Chapitre 8

Exponentielles et logarithmes

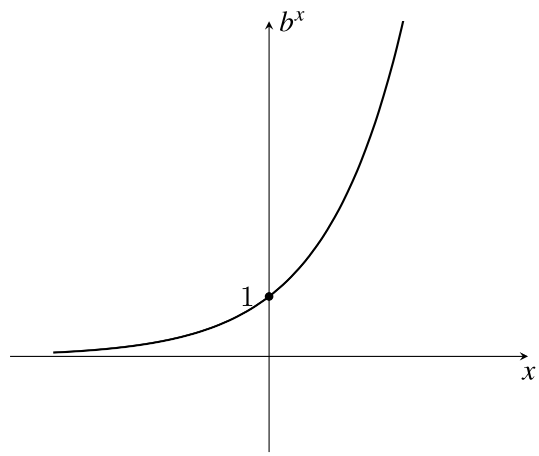
8.1 Fonctions exponentielles et logarithmiques

8.1.1 Fonctions exponentielles à base quelconque

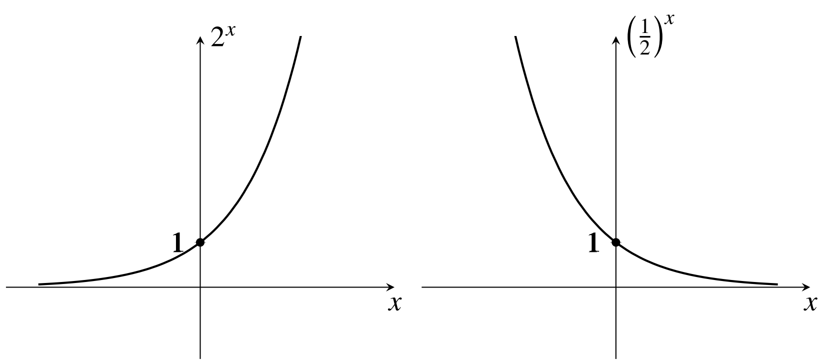
Définition 8.1. La **fonction exponentielle à base** b est définie par

$$f(x) = b^x,$$

où $b > 0$, $b \neq 1$.



C'est une fonction croissante si $b > 1$ et décroissante si $b < 1$.



Proposition 8.1. Une fonction exponentielle de la forme b^x est toujours strictement positive :

$$b^x > 0 \text{ pour tout } x.$$

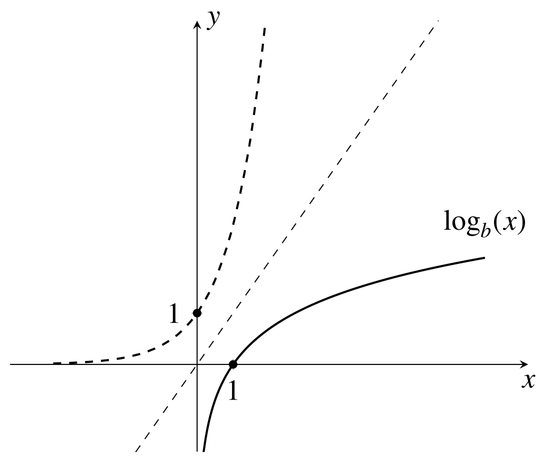
8.1.2 Fonctions logarithmes à base quelconque

Définition 8.2. La fonction logarithme à base b est la fonction inverse de l'exponentielle à base b ; elle est définie par

$$\log_b(x) = y \iff b^y = x.$$

La fonction logarithme est définie uniquement pour $x > 0$.

Le graphe de la fonction logarithmique à base b est la réflexion par la droite $y = x$ du graphe de la fonction b^x. On note que le point $(0,1)$ du graphe de la fonction exponentielle devient un zéro du graphe de la fonction logarithme : le point $(1,0)$. De plus, l'asymptote horizontale de e^x devient une une asymptote verticale de $\ln(x)$.



Signe d'une expression comportant des logarithmes

L'observation suivante est utile pour faire l'analyse de fonctions comportant des logarithmes car elle permet de déterminer facilement le signe d'une fonction comportant des logarithmes si on la combine aux autres techniques de détermination de signe comme la factorisation.

Proposition 8.2. $\log_b(x)$ est positif si $x > 1$ et négatif si $0 < x < 1$.

8.1.3 Limites des fonctions exponentielles et logarithmiques

Proposition 8.3. Les fonctions exponentielles et logarithmiques sont continues partout où elles sont définies.

Proposition 8.4. Si $1 < b$, alors

$$\lim_{x\to\infty} b^{\infty} = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} b^x = b^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \log_b(x) = \log_b(\infty) = \infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_b(x) = \log_b(0^+) = -\infty$$

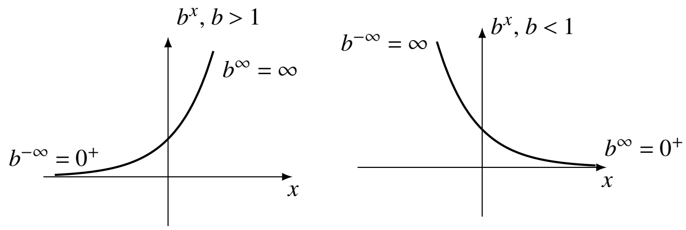
$$\lim_{x\to 0^-} \log_b(x) = \log_b(0^-)\nexists \qquad \lim_{x\to 0} \log_b(x)\nexists$$

Si $0 < b < 1$, alors

$$\lim_{x\to\infty} b^{\infty} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} b^{x} = b^{-\infty} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \log_b(x) = \log_b(\infty) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_b(x) = \log_b(0^+) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \log_b(x) = \log_b(0^-)\nexists \qquad \lim_{x\to 0} \log_b(x)\nexists$$



$$b^{\infty} = \begin{cases} \infty \text{ si } b > 1 \\ \text{Indéterminé si } b = 1 \\ 0 \text{ si } 0 < b < 1 \end{cases}$$

Exemple 8.1.

$$\lim_{x\to 3} 2^x \overset{\text{cont}}{=} 2^3 = 8.$$

Exemple 8.2.

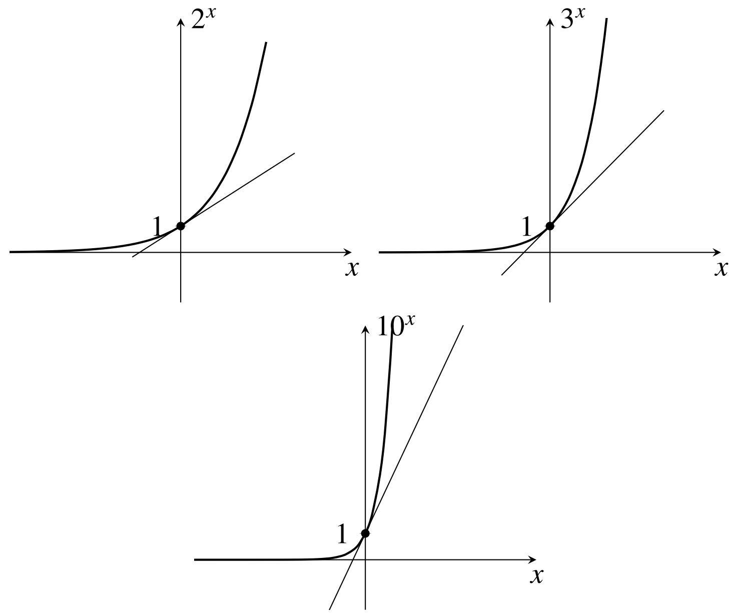
$$\lim_{x\to 8} \log_2(x) \overset{\text{cont}}{=} \log_2(8) = 2.$$

Exemple 8.3.

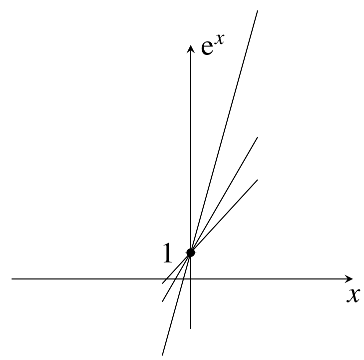
$$\lim_{x\to-\infty} 2^{x+1} = 2^{-\infty+1} = 2^{-\infty} = 0$$

8.2 La constante d'Euler

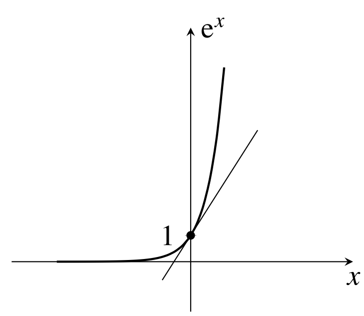
Si on change la base d'une fonction exponentielle, la pente de la tangente en $x = 0$ varie.



Pour comparer les trois tangentes, voici un graphique où elles sont superposées.



On suppose qu'il y a une base particulière qui fait en sorte que cette tangente est de pente 1 : on dénote cette base par e.



Définition 8.3. La **constante d'Euler** e est la base la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ telle que la pente au point $(0, 1)$ du graphe de f est 1.

Autrement dit, la constante d'Euler est le nombre e tel que $(e^x)'\big|_{x=0} = 1$.

Note 8.1. Plusieurs ouvrages utilisent la notation « $\exp(x)$ » pour dénoter e^x. Les deux notations sont équivalentes :

$$\exp(x) = e^x.$$

8.2.1 Autres définitions équivalentes

Les résultats qui suivent pourraient être pris comme définition de e^x. Nous ne démontrerons pas dans ces notes l'équivalence entre ces différentes définitions de e^x mais nous croyons qu'elles illustrent bien la richesse de cette fonction.

À l'aide d'une limite :

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Cette définition a pour conséquence que la constante d'Euler e peut être calculée à l'aide de la limite suivante :

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

On peut constater à quelle « vitesse » cette suite converge dans le tableau suivant.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$\approx$
1	2	2.00000000000000
2	$\frac{9}{4}$	2.25000000000000
3	$\frac{64}{27}$	2.37037037037037
4	$\frac{625}{256}$	2.44140625000000
5	$\frac{7776}{3125}$	2.48832000000000
6	$\frac{117649}{46656}$	2.52162637174211
7	$\frac{2097152}{823543}$	2.54649969704071
8	$\frac{43046721}{16777216}$	2.56578451395035
9	$\frac{1000000000}{387420489}$	2.58117479171320
10	$\frac{25937424601}{10000000000}$	2.59374246010000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	$\vdots$	2.70481382942153
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1000	$\vdots$	2.71692393223589
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
∞	e	e

On peut aussi définir e^x à l'aide d'une *série de Taylor* (notion vue en calcul intégral) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

En posant $x = 1$ dans cette définition, on obtient :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

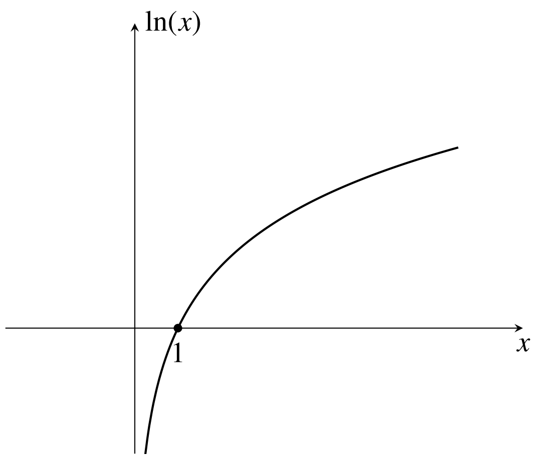
Le tableau de convergence suivant montre que cette série donne beaucoup plus rapidement des approximation précises.

n	$1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots$	$\approx$
0	1	1.00000000000000
1	2	2.00000000000000
2	$\frac{5}{2}$	2.50000000000000
3	$\frac{8}{3}$	2.66666666666667
4	$\frac{65}{24}$	2.70833333333333
5	$\frac{163}{60}$	2.71666666666667
6	$\frac{1957}{720}$	2.71805555555556
7	$\frac{685}{252}$	2.71825396825397
8	$\frac{109601}{40320}$	2.71827876984127
9	$\frac{98641}{36288}$	2.71828152557319
10	$\frac{9864101}{3628800}$	2.71828180114638
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	$\vdots$	2.71828182845905
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1000	$\vdots$	2.71828182845905
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
∞	e	e

8.3 Logarithme naturel

Définition 8.4. Le **logarithme naturel** est la fonction inverse de l'exponentielle à base e. La fonction ln est définie comme la fonction réciproque à la fonction exponentielle à base e, comme le logarithme à base b est la réciproque de la fonction exponentielle à base b.

$$\ln(y) = x \iff \mathrm{e}^x = y$$

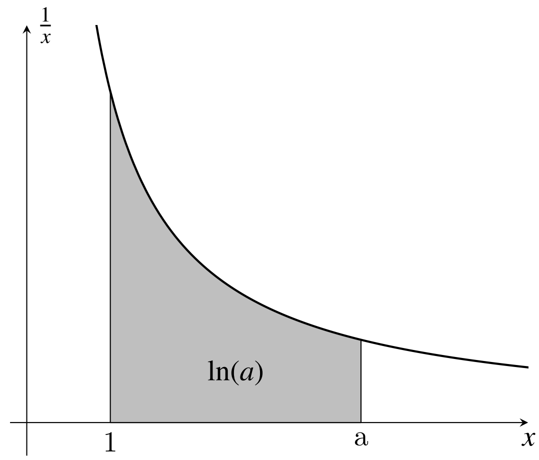


Proposition 8.5. Le logarithme naturel est une fonction logarithme qui a toutes les propriétés des logarithmes, notamment les propriétés suivantes :

$$\ln(\mathrm{e}) = 1 \qquad \ln(\mathrm{e}^x) = x \qquad \mathrm{e}^{\ln(x)} = x.$$

8.3.1 Définition alternative de logarithme naturel

La première définition historique de $\ln(a)$, est l'aire entre le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et l'axe des x comprise entre $x = 1$ et $x = a$.



La fonction $\ln(x)$ a été initialement définie de cette manière par John Napier au 17ᵉ siècle car elle a la propriété suivante pas construction géométrique.

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B).$$

La fonction $\ln(x)$ transforme les produits en somme : cette propriété est très utile pour simplifier le calcul de produits : au lieu de calculer le produit de AB,on calcule la somme de $\ln(A)$ et $\ln(B)$, ce qui est beaucoup plus facile, surtout si on a sous la main une table de logarithme comme celle calculée par Napier.

Exemple 8.4. Supposons que l'on veut calculer le produit de 81237.21 par 74923.38 avec l'algorithme usuel de multiplication. En consultant une table de logarithmes Neperiens, on trouve

$$\ln(81237.21) \approx 11.30513 \qquad \ln(74923.38) \approx 11.22422.$$

En additionnant :

$$\ln(81237.21) + \ln(74923.38) \approx 11.30513 + 11.22422 = 22.52935.$$

On retourne dans la table de logarithme pour déterminer quel nombre a 22.52935 comme logarithme. On trouve

$$6086566703.45156.$$

Multiplier les nombres donne

$$6086566354.96980$$

L'erreur relative est infime : moins de 0.0000006 % !

Pour bien comprendre à quel point cette technique facilite les calculs, tenter de multiplier les nombres sans calculatrice, ensuite tenter le même calcul en additionnant les logarithmes.

Comment Napier a-t-il pu calculer sa première table de logarithmes ? Il a utilisé une formule déduite de sa construction géométrique lui permettant de calculer près de 10 millions de valeurs de logarithmes, un travail colossal étalé sur 20 ans.

Aujourd'hui, on peut calculer ces valeurs en utilisant l'identité

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

elle même déduite de identité suivante :

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

Remarquez que si on dérive le membre droite de l'identité pour $\ln(x+1)$, on obtient le membre de droite de cette dernière égalité !

Note 8.2. Avant la création les logarithmes, on utilisait déjà l'idée de transformer les produits en sommes pour simplifier les calculs de produit, mais en utilisant plutôt des identités trigonométriques telles que

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{2}$$

qui permet de transformer le produit (à gauche) en deux sommes, une différence et une division par 2 (à droite). Ces calculs pouvaient se faire à l'aide de tables des valeurs de sinus et cosinus !

8.4 Dérivé des fonctions exponentielles

Proposition 8.6. La dérivée de la fonction exponentielle à base e est donnée par

$$\left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x.$$

Démonstration. (Preuve à l'aide des différentielles) Par définition de la constante e, on suppose que la pente de la tangente à la courbe $y = \mathrm{e}^x$ en $x = 0$ est 1. Par la définition de dérivée, cette pente est

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{\mathrm{e}^{0+dx} - \mathrm{e}^0}{dx} = 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\mathrm{e}^{x+dx} - \mathrm{e}^x}{dx} \\
&= \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{dx} - \mathrm{e}^x}{dx} \\
&= \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^{dx} - 1}{dx} \\
&= \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^{dx} - \mathrm{e}^0}{dx}. \\
&= \mathrm{e}^x \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} \\
&= \mathrm{e}^x(1) \\
&= \mathrm{e}^x.
\end{aligned}$$

□

Démonstration. (preuve avec la définition de dérivée à l'aide de limites) Soit $f(x) = e^x$. On a alors que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x e^\Delta x - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \left(e^\Delta x - 1\right)}{\Delta x} \\
&= e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^\Delta x - 1}{\Delta x} \\
&= e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x} \\
&= e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x} \\
&= e^x f'(0)
\end{aligned}$$

□

Proposition 8.7.

$$\left(b^x\right)' = b^x \ln(b)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
(b^x)' &= \left(e^{\ln(b^x)}\right)' \\
&= \left(e^{x\ln(b)}\right)' \\
&= e^{\ln(b^x)}(\ln(b)) \\
&= b^x \ln(b)
\end{aligned}$$

□

Exemple 8.5.

$$\left(e^{2x}\right)' = e^{2x}(2x)' = 2e^{2x}.$$

Exemple 8.6.

$$\left(x^2 e^x\right)' = (x^2)' e^x + x^2 e^x = 2x e^x + x^2 e^x = x(2+x)e^x$$

Exemple 8.7.

$$\left(2^{2x}\right)' = 2^{2x} \ln(2)(2x)' = 2\ln(2)2^{2x}.$$

Exemple 8.8.

$$\left(\frac{x^4}{3^{2x}}\right)' = \frac{4x^3 3^{2x} - x^4 3^{2x}\ln(3)(2)}{(3^{2x})^2}$$
$$= \frac{2x^3 3^{2x}(2-\ln(3)x)}{(3^{2x})^2}.$$
$$= \frac{2x^3(2-\ln(3)x)}{3^{2x}}.$$

8.5 Dérivée des fonctions logarithmiques

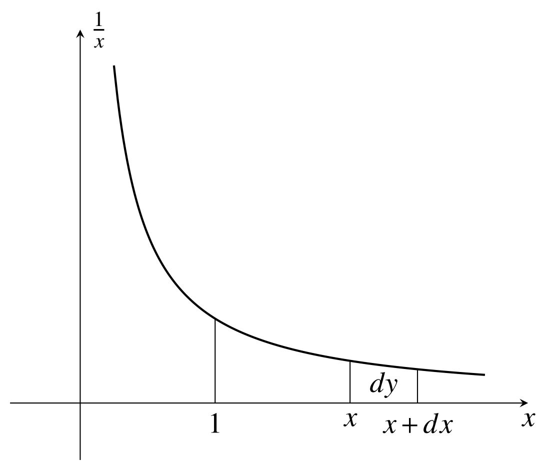
Proposition 8.8. La dérivée du logarithme naturel est donnée par

$$\big(\ln(x)\big)' = \frac{1}{x}.$$

Démonstration. (Preuve à l'aide de différentielles). Si $y = \ln(x)$ est l'aire sous la courbe $y = \frac{1}{x}$, alors

$$dy = \ln(x+dx) - \ln(x)$$

est l'aire représentée dans le graphe suivant :



Quand dx est très petit, l'aire de la région dy entre les valeurs x et $x+dx$ est approximativement celle du rectangle de base dx et de hauteur $1/x$.

$$dy \approx \frac{1}{x}dx.$$

On a donc que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$ □

Démonstration. Si on connait la dérivée de e^x, alors on trouve la dérivée de $\ln(x)$ par dérivation implicite.

$$e^{\ln(x)} = x$$
$$\left(e^{\ln(x)}\right)' = \big(x\big)'$$
$$e^{\ln(x)}\big(\ln(x)\big)' = 1$$

$$x\Big(\ln(x)\Big)' = 1$$

$$\Big(\ln(x)\Big)' = \frac{1}{x} \qquad \square$$

Cette dernière preuve peut être généralisée à n'importe quelle paire de fonctions inverses. Comme plusieurs des formules de dérivation sont des variantes de cet exemple, nous faisons de cette généralisation une proposition.

Proposition 8.9. Si g est la fonction inverse de f, c'est-à-dire si

$$g(f(x)) = x \text{ et } f(g(y)) = y,$$

alors

$$(g(y))' = \frac{1}{f'(g(y))} \text{ et } (f(x))' = \frac{1}{g'(f(x))}.$$

En utilisant la notation différentielle avec $y = f(x)$ et $x = g(y)$, on a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.$$

Démonstration. Supposons que g est la fonction inverse de f, c'est à dire que $g(f(x)) = x$ et que $f(g(y)) = y$. En dérivant à l'aide de la règle de chaine, on trouve que

$$\begin{aligned} g(f(x))) &= x \\ (g(f(x)))' &= (x)' \\ g'(f(x))f'(x) &= 1 \\ g'(y) &= \frac{1}{f'(x)} \\ g'(y) &= \frac{1}{f'(g(y))} \end{aligned}$$

On fait de même pour démontrer que

$$(f(x))' = \frac{1}{g'(f(x))}.$$

Comme $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$ et que $g'(y) = \frac{dx}{dy}$ et que

$$f'(g(y)) = f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

on a que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}. \qquad \square$$

Exemple 8.9. Considérons la fonction définie par $f(x) = x^3$ et son inverse $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Comme la dérivée de f est

$$f'(x) = 3\Big(\sqrt[3]{x}\Big)^2,$$

on a, par la proposition précédente, que

$$g'(x) = \frac{1}{3x^2}.$$

On peut vérifier ce résultat en dérivant directement $g(x)$:

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Démonstration. (preuve de la proposition 8.8 avec la définition de dérivée à l'aide de limites) Cette preuve directe utilise la définition de e comme la limite suivante :

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

On utilise aussi la continuité de la fonction $\ln(x)$, qui implique l'égalité suivante :

$$\lim_{x\to a}\ln(f(x)) = \ln(\lim_{x\to a} f(x)).$$

$$\begin{aligned}
\left(\ln(x)\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\left(1+\frac{1}{x/\Delta x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)\\
&= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(\left(1+\frac{1}{x/\Delta x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)\\
&= \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)\\
&= \frac{1}{x}\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)\\
&= \frac{1}{x}\ln(\mathrm{e})\\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

□

Proposition 8.10 (Dérivée de la fonction logarithme)**.**

$$\left(\log_b(x)\right)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln(b)}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}(\log_b(x))' &= \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)}\right)' \\ &= \frac{1}{\ln(b)}(\ln(x))' \\ &= \frac{1}{\ln(b)}\frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x\ln(b)}\end{aligned}$$

□

Exemple 8.10.

$$\left(\ln(-x^2+x+1)\right)' = \frac{1}{-x^2+x+1}(-x^2+2+1)' = \frac{-2x+1}{-x^2+x+1}$$

Exemple 8.11.

$$\left(x^3\ln(2x)\right)' = 3x^2\ln(2x) + x^3\frac{2}{2x} = x^2(3\ln(2x)+1)$$

8.5.1 Dérivé d'une puissance quelconque de x

La forme la plus générale pour la dérivée d'une puissance de x est valable pour un exposant réel quelconque. Nous avons précédemment obtenue une formule de dérivation valable uniquement pour les puissances rationnelles de x.

Proposition 8.11. La dérivée de la fonction $f(x) = x^r$ où $r \in \mathbb{R}$ est un nombre réel quelconque est

$$\left(x^r\right)' = rx^{r-1}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\left(x^r\right)' &= \left(\mathrm{e}^{\ln(x^r)}\right)' && \text{car } \mathrm{e}^{\ln(A)} = A \\ &= \left(\mathrm{e}^{r\ln(x)}\right)' && \text{car } \ln(A^B) = B\ln(A) \\ &= \mathrm{e}^{r\ln(x)}\left(r\ln(x)\right)' \\ &= \mathrm{e}^{\ln(x^r)}\frac{r}{x} && \text{car } \ln(A^B) = B\ln(A) \\ &= x^r\frac{r}{x} && \text{car } \mathrm{e}^{\ln(A)} = A \\ &= \frac{rx^r}{x} \\ &= rx^{r-1}\end{aligned}$$

□

Exemple 8.12.

$$x^\pi = \pi x^{\pi-1}.$$

8.6 Analyse de fonctions comportant des fonctions exponentielles ou logarithmiques

Pour faire un tableau de variation d'une fonction comportant une fonction exponentielle ou logarithme, les inégalités sont utiles.

$$\mathrm{e}^x > 0 \qquad b^x > 0 \qquad \begin{cases} \ln(x) > 0 & \text{si } x > 1 \\ \ln(x) < 0 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \log_b(x) > 0 & \text{si } x > 1 \\ \log_b(x) < 0 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Exemple 8.13. Analyse de la fonction $f(x) = x\mathrm{e}^x$, sachant que $\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.

Le domaine de f est $\mathbb{R}$ car $x\mathrm{e}^x$ est toujours défini.

Dérivée première et croissance

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x$$

Valeurs critiques : $f'(x) = 0 \iff (x+1) = 0$ ou $\mathrm{e}^x = 0$. $x = -1$ est la seule solution car $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout x.

$f'(x)$ existe toujours.

Dérivée seconde et concavité

$$f''(x) = \mathrm{e}^x + (1+x)\mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x$$

Valeurs critiques : $f''(x) = 0$ si $x = -2$, $f''(x)$ existe toujours.

Asymptotes verticales Aucune car aucune division par 0.

Asymptotes horizontales

$$\lim_{x\to\infty} x\mathrm{e}^x = \infty \cdot \mathrm{e}^\infty = \infty$$

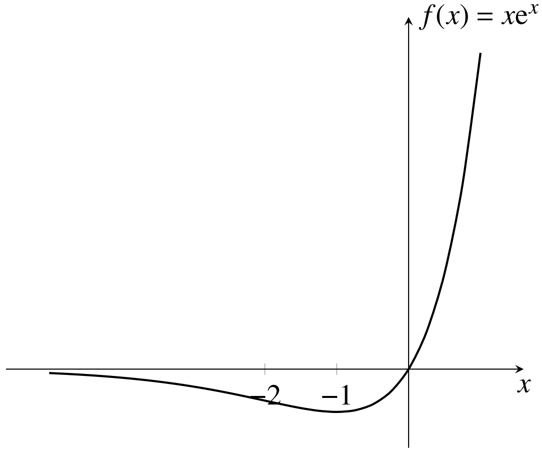
La donnée du problème nous indique que $y = 0$ est une asymptote horizontale :

$$\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		-1		∞
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	INF	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	∞

Graphe de la fonction



Exemple 8.14. Analyse de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, sachant que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Le domaine de f est $]0,\infty[$ car $\ln(x)$ est défini seulement si $x > 0$.

Dérivée première et croissance

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)(1)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2} = -\frac{\ln(x)-1}{x^2}$$

Valeurs critiques : $f'(x) = 0 \iff \ln(x) = 1,.\ x = e^1 = e.$

$f'(x)\nexists$ si $x = 0$ car il y a une division par 0.

Dérivée seconde et concavité

$$f''(x) = -\frac{\frac{1}{x}x^2 - (\ln(x)-1)(2x)}{(x^2)^2} = -\frac{x-(2x\ln(x)+2x)}{x^4} = -\frac{x\big(3-2\ln(x)\big)}{x^4} = \frac{2\ln(x)-3}{x^3}$$

Valeurs critiques : $f''(x) = 0$ si $2\ln(x) - 3 = 0$, ou $\ln(x) = \frac{3}{2}$, ce qui donne $x = e^{3/2} = \sqrt{e^3}$.

$f''(x)\nexists$ si $x = 0$ car il y a une division par 0.

Asymptotes verticales Division par 0 en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \ln(0^+)\frac{1}{0^+} = (-\infty)(\infty) = -\infty$$

Il y a donc une AV en $x = 0$.

Asymptotes horizontales La donnée du problème nous indique que $y = 0$ est une asymptote horizontale :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Tableau de variation Pour comparer les valeurs critiques afin de les mettre en ordre croissant, notons que

$$e = \sqrt{e^2} < \sqrt{e^3}$$

x	0		e		$\sqrt{\mathrm{e}^3}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	INF	$\searrow$	0

Graphe de la fonction