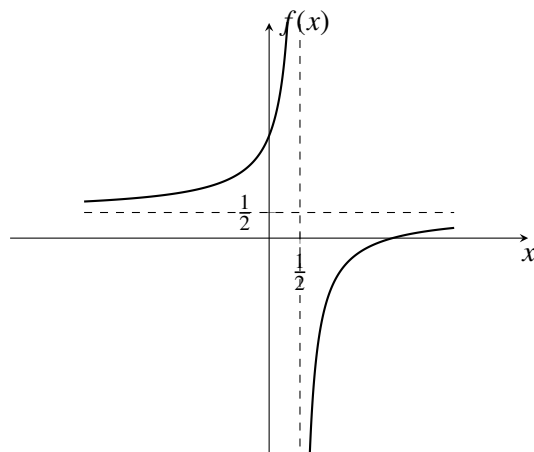
$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{x-2}{2x-1} = \frac{-3/2}{0^-} = +\infty$$

Il y a une asymptote horizontale en $y = 1/2$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1-2/x)}{x(2-1/x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-2/x)}{(2-1/x)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1-2/x)}{x(2-1/x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-2/x)}{(2-1/x)} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$1/2$	∞
$f'(x)$	$+$	$\#$	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\# : AV$	$\frac{1}{2}$



Tangentes verticales et points de rebroussements

Définition 6.9. Un point où $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \pm\infty$ est un point où la tangente au graphe de la fonction est verticale.

Un point où $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \mp\infty$ (les limites infinies sont de signe contraires) est appelé un **point de rebroussement**.

Un point où la tangente est verticale est donc un point où la pente de la tangente devient infinie. La tangente est donc de « pente infinie, » ce qui veut dire que la tangente en ce point est verticale.

Exemple 6.21. Analysons la croissance et la décroissance de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

La dérivée de f est $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \text{ n'a pas de solution.}$$

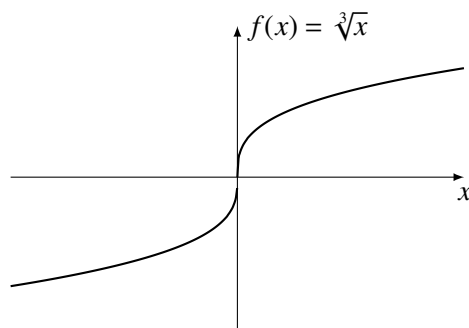
Il y a une seule valeur de x où $f'(x) \neq 0$: en $x = 0$.

La seule valeur critique est donc $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0^+)^2}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0^-)^2}} = \infty$$

x	$-\infty$	0	∞
$f'(x)$	$+$	∞	$+$
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow T.V.	\nearrow ∞



6.4 Concavité et points d'inflexion

6.4.1 Concavité

Définition 6.10. Une fonction f est **convexe** (ou « **concave vers le haut** ») sur $[a, b]$ si pour tout $x_1, x_2 \in [a, b]$ les points du graphe de f sont au dessus de la corde reliant $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$. Plus précisément, si pour tout x entre x_1 et x_2 , on a que

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

