Notes de cours

Calcul différentiel

Yannick Delbecque, Hiver 2020

Chapitre 1

Notions préalables

1.1 Questions notations et abréviations

1.1.1 Ensembles

Un **ensemble** est une collection d'éléments. Si x est un élément de de l'ensemble A, on écrit $x \in A$. Sinon, on écrit $x \notin A$. On ne tient pas compte des répétitions dans les ensembles : $\{1,2,3\}$ est le même ensemble que $\{1,2,3,3,3,3\}$!

On peut décrire un ensemble de plusieurs manières.

Compréhension Par un condition qui doit être satisfaite pour qu'un x soit élément de l'ensemble.

$$\{x \mid \text{ condition sur } x\}$$

Extension En donnant une liste des éléments de l'ensemble

$$\{-2,1,\pi,10\}$$

Un même ensemble peut être décrit de plusieurs manières :

$$A = \{0,2,4,6,8\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ est un nombre naturel pair plus petit que} 10\}$$

Les ensembles A et B sont identiques car ils contiennent les mêmes éléments. On écrit $A = B$ pour dire que deux ensembles sont **égaux**, c'est à dire qu'ils contiennent les mêmes éléments.

L'**ensemble vide** est l'ensemble qui ne contient aucun élément. On dénote l'ensemble vide par le symbole « $\emptyset$ ». Autrement dit,

$$\emptyset = \{\}$$

Remarque 1.1. Le symbole « $\emptyset$ » est parfois utilisé à tord pour signifier » aucune solution » ou « impossible ».

On peut dire que « l'ensemble solution » d'un problème donnée est l'ensemble vide, ce qui signifie effectivement qu'il n'y a aucune solution. Cependant, on ne peut pas écrire

$$\sqrt{-1} = \emptyset \text{ ou } \sqrt{-1}\,\emptyset$$

car $\emptyset$ est un ensemble et $\sqrt{-1}$, si ce nombre était défini, serait justement un nombre.

Cardinalité

Un ensemble peut être **infini** comme l'ensemble des nombres pairs ou celui des nombres premiers, ou **fini** comme l'ensemble des facteurs entiers du nombre 12. On appelle la taille d'un ensemble sa **cardinalité**.

Opérations de base sur les ensembles

Union

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} \qquad \text{« } A \text{ union } B \text{ »}$$

Intersection

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\} \qquad \text{« } A \text{ intersection } B \text{ »}$$

Différence

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} \qquad \text{« } A \text{ sauf } B \text{ »}$$

Exemple 1.1.

$$\{1,2,3\} \cup \{2,3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$$

$$\{1,2,3\} \cap \{2,3,4,5\} = \{2,3\}$$

$$\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4,5\} = \{1\}$$

$$\{1,2\} \cap \{3,4,5\} = \emptyset$$

$$\{2,3\} \setminus \{2,3,4,5\} = \emptyset$$

Sous-ensemble

Si chaque élément d'un ensemble A est aussi un élément d'un ensemble B, alors on dit que A est un **sous-ensemble** de B. On écrit alors

$$A \subseteq B.$$

Remarque 1.2. Ne pas confondre $\in$ (« est élément de ») avec $\subseteq$ (« est sous-ensemble de »).

Par exemple

$$2 \in \{1,2,3,4\}$$

mais l'énoncé « $2 \subseteq \{1,2,3,4\}$ » n'a pas de sens.

De même

$$\{2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\}$$

mais

$$\{2,3\} \in \{1,2,3,4\}$$

est faux.

Ensembles souvent utilisés dans ce cours

Certains ensembles sont très importants en mathématiques et on des noms et notations standard. Dans ce cours, nous utiliserons régulièrement les ensembles de nombres suivants :

$\mathbb{N}$: les nombres naturels ;

$\mathbb{Z}$: les nombres entiers ;

$\mathbb{Q}$: les nombres rationnels ;

$\mathbb{R}$: les nombres réels.

Ces ensembles importants seront décrits plus loin. Il existe d'autres ensembles de nombres utilisés ou étudiés en mathématiques que nous ne verrons pas dans ce cours : les nombres complexes ($\mathbb{C}$), les nombres algébriques ($\mathbb{A}$), les nombres transcendants, et plusieurs autres.

Nous utiliserons aussi les intervalles de nombres réels :

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (intervalle **fermé**)

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalle **ouvert**)

$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

1.2 Logique et abréviations

Un **énoncé** est une affirmation pouvant être vraie ou fausse.

Exemple 1.2. Les affirmations suivantes sont des énoncés.

« 2+2=5 »

« 5 est un nombre premier » « $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ » « La fonction définie par $f(x) = x^2$ est croissante si $x \geq 0$.

Remarque 1.3. Ne pas confondre un énoncé avec une expression. Par exemple

$$2x + 3 = 5$$

est un énoncé (pouvant être vrai ou faut selon la valeur de x), mais

$$2x + 3$$

est une expression algébrique qui représente un nombre. Cela n'a pas de sens de dire que le nombre $2x+3$ est vrai ou est faux. En mathématique élémentaire, les énoncés comportent le plus souvent le symbole « = » ou un symbole d'inégalité.

Voici quelques symboles logiques que nous utiliserons dans ce cours.

« non-A » Négation de A. Diverses notations sont utilisées, par exemple $\neg A$

« si A, alors B » Notation : $A \implies B$. A est l'**hypothèse**, B est la **conclusion**. On dit aussi que A est une condition suffisante pour B et que B est une condition nécessaire pour A.

« A si et seulement si B » Notation : $A \iff B$ ou A ssi B. $A \iff B$ est équivalent à dire que $A \implies B$ et $B \implies A$.

« $\forall A$ » « Pour tout A. » On écrit par exemple

$$\forall n \in \mathbb{Z}. n \text{ est pair ou impair}$$

pour dire qu'un nombre entier quelconque est pair ou impair.

« $\exists A$ » « Il existe A ». On écrit par exemple

$$\exists n \in \mathbb{Z}. n \text{ est un nombre premier}$$

pour dire qu'il y a (au moins) un nombre entier qui est premier.

Notons que, donné par écrit, l'énoncé d'une implication n'est pas toujours exactement la forme « si ... alors ... ». Par exemple :

> « Un nombre entier est divisible par 2 s'il se termine par 0,2,4,6 ou 8 »

est le même énoncé que

> « S'il se termine par 0,2,4,6 ou 8, un nombre entier est divisible par 2. »

En utilisant le symbole $\Longrightarrow$, cela revient à dire que

$$A \Longrightarrow B \text{ et } B \Longleftarrow A$$

sont des énoncés équivalents.

La **contraposée** d'une implication de la forme $A \Longrightarrow B$ est l'implication non$-B \Longrightarrow$ non$-A$. La contraposée est équivalente à l'implication originale.

Exemple 1.3. L'énoncé

> « Un nombre entier n'est pas divisible par 2 s'il ne se termine pas par 0,2,4,6 ou 8. »

est la contraposée de

> « Si un nombre entier se termine par 0,2,4,6 ou 8, alors il est divisible par 2. »

Exemple 1.4. L'énoncé

> « Si un nombre est premier, alors il n'a pas de diviseurs autre que 1 et lui-même. »

est la contraposée de

> « Si un nombre a d'autres diviseurs que 1 et lui-même alors il n'est pas premier. »

Une **tautologie** est une affirmation qui est toujours vraie pour des raisons logiques.

Exemple 1.5. Les énoncés des formes suivantes sont toujours vrais.

$$A \Longrightarrow A$$

> « Si n est un nombre entier, alors n est un nombre entier. »

$$A \text{ et } B \Longrightarrow A$$

> « Si n est un nombre entier et q est un nombre rationnel, alors n est un nombre entier. »

$$A \implies B \text{ ou non-}B$$

« Si n est un nombre entier, alors n est pair ou n est impair. »

1.2.1 Division du discours mathématique

Pour clarifier la lecture, un texte est normalement divisés en plusieurs parties de différents niveaux hiérarchiques : chapitres, sections, paragraphes, phrases, etc. Pour clarifier la lecture d'un texte mathématique, on utilise en plus des divisions spéciales associées au différents éléments du discours mathématique.

Axiome Propriété qui est acceptée sans démonstration, considérée comme assez évidente pour être le fondement d'une théorie mathématique.

Définition Propriété ou identité qui défini le sens d'une notation ou d'un terme nouveau.

Théorème Résultat important, dont la validité est établie par une démonstration ou une preuve, et qui a une grande importance dans un domaine donné des mathématiques étant donné ses multiples conséquences. Abréviation en classe : « thm ».

Proposition Résultat important, dont la validité est établie par une démonstration ou une preuve. Abréviation en classe : « prop ».

Lemme Résultat servant à démontrer un ou plusieurs autres résultats.

Corrolaire Résultat qui est déduit facilement d'un résultat précédant, une conséquence immédiate d'un théorème ou d'une proposition.

Preuve (ou **démonstration**) Suite de déduction logiques dont la conclusion est un théorème, une proposition ou un lemme. Une preuve répond à la question « pourquoi c'est vrai. » On indique habituellement la fin d'une preuve à l'aide de CQFD (« ce qu'il fallait démontrer »), QED (« *quod erat demonstrandum* », CQFD en latin) ou par un signe comme « $\square$ ». Il existe plusieurs formes de preuves (directes, par induction, par contradiction ou par l'absurde, etc.) que nous verrons à l'œuvre au cours de la session.

Note importante : « démontrer » ne veut pas dire « donner un exemple ». Un cas particulier n'établit pas la vérité pour tous les cas.

Cependant, un seul cas particulier peut réfuter une affirmation générale. On appelle un tel exemple un **contre exemple**.

Exemple 1.6. Le fait que

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

est un cas particulier qui ne démontre pas que

$$x^2 + y^2 = z^2$$

pour n'importe quel nombres x, y et z. Par exemple,

$$2^2 + 3^2 \neq 4^2.$$

Ce dernier exemple démontre cependant que

$$x^2 + y^2 = z^2$$

n'est pas toujours vrai !

Exemple 1.7. Démontrer à l'aide d'un contre-exemple qu'il n'est pas vrai que

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2$$

pour tout choix de nombres entier x, y et z.

On peut prendre le cas particulier $x = 2$ et $y = 3$.

$$(2+3)^2 = 25, \text{ mais } 2^2 + 3^2 = 13.$$

1.3 Ensembles de nombres

Dans ce qui suit, on passe en revue les différents ensembles de nombres étudiés en mathématiques. Nous donnons pour chacun quelques propriétés mathématiquement importantes qui font que l'on considère important de considérer ces types de nombres.

Nombres naturels

L'ensemble des nombres naturels est

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Ces nombres sont caractérisés par le fait que chaque nombre naturel n a un successeur $n+1$; il y a toujours un nombre naturel encore plus grand qu'un nombre naturel donné.

Un principe important qui est souvent considéré comme une partie essentielle de la définition des nombres naturels :

Hypothèse 1 (principe d'induction)**.** *Si $A(n)$ est une proposition impliquant une variable n représentant un nombre entier*

(1) est vraie pour le nombre naturel $n = 0$ et

(2) lorsqu'elle est vraie pour $n > 0$ et ses prédécesseurs, alors elle l'est aussi pour $n+1$,

alors la proposition est vraie pour tout n.

Nombres entiers

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Quelques concepts liés aux nombres naturels et aux nombres entiers.

Définition 1.1. n est un nombre pair s'il existe un nombre $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k.$$

Définition 1.2. n est un nombre impair s'il existe un nombre naturel $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k + 1.$$

Cela est peut être contre-intuitif, mais l'essence de la division est une propriété des nombres entiers, souvent connue comme la « division avec reste ». Les mathématiciennes et mathématiciens préfèrent plutôt nommer cette propriété « division Euclidienne ».

Théorème 1.1 (Division Euclidienne)**.** Pour tous nombres entiers n et d, il existe deux nombres entiers uniques q (quotient) et r (reste) tels que $0 \leq r < d$

$$n = qd + r.$$

Exemple 1.8. Si $n = 10$ et $d = 4$, alors $q = 2$ et $r = 2$ sont les quotients et restes de division.

$$10 = 2(4) + 2.$$

La division Euclidienne fonctionne aussi pour les nombres négatifs. Par exemple, si $n = -3$ et $d = 2$, alors $q = -2$ et $r = 1$ sont les quotients et restes de division.

$$-3 = 2(-2) + 1.$$

Le théorème suivant est un des plus importants résultats concernant les nombres entiers.

Théorème 1.2 (Théorème fondamental de l'arithmétique)**.** Tout nombre entier n peut se factoriser de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme un produit de facteur premiers.

Exemple 1.9.

$$234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$$
$$-24 = (-1)2^3 \cdot 3$$

Nombres rationnels

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$$

Une propriété fondamentale pour la manipulation des fraction est l'existence d'une unique version simplifiée de chaque fraction :

Théorème 1.3. Pour tout nombre rationnel $\frac{m}{n}$, avec $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$ et $m \neq 0$, il existe un unique $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ telle que

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$$

et que a et b n'ont pas de facteurs communs.

On peut caractériser les nombres rationnels par leur développement décimaux.

Théorème 1.4. Un nombre a peut s'écrire comme une fraction si et seulement si son développement décimal est périodique.

Nombres réels

En mathématques, il y a plusieurs manières de définir les nombres réels, mais celle-ci est probablement celle qui est la plus familière :

$$\mathbb{R} = \begin{array}{l}\text{ensemble de tous les développements décimaux}\\ \text{quelconques (possiblement infini non-périodique)}\end{array}$$

Les nombres peuvent être combinés à l'aide des opérations de base : addition, soustraction, multiplication, division, exposants et racines, c'est à dire que le résultat de ces opérations, s'il est défini, est aussi un nombre réel. Quand une expression combine plusieurs opérations, on doit les effectuer dans l'ordre conventionnel déterminé par la « priorité des opérations ».

On suppose que les opérations de base ont les propriétés vu au secondaire (voir formulaire d'algèbre) : associativité, distributivité, commutativité, etc.

Un fait important au sujet des nombres réels, c'est qu'ils comportent des nombres ne pouvant s'écrire sous forme de fractions. Il est généralement assez difficile de démontrer qu'un nombre n'est pas un nombre rationnel. Voici un des exemples les plus simple et la première preuve historique de l'existence d'un nombre ne pouvant s'écrire comme une fraction de nombre entiers.

Théorème 1.5. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Lemme 1.1.

$$n \text{ pair } \iff n^2 \text{ pair.}$$

Preuve du lemme. ($\Longrightarrow$) Si n est pair, alors n est le double d'un certain nombre k. On peut donc écrire que $n = 2k$. Dans ce cas,

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

ce qui montre que n^2 est bien le double d'un nombre entier.

($\Longleftarrow$) On démontre la contraposée : si n est impair, alors n^2 est aussi impair. Supposons que n est impair ; il peut donc s'écrire comme $n = 2k + 1$ pour un certain nombre k. Dans ce cas,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

ce qui établi que n^2 est impair. □

Preuve du théorème. Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Nous allons montrer que cette hypothèse mène à un résultat absurde et qu'elle ne peut pas être vraie, donc que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Si $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, il existe deux entiers a et $b \neq 0$ tel que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Comme on peut toujours simplifier une faction, on peut simplifier $\frac{a}{b}$ pour obtenir une fraction simplifiée $\frac{m}{n}$. On a donc

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

où m et n n'ont aucuns facteurs communs.

En multipliant chaque membre de l'égalité $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ par n, on obtient

$$n\sqrt{2} = m.$$

En mettant au carré, on a que

$$n^2(2) = m^2$$

m^2 doit donc être pair. Par le lemme précédant, on a que m doit être pair lui aussi. m peut donc s'écrire comme $m = 2k$ pour un certain entier k. En remplaçant m par $2k$ dans l'égalité précédente

$$n\sqrt{2} = m,$$

on obtient que

$$n\sqrt{2} = 2k.$$

On met au carré pour obtenir

$$2n^2 = 4k^2.$$

En divisant par 2, on trouve

$$n^2 = 2k^2.$$

n^2 est donc pair, ce qui implique par le lemme précédant que n est pair lui aussi.

La fraction $\frac{m}{n}$ peut donc être simplifiée car le numérateur m et le dénominateurs n sont tous les deux pairs ! Cela contredit le fait que $\frac{m}{n}$ est une faction simplifiée. L'hypothèse « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel » est donc fausse et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

1.4 Algèbre

L'objectif principal de l'algèbre élémentaire est de déterminer une valeur inconnue dans une relation numérique. On peut poser ce genre de questions sous forme « écrite », par exemple

> (Problème vieux de quelques millénaires figurant sur la tablette cunéiforme AO 8862)
> J'ai multiplié longueur et largeur pour obtenir l'aire. J'ai additionné ce par quoi la longueur dépasse la largeur à l'aire et j'ai obtenu 183. La somme de la longueur et de la largeur est 27. Quelles sont la longueur, la largeur et l'aire ?

Les géomètres et mathématiciens ont développé au fil du temps différentes manière de représenter ce genre de problème afin de les résoudre plus facilement. La notation moderne, malgré le fait qu'elle exige plusieurs années d'entrainement, est de loin la plus efficace. Si x est la longueur et y la largeur, le problème se traduit en notation moderne comme

$$\begin{aligned} x-y+xy &= 183 \\ x+y &= 27 \end{aligned}$$

L'algébriste moderne applique ensuite quelques principes simples de manière astucieuse pour déterminer les valeurs inconnue. On peut même décrire la méthode de solution avec ces techniques : (1) exprimer y en fonction de x dans la seconde équation : $y = 27-x$ (2) substituer la valeur trouvée dans la première équation $x-(27-x)+x(27-x) = 183$ (3) résoudre l'équation obtenue en regroupant : $-x^2+29x-210 = 0$. On trouve deux solutions : $x = 14$ et $x = 15$, et donc les valeurs de y correspondantes : $y = 13$ et $y = 12$. L'aire correspondante est respectivement 182 et 180.

Si la solution de cet ancien problème vous semble complexe, en comparant avec une solution n'utilisant aucune des idées modernes comme des variables, la substitution, isoler, la formule quadratique, etc, la solution serait beaucoup plus complexe.

1.4.1 Principes généraux

Voici les principes les plus utilisés dans les raisonnements algébriques :

(Propriétés des variables) Une variable représentant un nombre inconnu d'un certain type (entier, rationnel, nombre réel) a les mêmes propriétés que les nombres du même type. On peut y appliquer les mêmes opérations.

(Transitivité de l'égalité) $A = B$ et $B = C$ alors $A = C$.

(Application d'une opération) Si $f(x)$ est une opération (fonction), on a que

$$A = B \implies f(A) = f(B).$$

Si f est une opération inversible, alors $A = B \iff f(A) = f(B)$.
Si $f^{-1}(x)$ est l'opération inverse de $f(x)$, alors

$$f(A) = B \iff A = f^{-1}(B).$$

(Substitution) Si $A(x) = B(x)$ alors $A(C) = B(C)$, où C est une expression algébrique quelconque substituée à la place de la variable x.

Voyons maintenant des exemples où ces principes sont utilisés.

Transitivité

La transitivité de l'égalité est très souvent utilisé sans que l'on s'en rende compte ou sans que l'on mentionne explicitement son utilisation.

Exemple 1.10. Par exemple, si on écrit

$$(x+2)^2 = (x+2)(x+2) = x(x+2)+2(x+2) = x^2+2x+2x+4 = x^2+4x+4.$$

On utilise (plusieurs fois) la *transitivité de l'égalité* pour conclure que

$$(x+2)^2 = x^2+4x+4.$$

Note : on écrit souvent verticalement une telle suite d'égalité quand elle est trop longue :

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= (x+2)(x+2)\\ &= x(x+2)+2(x+2)\\ &= x^2+2x+2x+4\\ &= x^2+4x+4.\end{aligned}$$

Substitution

On utilise le principe de *substitution* quand on prend une identité algébrique simple pour en trouver une plus complexe.

Exemple 1.11. Voici l'identité générale pour les différences de carré

$$x^2-y^2 = (x-y)(x+y),$$

Cette identité est vraie peu importe les valeurs de x et y. On peut déduite une nouvelle identité en *substituant* (par exemple) x^2 à x et $2x$ à y :

$$(x^2)^2-(2x)^2 = \big((x^2)-(2x)\big)\big((x^2)+(2x)\big),$$

Cette dernière égalité est donc déduite de la première à l'aide du principe de substitution.

En simplifiant l'identité obtenue, on obtient que

$$x^4-4x^2 = (x^2-2x)(x^2+2x).$$

Application d'une même opération

L'application d'une même opération sur chaque membre d'une égalité est probablement le premier principe algébrique appris dans les cours d'algèbre élémentaire et est une généralisation du principe ayant donné son nom à l'algèbre.

Exemple 1.12. Si on a que $2x = 5$, on obtient que

$$\frac{2x}{2} = \frac{5}{2}$$

en appliquant l'opération « diviser par deux » sur chaque membre de l'égalité initiale.

Comme « diviser par deux » est une opération inversible (dont l'inverse est « multiplier par deux », on peut écrire

$$2x = 5 \iff \frac{2x}{2} = \frac{5}{2}.$$

L'opération « mettre au carré » n'est pas inversible. Par exemple, si on met -2 au carré, on obtient 4. L'opération inverse est ambigüe : on pourra obtienir un carré de 4 à partir de 2 ou de -2.

Si on applique une opération non inversible, comme mettre au carré, on ne peut pas obtenir une équivalence entre les identités. Par exemple, l'implication

$$2x = 5 \implies 4x^2 = 25$$

est vraie, mais l'équivalence

$$2x = 5 \iff 4x^2 = 25$$

est fausse !

1.4.2 Propriétés algébriques utiles

Les identités algébriques suivantes sont très souvent utilisées. On les suppose connues. Elles peuvent être démontrées par des preuve directes à l'aide de manipulation algébriques simples.

$AB + AC = A(B + C)$ (mise en évidence simple)

$AC + AD + BC + BD = (A + B)(C + D)$ (mise en évidence double)

$\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$ (rationalisation)

$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ (différence de carrés)

$\left(\sqrt{A} \pm \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}\right) = A - B$ (conjugué)

$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ (différence de cubes)

$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (binôme carré parfait)

$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ (développement du binôme degré 3)

$(A + B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$ (développement du binôme degré 4)

Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal est un truc permettant de déterminer rapidement les coefficients du développement d'un binôme de degré quelconque : si on développe une expression de la forme $(A + B)^n$, les coefficients du développement sont donnée par la n-ième ligne du triangle de Pascal.

Triangle de Pascal

$$\begin{array}{lc}
(A+B)^0 & 1 \\
(A+B)^1 & 1 \quad 1 \\
(A+B)^2 & 1 \quad 2 \quad 1 \\
(A+B)^3 & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
(A+B)^4 & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
(A+B)^5 & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
(A+B)^6 & 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Exemple 1.13. Le développement de $(x+2)^5$ a la forme suivante :

$$C_0x^5 + C_1x^42^1 + C_2x^32^2 + C_3x^22^3 + C_4x^12^4 + C_52^5$$

Les coefficients C_0, C_1, ..., C_5 sont donnés par la ligne correspondant à $(A+B)^5$ du triangle de Pascal, soit

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1.$$

On a donc que

$$(x+2)^5 = x^5 + 5x^42 + 10x^32^2 + 10x^22^3 + 5x2^4 + 2^5$$

La preuve que les coefficients données par le triangle de Pascal sont bien ceux des développement du binôme fût le premier exemple d'une preuve utilisant explicitement le principe d'induction sur les nombres naturels.

1.4.3 Propriétés fréquemment utilisées pour résoudre des équations

(EQ1) $ABC = 0 \implies A = 0$ ou $B = 0$ ou $C = 0$

(EQ2) $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \iff AD = BC$ et $B, D \neq 0$

Le premier de ces principes permet de résoudre des équations sous forme factorisée. Par exemple, si on a l'équation

$$(x-2)(x+1) = 0$$

On a une expression de la forme $AB = 0$. Il faut donc que $A = 0$ ou que $B = 0$. Dans ce cas particulier, il faut donc que

$$x-2 = 0 \text{ ou } x+1 = 0.$$

Cela implique que $x = 2$ ou $x = -1$.

Ce principe s'applique à un produit d'un nombre de facteurs aussi grand que l'on veut : si un produit de facteurs est nul, un des facteurs doit être nul. Ainsi, les zéros de

$$(x-3)(x+\sqrt{33})(x-\log_2(3)) = 0$$

sont $x = 3$, $x = -\sqrt{33}$ et $x = \log_2(3)$.

La simplicité de la solution d'une équation factorisée est évidente si on la compare avec même équation non-factorisée :

$$x^3 - x^2\log_2(3) + \sqrt{33}x^2 - \sqrt{33}x\log_2(3) - 3x^2 + 3x\log_2(3) - 3\sqrt{33}x + 3\sqrt{33}\log_2(3) = 0.$$

C'est une des raisons principales pour lesquelles les techniques de factorisations de polynômes sont importantes : elles permettent de prendre une équation polynômiale de degré élevé et de la transformer (en la factorisant et en utilisant EQ1) en plusieurs équations de degrés moins élevés (donc plus faciles à résoudre).

Le second principe permet de résoudre facilement des équations comportant des expressions rationnelles factorisée comme l'équation suivante

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x-6} = 0.$$

Par (EQ2), cette équation est équivalente à

$$(x-3)(x+1) = 0(x-6) = 0.$$

On est donc ramené à une situation où le produit de facteurs est nul. L'équation a donc comme solution les zéros de $(x-3)(x+1)$, soit $x = 3$ et $x = -1$. Ainsi, seul le numérateur détermine les zéros d'une expression de la forme A/B. Cependant, le dénominateur ne peut pas s'annuler car il ne peut par y avoir de division par zéro. Ainsi, dans une équation comme

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x^2+2x+1} = 0$$

$x = 3$ et $x = -1$ sont les zéros du numérateur, mais $x = -1$ annule le dénominateur (ce qui cause une division par zéro !). La valeur $x = -1$ n'est donc par un zéro de l'équation.

1.4.4 Opérations inverses usuelles

En algèbre, on utilise souvent le « principe de la balance » : on peut faire la même opération de « chaque côté » d'une égalité. Les opérations inverses les plus souvent utilisée sont indiquées dans la liste suivante, avec les restrictions faisant en sorte que les opérations soient inversibles.

$A + C = B \iff A = B - C$

$CA = B \iff A = \frac{1}{C}B$ si $C \neq 0$.

$A^n = B \implies A = \pm\sqrt[n]{B}$ si n pair.

$A^n = B \iff A = \sqrt[n]{B}$ si n impair.

$b^A = B \iff \log_b(B) = A$ si $B > 0$.

$\sin(A) = B \iff A = \arcsin(B)$ si $-\frac{\pi}{2} \leq A \leq \frac{\pi}{2}$

$\cos(A) = B \iff A = \arccos(B)$ si $0 \leq A \leq \pi$

$\tan(A) = B \iff A = \arctan(B)$ si $-\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2}$

Remarque 1.4. Il faut faire la différence entre résoudre une équation comportant un carré et appliquer l'opération racine carrée. Si on résout une équation de la forme

$$x^2 = a,$$

qui a comme solutions $x = \pm\sqrt{a}$ si $a \geq 0$, donc deux solutions. Si on applique la fonction racine carrée sur a, il y a une seule valeur, le résultat de l'opération $\sqrt{a}$, qui est toujours positif.

Par exemple :

$$x^2 = 2 \implies x = \pm\sqrt{2} \text{ (deux solutions)}$$

$$\text{La racine carrée de 2 est } \sqrt{2} \text{ (une seule valeur)}$$

1.4.5 Factorisation

Comme nous l'avons dit précédemment, la factorisation est une stratégie importante pour simplifier une équation afin de la résoudre.

Exemple 1.14. Considérons l'équation

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

En factorisant le membre de gauche, on obtient

$$(x+1)(x-5) = 0.$$

Comme un produit de facteur est nul si un de ses facteur est nul, soit $(x+1) = 0$, soit $(x-5) = 0$. Les solutions sont donc $x = -1$ ou $x = 5$.

On voit dans cet exemple que chaque facteur de degré un, donc de la forme $x - a$, correspond à une solution de l'équation originale. Il y a en fait une correspondance entre les facteurs de degré 1 et les zéro : si $x = a$ est un zéro d'une équation polynômiale $P(x) = 0$, alors $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$.

Le résultat suivant dit que chaque zéro d'un polynôme est lié à un « facteur coupable » lui correspondant et réciproquement.

> **Proposition 1.1** (Factorisation)**.** Si $P(x)$ est un polynôme quelconque, alors a est un zéro de $P(x)$ si et seulement si $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$.

Autrement dit :

$$P(a) = 0 \iff P(x) = (x-a)Q(x).$$

Sous forme de « slogan « :

« zéro si et seulement si facteur (de degré 1). »

Exemple 1.15. Si $P(x) = x^2 - x - 2$, on a que

$$P(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0.$$

La valeur $a = 2$ est donc un zéro de $P(x)$. Le théorème de factorisation dit que $P(x)$ doit avoir $(x-2)$ (c'est à dire le facteur (x-le zéro)) comme facteur. Si on divise $P(x) = x^2 - x - 2$ par $(x-2)$, on trouve que

$$P(x) = (x-2)(x+1),$$

ce qui est est bien de la forme donnée par le théorème :

$$P(x) = (x-a)Q(x).$$

Exemple 1.16. La valeur $x = 1$ est un zéro de $x^3 - 1$. On sait donc par le théorème de factorisation que $x^3 - 1 = (x-1)Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme à déterminer. On peut toujours déterminer $Q(x)$ en divisant :

$$Q(x) = \frac{x^3 - 1}{(x-1)}.$$

En divisant, trouve que $Q(x) = x^2 + x + 1$, et donc

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Démonstration. Comme le résultat à démontrer est de la forme « $A \iff B$ », on fait les démonstration de chacune des deux implications $A \implies B$ et $A \impliedby B$.

($\implies$) Supposons que $P(a) = 0$. On peut diviser $P(x)$ par $(x-a)$ pour obtenir un expression de la forme

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R(x),$$

où $R(x)$ est le reste de la division et $Q(x)$ le quotient.

Le degré de $R(x)$ doit être zéro car on divise par le polynôme $(x-a)$ qui est de degré 1. (Le degré du reste est toujours strictement inférieur au degré du polynôme par lequel on divise.) Comme un polynôme de degré 0 est en fait une constante $R \in \mathbb{R}$, en divisant on a donc réécrit $P(x)$ comme suit :

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R$$

Si on évalue chaque membre de cette dernière égalité en a, on obtient

$$P(a) = (a-a)Q(a) + R$$

Par hypothèse, $P(a) = 0$. De plus, le facteur $a - a$ est toujours nul. On a donc

$$0 = 0 + R.$$

La seule valeur de R satisfaisant cette équation est zéro. On a donc établit que

$$P(x) = (x-a)Q(x) + 0 = (x-a)Q(x),$$

c'est à dire que $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$.

($\impliedby$) Pour démontrer la réciproque, on fait l'hypothèque que $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$. Dans ce cas, on peut écrire $P(x)$ comme un produit de facteur de la forme

$$P(x) = (x-a)Q(x)$$

où $Q(x)$ est le quotient de la division de $P(x)$ par $(x-a)$.

On veut montrer que $P(a) = 0$. Il suffit d'évaluer la forme factorisée :

$$P(a) = (a-a)Q(a) = (0)Q(a) = 0. \qquad \square$$

On peut conclure du théorème de factorisation que pour un polynôme $P(x)$,

$$P(a) \neq 0 \iff P(x) \text{ n'a pas de facteur de la forme } (x-a).$$

Cela permet de vérifier qu'un polynôme n'a pas de facteur de la forme $x - a$ sans chercher montrer directement que la factorisation est impossible. Il suffit plutôt d'évaluer $P(a)$.

Théorème 1.6. Les polynômes réels irréductibles sont de l'une des deux formes suivantes :

- degré 1 de la forme $c(x-a)$ (a est nécessairement un zéro)
- degré 2 de la forme ax^2+bx+c, où $b^2-4ac<0$. (polynôme de degré deux sans zéros).

Théorème 1.7 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** Tout polynôme réel peut s'écrire comme un produit d'une constante réelle et de polynômes irréductibles, produit unique à l'ordre des facteurs près.

Comme chaque solution d'une équation polynômiale de la forme $P(x)=0$ correspond à un facteur de degrée un de $P(x)$, on déduit du théorème fondamental de l'algèbre le corolaire suivant.

Corollaire 1.1. Une équation polynômiale de degré n de la forme

$$P(x)=0$$

a au plus n solutions.

1.4.6 Fractions algébriques

Définition 1.3. Une **fraction algébrique** est une expression de la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes. Autrement dit, c'est une fraction de la forme

$$\frac{\text{polynôme}}{\text{polynôme}}.$$

Comme on peut factoriser des polynômes (à cause du théorème fondamental de l'algèbre), certaines opérations que l'on peut faire avec des fractions peuvent aussi être effectuées avec des polynômes : simplification de fractions, plus grand commun dénominateur, plus petit commun multiples, etc.

Exemple 1.17. Simplifions la fraction algébrique

$$\frac{x^2+x-2}{x^3-1}.$$

Pour simplifier la fraction algébrique, on cherche des facteurs communs au numérateur et au dénominateur. Il faut donc factoriser ces deux polynômes.

$$\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

(On utilise la technique « produit-somme » pour le numérateur et le théorème de factorisation pour le dénominateur, sachant que 1 est un zéro de x^3-1.)

On peut maintenant simplifier le facteur commun $(x-1)$.

$$\frac{x^2+x-2}{x^3-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)} = \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

On ne peut simplifier davantage car le numérateur et le dénominateur ne peuvent plus être factorisés (x^2+x+1 est un polynôme premier car $\Delta = 1^1 - 4(1)(1) < 0$.

1.5 Fonctions, graphes et domaines

Définition 1.4. Une **fonction** $f\colon A \to B$ allant d'un ensemble A à un autre ensemble B est une règle quelconque associant à des éléments a de l'ensemble A un unique élément b de l'ensemble B.

On dénote $f(a)$ l'élément de l'ensemble B associé à a.

1.5.1 Définition d'une fonction

On peut définir une fonction f de plusieurs manières.

On peut le faire en donnant explicitement une expression algébrique pour déterminer $f(x)$ à partir de la valeur de x, par exemple

$$f(x) = x^2.$$

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

On peut aussi définir une fonction *implicitement* à l'aide d'une égalité algébrique, par exemple une des égalités suivantes :

$$y = x^2$$

$$x^2 - y = 0$$

Dans ce cas, il faut spécifier quelle variable est déterminée en fonction de l'autre variable. La variable « entrée » est appelée **variable indépendante** et la « sortie » est appelé **variable dépendante** — elle dépend de la valeur de la variable indépendante.

Une équation ne définit pas toujours une fonction : il arrive qu'une valeur donnée de la variable indépendante corresponde à plusieurs valeurs de la variable dépendante. Par exemple

$$y^2 = x$$

ne définie par une fonction si on considère y comme variable dépendante. En effet, pour $x = 1$, les valeurs $y = 1$ et $y = -1$ satisfont toutes deux l'équation donnée. Il n'y a donc pas une valeur unique de y associée à la valeur $x = 1$. Cette relation ne défini pas une fonction.

1.5.2 Évaluation d'une fonction

La valeur d'un fonction définie par une expression algébrique est déterminée par substitution. Par exemple, si $f(x) = x^2+1$, on détermine $f(2)$ en remplaçant x par 2 dans l'expression x^2+1 définissant la fonction :

$$f(2) = (2)^2 + 1.$$

On dit que $f(2)$ est la valeur de la fonction en $x = 2$.

En général, dans l'expression $f(x)$, on appelle 2 l'**argument** de la fonction.

On peut évaluer une fonction en y substituant une expression algébrique. Par exemple, si $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, on a que

$$f(x+1) = \frac{(x+1)}{(x+1)+2}.$$

On note que toutes les occurrences de x dans l'expression définissant f sont remplacées par l'expression argument de la fonction.

Remarque 1.5. La notation $f(x)$ n'est pas un produit : $f(x)$ n'est pas le produit de f par x. En conséquence, la simplification suivante n'a pas de sens :

$$\frac{\cancel{f}(x)}{\cancel{f}(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$

car f n'est pas un nombre.

1.5.3 Composition

Si on a deux fonctions $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$ on peut créer une nouvelle fonction en appliquant la règle de f et ensuite la règle de g. On appelle cette fonction la **composée** de f et g.

Définition 1.5. Si $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$, alors la composition de f et g est définie par

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$$

La notation $g \circ f$ se lit « g rond f »

Exemple 1.18. Par exemple, si

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ et } g(x) = x + 1,$$

la composée de f et g est

$$g(f(x)) = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1) + 1$$

On note cette nouvelle fonction $g \circ f$ (lire « g rond f »). Ainsi

$$g \circ f(x) = (x^2 + 1) + 1 = x^2 + 2.$$

La composée de g et f est

$$f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 + 1$$

Ainsi

$$f \circ g(x) = (x+1)^2 + 1.$$

Dans ce dernier exemple, on voit qu'en génral $f \circ g \neq g \circ f$.

1.5.4 Fonctions inverses

Définition 1.6. On dit que les fonctions f et g sont **inverses** ou **réciproques** l'une de l'autre si

$$g(f(x)) = x \quad f(g(y)) = y$$

pour toutes les valeurs où ces expressions sont définies.

Exemple 1.19. Les fonctions

$$f(x) = \frac{x-2}{3} \text{ et } g(x) = 3x+2$$

sont des fonctions inverses l'une de l'autre. En effet,

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g\left(\frac{x-2}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{x-2}{3}\right)+2 \\ &= (x-2)+2 \\ &= x. \end{aligned}$$

De même, on a que

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(3x+2) \\ &= \frac{(3x+2)-2}{3} \\ &= \frac{3x}{3} \\ &= x \end{aligned}$$

Si la fonction est définie par une équation, on peut trouver la fonction inverse en isolant la variable indépendante en fonction de la variable dépendante. Cependant, cela ne donne pas toujours une fonction.

Exemple 1.20. Trouvons la fonction inverse de la fonction définie par $y = 3x+1$. On isole x.

$$x = \frac{y-1}{3}$$

Pour exprimer la fonction inverse en utilisant x comme variable indépendante, on interchange les variables x et y :

$$y = \frac{x-1}{3}.$$

Exemple 1.21. Trouvons la fonction inverse de la fonction définie par $y = x^2+1$. On isole x.

$$x = \pm\sqrt{y-1}$$

Pour exprimer la fonction inverse en utilisant x comme variable indépendante, on interchange les variables x et y :

$$y = \pm\sqrt{y-1}.$$

Cette expression ne définie par une fonction car pour une valeur de x donnée on a deux valeurs différentes de y. La fonction définie par $y = x^2 + 1$ n'a donc pas de fonction inverse.

1.5.5 Domaine d'une fonction

Définition 1.7. Le **domaine de définition** d'une fonction $f : A \to B$ est l'ensemble des éléments de A où $f(a)$ est défini. Notation :

$$\mathrm{dom}(f) = \{a \mid f(a) \text{ est défini}\}.$$

Les fonctions qui seront étudiées dans ce cours sont des **fonctions réelles**, c'est-à-dire les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On détermine le domaine d'une fonction réelle définie à l'aide des opérations dites « élémentaires » en utilisant les principes suivants.

$\cancel{(\div 0)}$ Il ne peut y avoir de division par zéro.

$$\frac{A}{B} \text{ est défini} \iff B \neq 0$$

$\cancel{\left(\sqrt{<0}\right)}$ Il ne peut y avoir de racine paire de nombre négatifs.

$$\sqrt{A} \text{ est défini} \iff A \geq 0$$

$\cancel{\left(\log_b(\leq 0)\right)}$ Le logarithme d'un nombre négatif ou nul n'est pas défini (peu importe la base)

$$\log_b(A) \text{ est défini} \iff A > 0$$

Exemple 1.22. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x-3}$. Le domaine de f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ où $f(x)$ est défini. Comme il y a une racine carrée dans la définition de f, on a que

$$\begin{aligned} f(x) \text{ def} &\iff \sqrt{2x-3} \text{ def} \\ &\iff 2x-3 \geq 0 \\ &\iff 2x \geq 3 \\ &\iff x \geq 3/2 \end{aligned}$$

On a donc que $f(x)$ est défini pour $x \geq 3/2$. Le domaine est donc

$$\mathrm{dom}(f) = [3/2, \infty[.$$

Rappels sur les inégalités

On voit dans l'exemple précédent certaines des conditions données pour déterminer le domaine d'une fonction exige de manipuler des inégalités. Voici un rappel des propriétés importantes permettant de le faire.

Hypothèse 2. *Pour tous nombres réels a, b, c, on a que*

$$a \leq b \text{ et } b \leq c \implies a \leq c$$
$$a < b \text{ et } b < c \implies a < c$$

Additionner un constante préserve les inégalités :

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

$$a < b \implies a + c < b + c$$

Multiplier par une constante positive préserve les inégalités :

$$a \leq b \implies ac \leq bc \ (\text{si } c > 0)$$

$$a < b \implies ac < bc \ (\text{si } c > 0)$$

Multiplier par une constante négative inverse le sens des inégalités :

$$a \leq b \implies ac \geq bc \ (\text{si } c < 0)$$

$$a < b \implies ac > bc \ (\text{si } c < 0)$$

Inverser change de sens des inégalités :

$$a \leq b \implies \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

$$a < b \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Remarque 1.6. Une erreur fréquente consiste à imaginer faussement que certaines fonction préservent les inégalités. Par exemple si

$$4 \leq x^2,$$

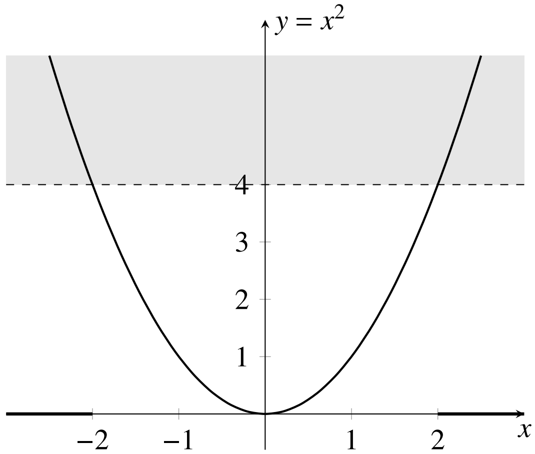
cela n'implique pas que

$$2 \leq x.$$

Autrement dit, la fonction racine carré ne préserve pas les inégalités.

$$a \leq b \not\Longrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

On peut voir pourquoi dans le graphe de $y = x^2$:



On voit que $x^2 \geq 4$ dans la région en gris dans le graphique précédent. Cela correspond aux valeurs suivantes de x :

$$x \leq -2 \text{ ou } 2 \leq x$$

On peut aussi voir comprendre la situation par la loi des signes.

$$\begin{aligned} 4 \leq x^2 &\iff 0 \leq x^2 - 4 \\ &= \iff 0 \leq (x-2)(x+2) \end{aligned}$$

Pour que $4 \leq x^2$, il faut que le produit de $(x-2)$ par $(x+2)$ soit positif. Il faut donc que ceux deux facteurs soit positif, ou que ces deux facteurs soient négatifs. Dans le premier cas, on a

$$0 \leq x - 2 \iff 2 \leq x \text{ et } 0 \leq x + 2 \iff -2 \leq x$$

Ces deux inégalités sont vraies dès que $2 \leq x$, car si $2 \leq x$, on a automatiquement que $-2 \leq x$.

Dans le second cas, on a

$$x - 2 \leq 0 \iff x \leq 2 \text{ et } x + 2 \leq 0 \iff x \leq -2$$

Ces deux inégalités sont vraies dès que $-22 \leq x$, car si $x \leq -2$, on a automatiquement que $x \leq 2$.

Ainsi, on a que $4 \leq x^2$ dès que $x \leq 2$ ou $x \leq -2$.

Exemple 1.23. Trouvons le domaine de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$. La seule opération pouvant limiter le domaine de la fonction est la racine carrée.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 4x - 5} \text{ est défini } &\iff x^2 - 4x - 5 \geq 0 \\ &\iff (x-5)(x+1) \geq 0 \end{aligned}$$

Le produit $(x-5)(x+1)$ est positif si ses deux facteurs sont de même signe. On doit donc traiter des deux cas.

Si les deux facteurs sont positifs, on a

$$x-5 \geq 0 \text{ et } x+1 \geq 0.$$

Dans ce cas, $x \geq 5$ et $x \geq -1$. Les deux conditions sont satisfaites quand $x \geq 5$.

Si les deux facteurs sont négatifs ou nuls, on a

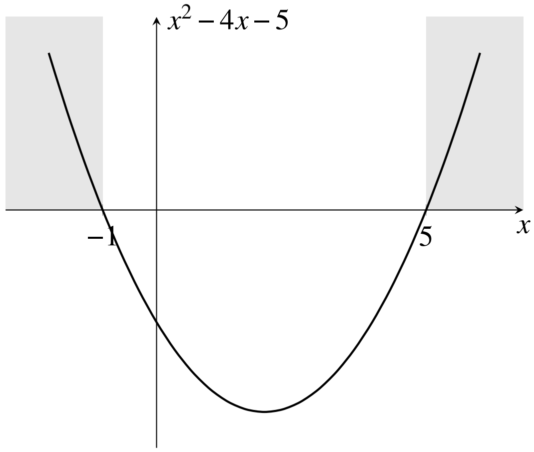
$$x-5 \leq 0 \text{ et } x+1 \leq 0.$$

Dans ce cas, $x \leq 5$ et $x \leq -1$. Les deux conditions sont satisfaites quand $x \leq -l$.

La racine $\sqrt{x^2-4x-5}$ est donc définie quand $x \leq -1$ ou $5 \leq x$. On a donc que

$$\text{dom}(f) =]-\infty,-1] \cup]5,\infty[.$$

On peut aussi déterminer la région où $x^2-4x-5 \geq 0$ l'aide du graphe de $y = x^2-4x-5 = (x+1)(x-5)$. (On peut faire une esquisse de cette fonction rapidement car on connait ses deux zéros grâce à la forme factorisée et on connait l'orientation de la parabole par le coefficient de x^2 est positif.



Ce graphe permet de déterminer que $x^2-4x-5 \geq 0$ si

$$x \in]-\infty,-1] \cup]5,\infty[.$$

Domaine de fonctions plus complexes

On détermine le domaine d'une fonction définie par composition de plusieurs fonction élémentaires en vérifiant que chacune des opérations utilisée est définie.

Exemple 1.24. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x-1}}$. Le domaine de f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ où $f(x)$ est défini. Comme il y a une racine carrée dans la définition de f, on a que

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} \text{ def} &\iff x-1 \geq 0 \\ &\iff x \geq 1 \end{aligned}$$

On a donc que pour que $f(x)$ soit défini, il faut que $x \geq 1$.

Il y a une seconde opération problématique, la division.

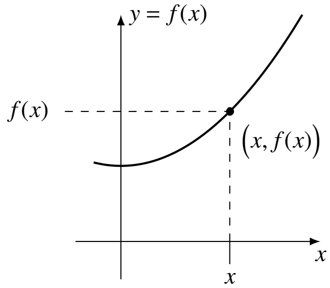
$$\begin{aligned} \frac{3x}{\sqrt{x-1}} \text{ est défini } &\iff \sqrt{x-1} \neq 0 \\ &\iff x-1 \neq 0 \\ &\iff x \neq 1 \end{aligned}$$

La fonction est donc définie quand $x \geq 1$ et $x \neq 1$. En combinant ces deux condition, on a donc

$$\text{dom}(f) =]1, \infty[.$$

Graphe d'une relation ou d'une fonction

Le graphe d'une fonction f est l'ensemble des « points » $(x, f(x))$. Dans le cas des fonctions réelles, ces points peuvent être placés dans le plan cartésien pour obtenir une représentation graphique de f. Par exemple, si $f(x) = x^2 + 1$, on obtient



On peut déterminer les coordonnées exacte d'un point du graphe d'une fonction en évaluant la fonction. Par exemple, si $f(x) = x^2 + 1$, le point

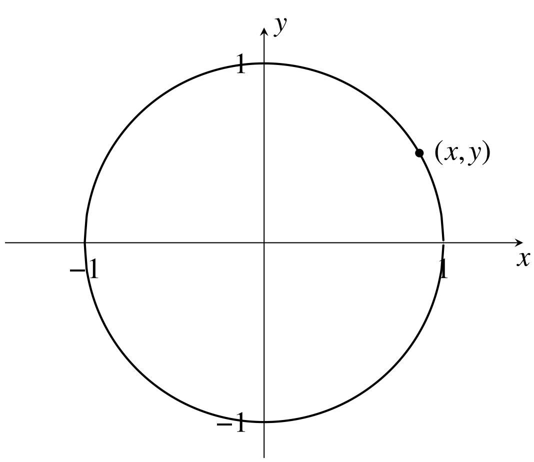
$$(1, f(1)) = (1, 2)$$

fait partie du graphe de la fonction.

On peut aussi faire le graphe d'une relation qui n'est pas nécessairement une fonction. Dans ce cas, le graphe est l'ensemble de tous les points satisfaisant la relation donnée. Par exemple, la relation

$$x^2 + y^2 = 1$$

est constituée de tous les points sur le cercle unité :



On peut trouver un point sur le graphe d'une relation en donnant une valeur à une variable et en isolant pour trouver la valeur de l'autre variable.

Exemple 1.25. Trouvons un point sur le graphe de la relation

$$2x^2 + 3y^2 = 1.$$

Si on prend $x = 0$, on obtient

$$2(0)^2 + 3y^2 = 1.$$

En simplifiant

$$3y^2 = 1.$$

On isole y :

$$y^2 = \frac{1}{3}.$$

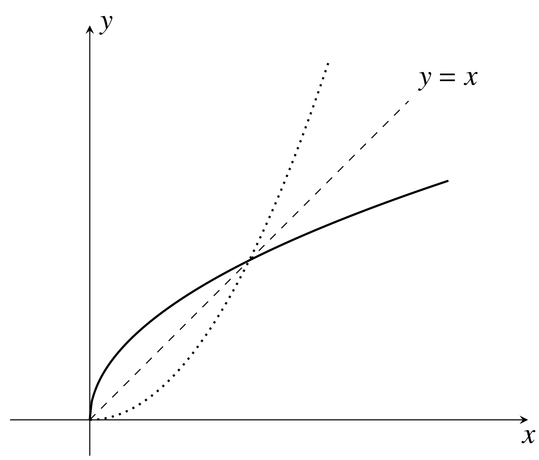
$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Il y a donc deux points correspondant à $x = 0$ sur le graphe de la relation donnée :

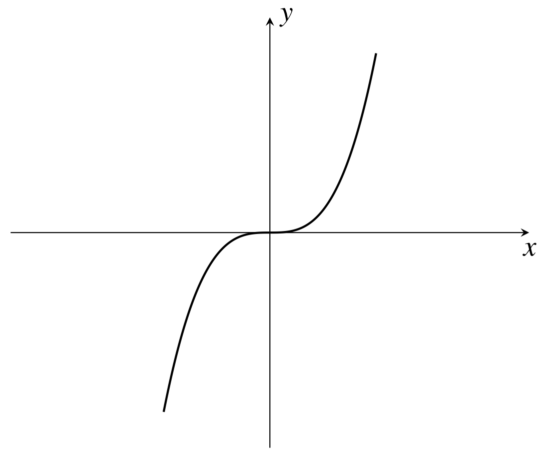
$$\left(0, 1/\sqrt{3}\right) \text{ et } \left(0, -1/\sqrt{3}\right).$$

Graphe d'une fonction réciproque

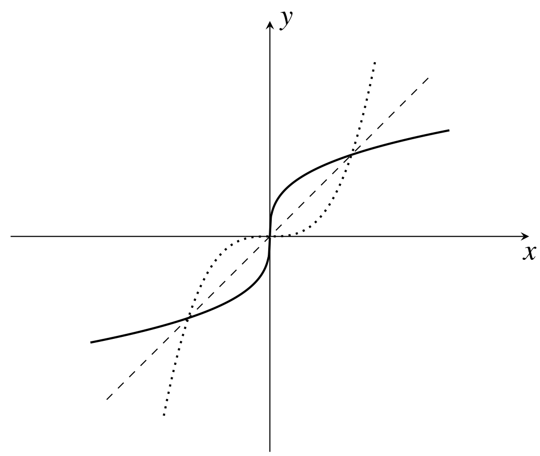
Si f^{-1} est la fonction inverse de f, sont graphe est le résultat de la symétrie par rapport à la droite $y = x$ dans le plan cartésien.



Exemple 1.26. Le graphe de la fonction $f(x) = x^3$ est



La fonction inverse de $f(x) = x^3$ est $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$. On trouve le graphe de f^{-1} par symétrie par rapport à la droite $y = x$.



Chapitre 2

Taux de variation, différentielles et dérivées

2.1 Taux de variation moyen

Définition 2.1. Soit f une fonction réelle. Si x varie de a à b, on note par Δx la **variation en** x :

$$\Delta x = b - a$$

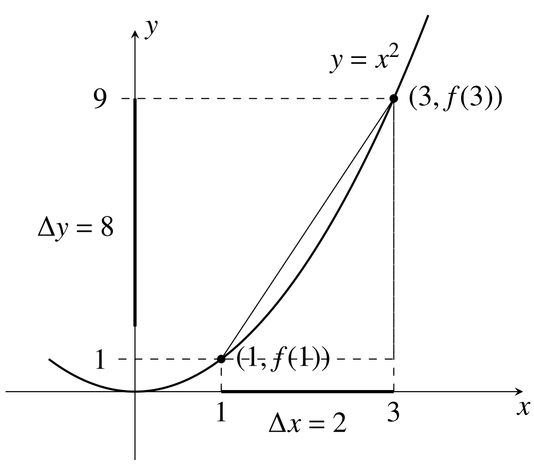
La **variation en** y correspondant à cette variation en x sur l'intervalle $[a, b]$ est définie par

$$\Delta y = f(b) - f(a).$$

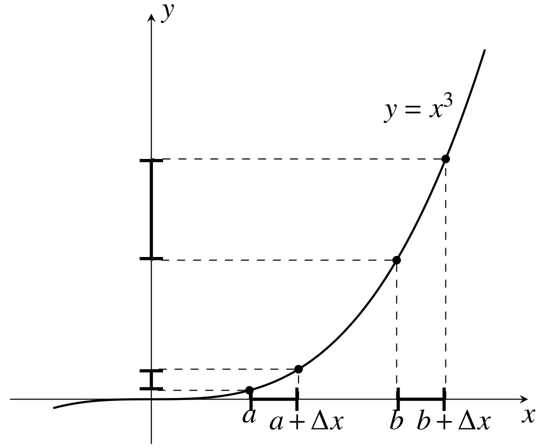
Si on connait a et Δx plutôt que a et b, comme $\Delta x = b - a$ est équivalant à $b = a + \Delta x$, on peut aussi calculer la variation en y comme ceci :

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Exemple 2.1. Si $y = x^2$, alors

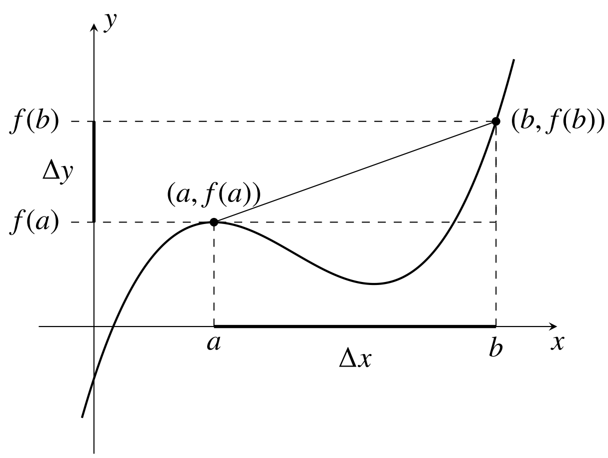


Il faut garder en tête que pour une variation en x Δx fixée, Δy dépend de la valeur choisie pour $x = a$. Dans le graphe suivant, Δx est le même pour l'intervalle commençant à a que pour celui commencent à b. On voit cependant que le Δy correspondant à chacun est différent.



Définition 2.2. Le taux de variation moyen de $y = f(x)$ pour x allant de $x = a$ jusqu'à $b = a + \Delta x$ est défini par

$$\mathrm{TVM}_{[a,a+\Delta x]} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$



Définition 2.3. Le **taux de variation moyen** (TVM) d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ est défini par

$$\mathrm{TVM}_{[a,b]}(f) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Le TVM est le changement moyen de la valeur de la fonction f quand son argument passe de a à b (ou de a à $a + \Delta x$).

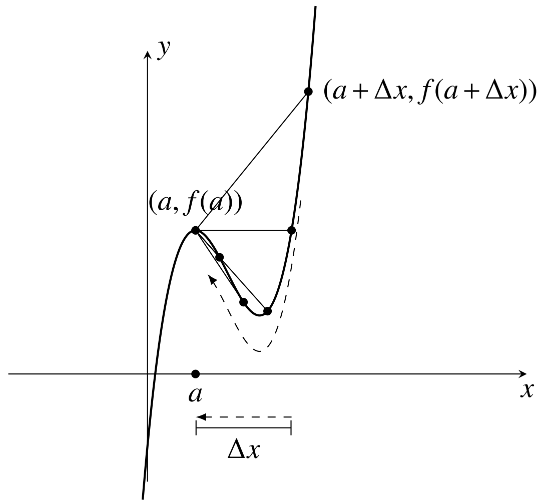
Dans le cas où la fonction donne une distance parcourue en fonction du temps (que nous dénoterons par $x(t)$), alors le TVM est la **vitesse moyenne** sur le parcours entre $t = a$ et $t = b$.

$$\text{La vitesse moyenne entre } t = a \text{ et } t = b \text{ est } \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

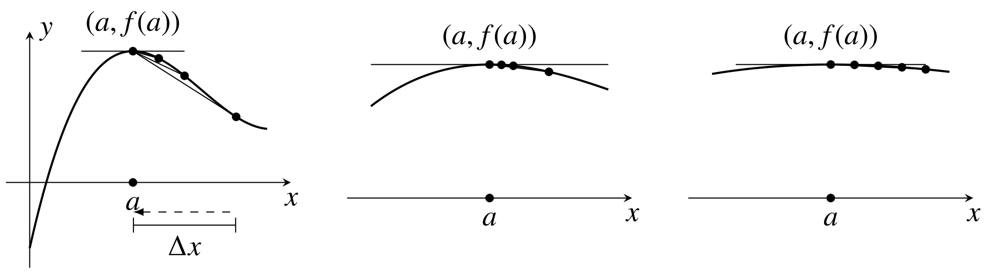
2.2 Taux de variation instantané

Le **taux de variation instantané** (TVI) de la fonction f en $x = a$ est le taux de variation obtenu à partir du taux de variation moyen quand Δx devient très petit (ont dit que Δx est « **infinitésimal**. »). Le taux de variation instantané représente le taux de changement de la fonction f à un point donné.

$$\text{TVI}_a(f) = \frac{dy}{dx} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \text{où } \Delta x \text{ très petit}$$



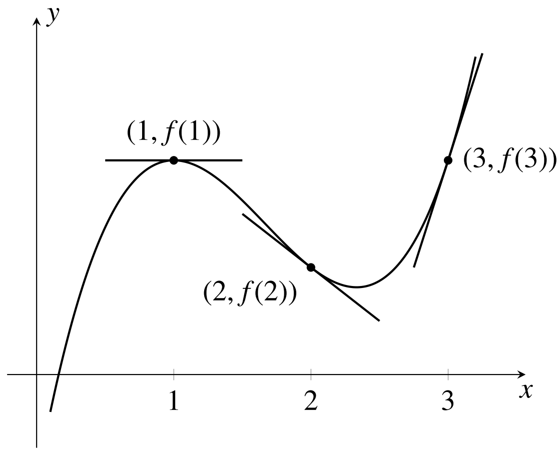
Quand Δx devient de plus en plus petit, le point $(a+\Delta x, f(a+\Delta x)$ se rapproche du point $(a, f(a))$. Les sécantes passant par ces deux points sont de plus en plus similaire à la tangente au graphe au point $(a, f(a))$.



Ultimement (c'est à dire quand Δx devient « infiniment petit »), les segments sécants et la courbe elle même se confondent.

> **Définition 2.4.** Le taux de variation instantané de la fonction $y = f(x)$ en $x = a$ est la pente de la tangente au point $(a, f(a))$ au graphe de $f(x)$ (si cette tangente existe).
>
> Si $y = f(x)$, on note le taux de variation instantané en $x = a$ par
>
> $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \text{ ou } \text{TVI}_a(f)$$

Le taux de variation instantané varie d'un point à l'autre du graphe d'une fonction, comme on peut le voir dans le graphe suivant où la pente de la tangente n'est pas la même en $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$.



On peut aussi remarquer dans ce dernier exemple que la pente de la tangente est liée à la croissance de la fonction : elle est positive là où la fonction est croissante (en $x = 3$), négative là où la fonction est décroissante (en $x = 2$). Elle est nulle (tangente horizontale) quand il y a un maximum (ou un minimum), comme en $x = 1$.

Une interprétation physique permet de se faire une intuition de la signification de $\frac{dy}{dx}$: la vitesse. La vitesse moyenne dans un parcours est le rapport de la distance parcourue Δx sur le temps de parcours Δt. La vitesse instantanée est la vitesse à un instant donnée (celle des indicateurs de vitesse dans les voitures !). La vitesse instantanée est le rapport de la distance parcourue parcourue dx pendant un temps infinitésimal dt.

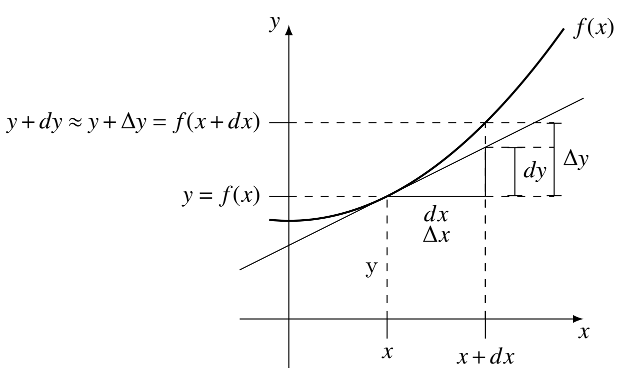
$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \qquad \text{Vitesse instantanée} = \frac{dx}{dt}$$

2.3 Différentielles

On vient de définir le taux de variation instantané en $x = a$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

comme étant la pente de la tangente au point $(a, f(a))$. Voyons comment on peut calculer ce taux pour une fonction $y = f(x)$.



Quand Δx est très petit, on peut approximer l'accroissement Δy sur le graphe de la fonction par l'accroissement dy sur la droite tangente. Comme la pente de la tangente est $\frac{dy}{dx}$, si Δx est très petit on a que

$$\Delta y \approx dy,$$

c'est à dire que

$$dy \approx f(x+\Delta x) - f(x).$$

Proposition 2.1. Si y est une fonction de x, $y = f(x)$, alors la différentielle en y est

$$dy \approx f(x+dx) - f(x)$$

quand dx est très petit.

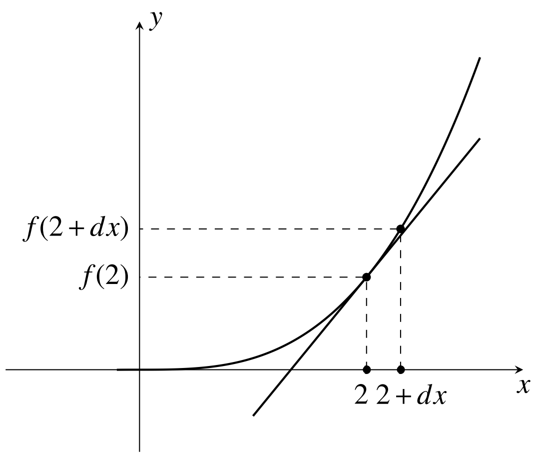
Définition 2.5. Le **taux de variation instantané** de la fonction $y = f(x)$ en $x = a$ est

$$\mathrm{TVI}_a(f) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(a+dx) - f(a)}{dx}$$

Exemple 2.2. Calculons la pente de la tangente à la fonction définie par

$$y = f(x) = x^3$$

en $x = 2$.



$$\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} & \frac{f(2+dx) - f(2)}{dx} \\
&= \frac{(2+dx)^3 - (2)^3}{dx} \\
&= \frac{\left(2^3 + (3)2^2dx + (3)(2)dx^2 + dx^3\right) - 2^3}{dx} \\
&= \frac{12\,dx + 6\,dx^2 + dx^3}{dx} \\
&= \frac{dx\left(12 + 6\,dx + dx^2\right)}{dx} \\
&= 12 + 6\,dx + dx^2 \\
&\approx 12 \qquad \text{(quand } dx \text{ très petit).}
\end{aligned}$$

La pente de la tangente au graphe de la fonction $y = x^3$ en $x = 2$ est 12.

De manière générale, pour calculer la pente de la tangente à partir de la définition du taux de variation moyen $\frac{dy}{dx}$, nous devons

1. Écrire la définition de $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ et évaluer correctement dy, donc $f(a+dx)-f(a)$. Faire une esquisse peut aider à se souvenir de la définition !
2. manipuler algébriquement le numérateur pour y factoriser dx ; trois trucs selon l'expression :

   Polynômes : développer et factoriser ;

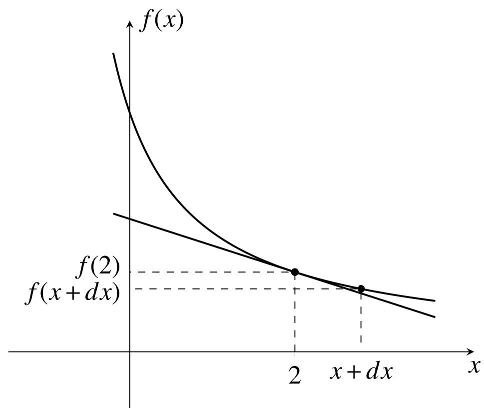
   Fractions : mettre au dénominateur commun ;

   Racines : conjugué.
3. simplifier le dx mis en évidence au numérateur avec le dx du dénominateur ;
4. négliger toutes les occurrences de dx restantes dans l'expression obtenue après la dernière simplification.

Exemple 2.3. Calculons la pente de la tangente à la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

en $x = 2$ et donnons l'équation de la droite tangente en $x = 2$.



$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(2+dx)-f(2)}{dx} \\
&= \frac{\frac{1}{(2+dx)+1}-\frac{1}{2+1}}{dx} \\
&= \frac{\frac{1}{3+dx}-\frac{1}{3}}{dx} \\
&= \frac{\frac{3}{3(3+dx)}-\frac{3+dx}{3(3+dx)}}{dx} \\
&= \frac{\frac{3-(3+dx)}{3(3+dx)}}{dx} \\
&= \frac{\frac{-dx}{3(3+dx)}}{dx} \\
&= \frac{-dx}{3(3+dx)dx} \\
&= \frac{-1}{3(3+dx)} \\
&\approx -\frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

La droite tangente en $x=2$ est donc de pente $-\frac{1}{9}$. Son équation est de la forme

$$y=-\frac{x}{9}+b.$$

Pour déterminer b on prend un point sur la droite. On sait que la droite est tangente au point $\big(2,f(2)\big)$, c'est à dire au point $(2,\frac{1}{3})$. On doit donc avoir

$$\frac{1}{3}=-\frac{2}{9}+b.$$

En isolant, on trouve que

$$b=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}.$$

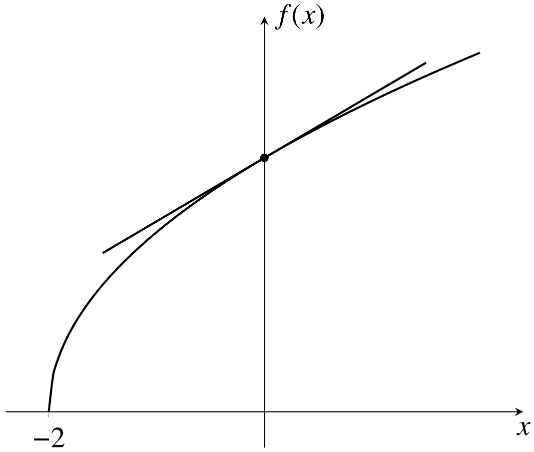
L'équation de la tangente est donc

$$y=-\frac{x}{9}+\frac{5}{9}.$$

Exemple 2.4. Calculons la pente de la tangente à la fonction définie par

$$f(x)=\sqrt{x+2}$$

en $x=0$ et donnons l'équation de la droite tangente en $x=0$.



$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(0+dx)-f(0)}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{(0+dx)+2}-\sqrt{0+2}}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{dx+2}-\sqrt{2}}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{dx+2}-\sqrt{2}}{dx}\,\frac{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{(dx+2)-2}{dx}\,\frac{1}{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{dx}{dx}\,\frac{1}{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}} \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

La droite tangente en $x = 0$ est donc de pente $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Son équation est de la forme

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}} + b.$$

Pour déterminer b on prend un point sur la droite. On sait que la droite est tangente au point $(0, f(0)$, c'est à dire au point $(0, \sqrt{2})$. On doit donc avoir

$$\sqrt{2} = 0 + b.$$

En isolant, on trouve que

$$b = \sqrt{2}.$$

L'équation de la tangente est donc

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2}.$$

2.4 Différentielles et approximation

Supposons que l'on a une fonction $y = f(x)$. On a vu que l'on peut approximer les valeurs de la fonction à l'aide des différentielles pour des valeurs proches d'une valeur donnée en approximant la fonction par la droite tangente.

On peut se servir de cette approximation pour simplifier certains calculs. L'idée générale est d'utiliser

$$dy = f(x+dx) - f(x)$$

et le fait que

$$dy = \frac{dy}{dx}dx.$$

Par exemple, si $y = \sqrt{x}$, on peut vérifier que

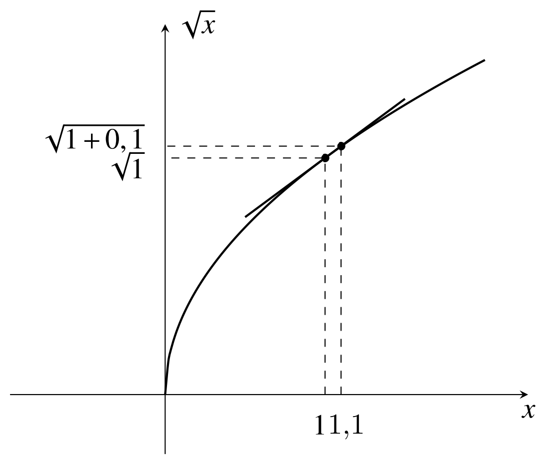
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

Comme

$$dy = f(x+dx) - f(x)$$

et $dy = \frac{dy}{dx}dx$, on a que

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{dy}{dx}dx.$$



Si on veut calculer $\sqrt{1,1}$, on décompose $1,1$ en $1+0,1$ et on pose $x = 1$ et $dx = 0,1$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+dx} &\approx \sqrt{x} + \frac{dy}{dx}dx \\
\sqrt{1,1} &\approx \sqrt{1} + \frac{1}{2}(0,1) \\
\sqrt{1,1} &\approx 1 + \frac{0,1}{2} \\
\sqrt{1,1} &\approx 1 + 0,05 \\
\sqrt{1,1} &\approx 1,05.
\end{aligned}$$

La valeur trouvée est à moins d'un centième de la valeur

$$\sqrt{1,1} = 1.048808\ldots$$

Cette approximation n'est pas exacte, mais peut donner des valeurs avec une précision satisfaisante sans exiger de calculs complexes : il suffit d'utiliser la formule

$$\sqrt{1+dx} \approx 1 + \frac{dx}{2}$$

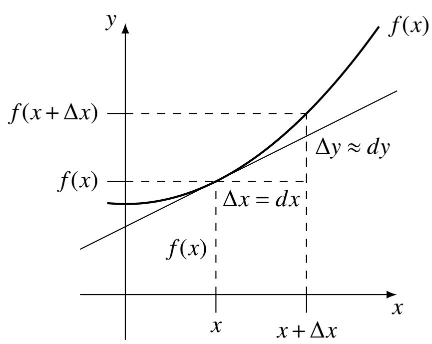
qui est une bonne approximation tant que dx est petit, donc pour des valeurs $x+dx$ proches de 1.

2.5 Dérivée

Comme la pente de la tangente au graphe d'une fonction f donne beaucoup d'information sur le comportement de la fonction et qu'elle varie d'un point à l'autre, il est utile de la considérer comme une nouvelle fonction *dérivée* de la fonction initiale. Cette fonction dérivée associe à chaque valeur de x dans le domaine de f la pente de la tangente au graphe de f au point $\big(x, f(x)\big)$.

Définition 2.6. La **fonction dérivée** f' d'une fonction $y = f(x)$ est définie par

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \mathrm{TVI}_x(f).$$



On détermine la fonction dérivée de la même manière que la dérivée en un point, mais en laissant la coordonnée en x indéterminée.

Exemple 2.5. Si $f(x) = x^3$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \\
&= \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx} \\
&= \frac{(x^3+3x^2dx+3xdx^2+dx^3)-x^3}{dx} \\
&= \frac{3x^2dx+3xdx^2+dx^3}{dx} \\
&= \frac{(3x^2+3xdx+dx^2)dx}{dx} \\
&= 3x^2+3xdx+dx^2 \\
&\approx 3x^2
\end{aligned}$$

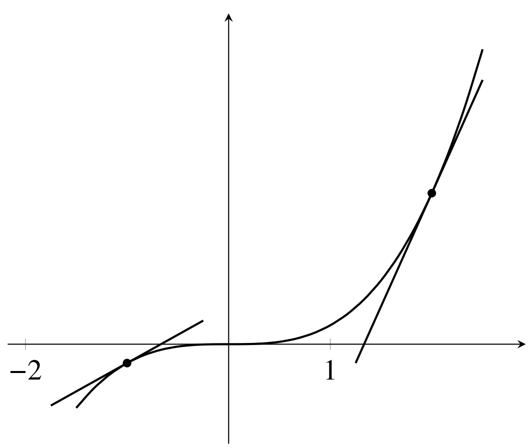
On a donc que la dérivée est $f'(x) = 3x^2$.

À l'aide de la fonction dérivée, on peut par exemple déterminer la pente de la tangente à f en un point quelconque $(x, f(x))$ du graphe de f en évaluant $f'(x)$. Par exemple, si $x = 2$, la pente de la tangente est

$$f'(2) = 3(2)^2 = 24.$$

Si $x = -1$, la pente de la tangente est

$$f'(-1) = 3(-1)^2 = 3.$$



On peut aussi chercher les valeurs de x où la pente a une valeur spécifique. Par exemple, sachant que $y' = 3x^2$ quand $y = x^3$, on peut trouver où la tangente est horizontale en posant que la dérivée (qui est la pente de la tangent) est nulle. Dans le dernier exemple, cela est le cas quand

$$y' = 0 \iff 3x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Exemple 2.6. Si $f(x) = \sqrt{x+1}$, la dérivée y' est

$$\begin{aligned}
f'(x) &\overset{\text{def}}{=} \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{(x+dx)x+1}-\sqrt{x+1}}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{x+dx+1}-\sqrt{x+1}}{dx}\cdot\frac{\sqrt{x+dx+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+dx+1}-\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{(x+dx+1)-(x+1)}{dx}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+dx+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{dx}{dx}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+dx+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+dx+1}+\sqrt{x+1}} \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}
\end{aligned}$$

La dérivée de $\sqrt{x+1}$ est donc $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

La fonction dérivée f' est la fonction qui associe à chaque valeur de x le taux de variation instantané de f en x, soit la pente de la tangente en $\big(x, f(x)\big)$:

$$f'(x) = \mathrm{TVI}_x(f) = \frac{dy}{dx}$$

Les notations $f'(x)$, $\mathrm{TVI}_x(f)$ et $\frac{dy}{dx}$ sont donc interchangeables. Cependant, la première met l'accent sur le fait que la nouvelle fonction f' est déterminée à partir de la fonction originale f. Cette fonction est le plus souvent appelée simplement *la dérivée de* f.

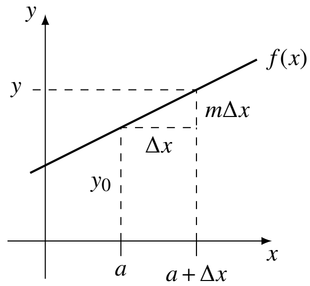
L'opération « ' » (dérivée) est en fait elle même une sorte de fonction, mais qui prend une fonction comme argument et qui donne une nouvelle fonction :

$$\text{dérivée}: \text{fonctions réelles} \to \text{fonctions réelles.}$$

La dérivée est une « fonction de fonction ».

2.6 Droite tangente et approximation d'une fonction

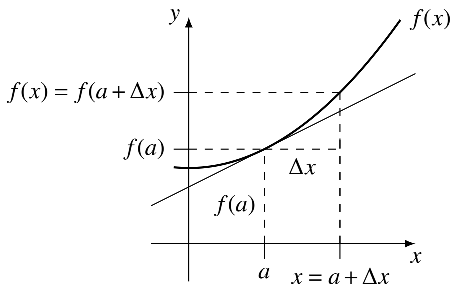
Si une droite est de pente m, une augmentation de Δx de la valeur de x augmentera la valeur de y de $m\Delta x$.



On a donc que $y = y_0 + m\Delta x$. Si $x = a + \Delta x$, on a que $\Delta x = x - a$ et donc

$$y = f(a) + m(x - a).$$

On peut se servir de cette relation pour obtenir une approximation linéaire de d'une fonction générale à l'aide de l'équation de la droite tangente.



Dans ce dernier graphique, la pente de la tangente au point $\big(a, f(a)\big)$ est, par définition, la valeur $f'(a)$, soit la dérivée évaluée en $x = a$. En remplacent les paramètres de la relation $y = f(a) + m(x - a)$ par ceux de la droite tangente du dernier graphique, l'équation de la droite tangente en $(x, f(x))$ (où y est fonction de Δx) est

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Ainsi, si on considère que y sur la droite tangente est une bonne approximation de y sur le graphe de la fonction f, on peut faire l'approximation suivante de $f(x)$

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x.$$

Exemple 2.7. On a vu précédemment que la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ est $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Cela nous donne les approximations suivantes par des droites, respectivement valables pour des valeurs de x près de 1 et 4.

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x - 1) = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(x - 1) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$$

$$f(x) \approx f(4) + f'(4)(x - 4) = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(x - 1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

2.7 Notations

La dérivée est un concept très important en mathématiques. Les concepts importants ont souvent été étudiés par plusieurs mathématiciens et parfois plusieurs notations sont inventées et utilisées au fil du temps.

Si $y = f(x) = x^2$, toutes ces notations désignent la même chose :

$$f'(x) = \mathrm{TVI}_x(f) = \frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = (x^2)'.$$

Notation différentielle avec $y = f(x) = x^2$:

$$dy = y'\,dx = f'(x)\,dx = 2x\,dx.$$

La dérivée a été étudiée de manière détaillée pour la première fois par Newton et Leibniz, de manière indépendante et simultanée. Nous utilisons encore aujourd'hui les notations différentes inventées et utilisées par Newton ($\dot{y}$) et Leibniz ($\frac{dy}{dx}$), mais aussi celles introduites plus tard par d'autres mathématiciens ayant développé la théorie des dérivées, notamment celle d'Euler ($f'(x)$).

Voici les différentes notations pour la dérivée de $y = f(x) = x^2$.

Notations pour la dérivée					
$f'(x)$	y'	$\left(x^2\right)'$	$\dfrac{dy}{dx}$	$\dfrac{df(x)}{dx}$	$\dfrac{dx^2}{dx}$
$f'(a)$	$y'\vert_{x=a}$	$\left(x^2\right)'\Big\vert_{x=a}$	$\dfrac{dy}{dx}\Big\vert_{x=a}$	$\dfrac{df(x)}{dx}\Big\vert_{x=a}$	$\dfrac{dx^2}{dx}\Big\vert_{x=a}$

La notation « $\dfrac{dy}{dx}$ » est celle introduite par Leibniz. Les notations de Newton ne sont plus aussi utilisées que celles de Leibniz. Newton écrivait $\dot{x}$ là où Leibniz écrivait $\frac{dx}{dy}$.

On peut penser à la notation $\dfrac{dy}{dx}$ comme une forme de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ avec Δx « infiniment petit ».

La notation « barre » veut dire « évalué en $x = \dots$ ». Elle peut s'utiliser dans différents contextes autre que celui du calcul de dérivées. Par exemple, on peut écrire

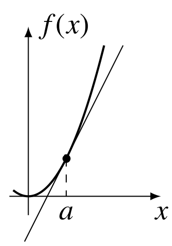
$$x^2\Big|_{x=3} = 9.$$

Cette notation est utilisée dans plusieurs contextes en calcul différentiel et intégral. Dans ce cours, elle servira le plus souvent à évaluer la dérivée en un point, comme dans la seconde ligne du tableau précédant.

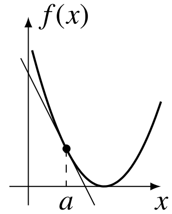
2.8 Graphique des fonctions dérivées

On peut faire le lien entre le graphe d'une fonction f et celui de sa dérivée f' à l'aide des observations suivantes, que nous motivons géométriquement pour le moment ; nous verront plus loin des résultats précisant ces liens.

- Si $f'(a) > 0$, alors f est croissante en $x = a$.

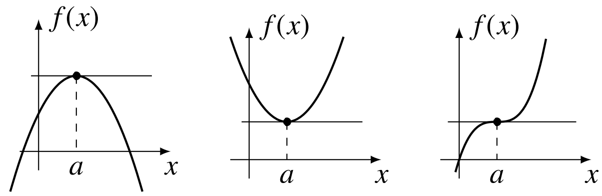


- Si $f'(a) < 0$, alors f est décroissante en $x = a$.



- Si $f'(a) = 0$, alors le graphe de $f(x)$ a un point où la tangente est horizontale (de pente zéro) : un minimum, un maximum ou un point « stationnaire ».

Maximum Minimum Stationnaire



À un sommet (minimum ou maximum) du graphe d'une fonction, la dérivée s'annule car la tangente est horizontale (donc de pente 0). On peut donc trouver les sommets d'une fonction en cherchant les valeurs a où

$$f'(a) = 0.$$

Exemple 2.8. Trouvons le sommet de la parabole d'équation $y = x^2 + 3x - 5$.

À l'aide des techniques vu précédemment, on détermine la fonction dérivée à y. Si $y = f(x) = x^2 + 3x - 5$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\
&= \frac{\left((x+dx)^2 + 3(x+dx) - 5\right) - (x^2 + 3x - 5)}{dx} \\
&= \frac{\left(x^2 + 2xdx + dx^2 + 3x + 3dx - 5\right) - (x^2 + 3x - 5)}{dx} \\
&= \frac{5xdx + dx^2 + 3dx}{dx} \\
&= \frac{(5x + dx + 3)dx}{dx} \\
&= 5x + dx + 3 \\
&\approx 5x + 3 \qquad \text{si } dx \text{ infinitésimal}
\end{aligned}$$

La pente de la tangente au graphe de y en x est $5x+3$. Cette pente est nulle quand $5x+3 = 0$, c'est-à-dire quand $x = -3/5$. La valeur de y en ce point est

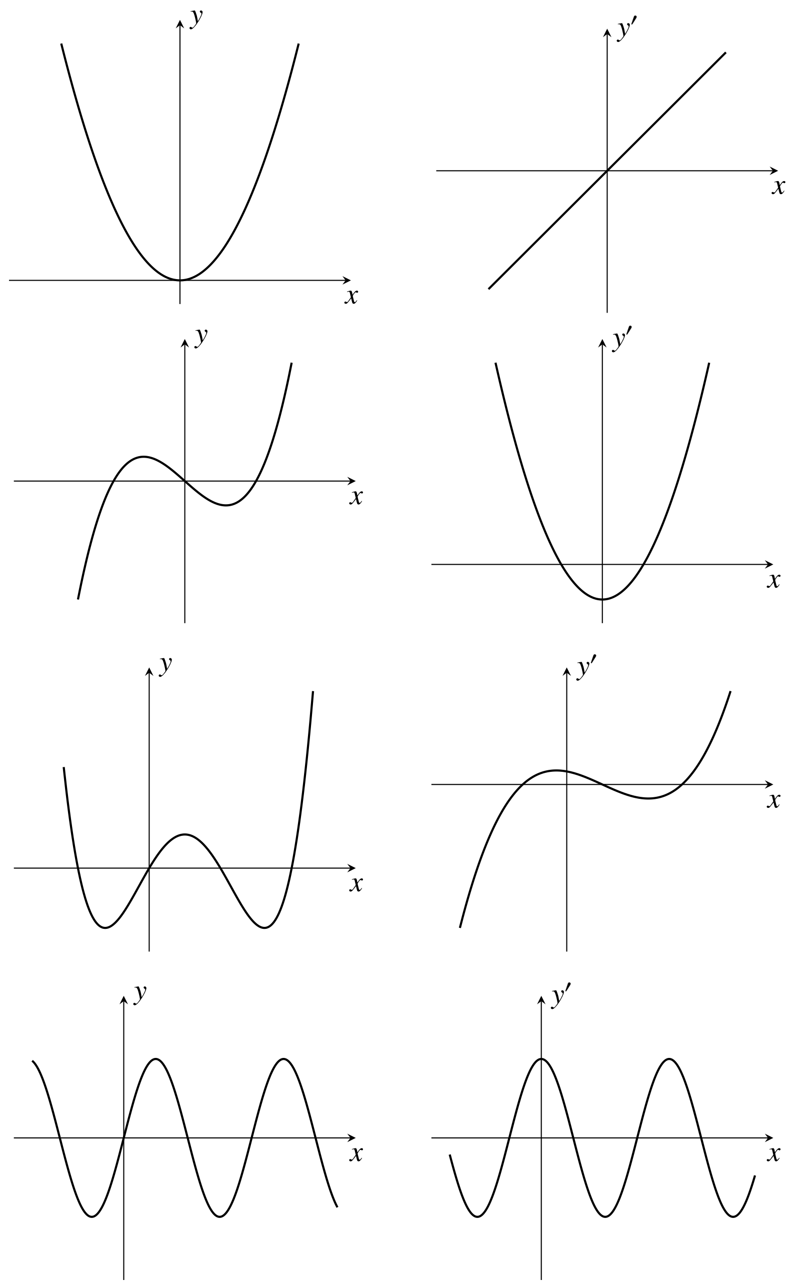
$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{5}\right) - 5 = \frac{-71}{25}$$

Le sommet de la parabole est donc au point $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{71}{25}\right)$.

Il est possible de trouver le sommet d'une parabole à l'aide de la *complétion de carré* vu dans les cours du secondaire. La technique décrire ici a cependant l'avantage de pouvoir être appliquée à n'importe quelle fonction pour laquelle on peut déterminer la fonction dérivée, alors que la complétion de carré n'est possible que pour une fonction définie à l'aide d'un polynôme de degré 2. De plus, nous verrons dans la suite comment déterminer facilement la fonction dérivée, ce qui rend cette méthode beaucoup plus simple.

2.9 Exemples de fonctions avec leurs dérivées

Les exemples suivants illustrent le lien entre le graphe d'une fonction (à gauche) et celui de sa dérivée (à droite). Pour apprécier ce lien, commencez par repérer les zéros des dérivées et identifiez les maximums ou minimums correspondants dans la fonction. Ensuite, liez le signe de la dérivée et la croissance (ou décroissance!) de la fonction.



Chapitre 3

Propriétés de la dérivée

Le calcul de la fonction dérivée à l'aide de la définition donnée au chapitre précédent est laborieuse, même pour des fonctions définies par des expressions algébriques simples. Heureusement, il est possible « d'algébriser » le calcul de la dérivée, c'est-à-dire d'identifier des propriétés qui permettent de calculer directement à partir de définition algébrique de la fonction à dériver et sans utiliser la définition. On démontrera dans ce chapitre un certain nombre de propriétés de la dérivée qui, prise ensemble, permettent de déterminer la dérivée d'une fonction en appliquant des « formules de dérivation » (ou « règles de dérivation »).

Ces propriétés ont été découvertes au fil du temps par plusieurs mathématiciens qui travaillaient sur différents problèmes allant du calcul d'aires délimitées par des courbes algébriques à la détermination de minimums et maximums liés à des problèmes de géométrie. C'est à Newton et Leibniz que l'on doit d'avoir su les présenter de manière systématique pour la première fois et d'avoir établit le lien entre le calcul d'aire et la dérivée.

Dans ce qui suit, nous chercherons à établir un certain nombre de propriétés algébriques de la dérivée qui peuvent servir à la détermination des fonctions dérivées sans utiliser la définition donnée au dernier chapitre, mais plutôt en la calculant directement à partir de l'expression algébrique définissant la fonction à dériver.

3.1 Preuves graphiques

Pour simplifier, nous utiliserons parfois des preuves graphiques comme démonstration de certaines propriétés de la dérivée. Pour donner un avant-goût de ce genre d'argument, voici une preuve algébrique et une preuve graphique du fait que la dérivée de la fonction $y = x^2$ est $y' = 2x$.

Proposition 3.1.

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x.$$

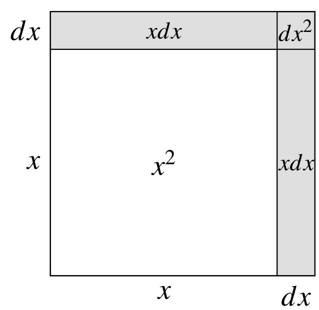
preuve algébrique.

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(x^2\right)}{dx} &= \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} \\
&= \frac{(x^2 + 2xdx + dx^2) - x^2}{dx} \\
&= \frac{2xdx + dx^2}{dx} \\
&= \frac{dx(2x+dx)}{dx} \\
&= 2x + dx \\
&\approx 2x \qquad \text{car } dx^2 \text{ très petit quand } dx \text{ est petit}
\end{aligned}$$

□

On peut généralement obtenir géométriquement l'expression de dy à partir de relations géométriques. Cette manière de faire est fréquente en physique. Elle permet aussi de mieux comprendre pourquoi certaines quantités peuvent être négligées.

preuve géométrique. La différentielle dy est l'aire de la région en gris dans le graphique suivant : c'est l'écart entre un carré de côté x et un carré de côté $x + dx$. Quand dx est très petit, l'aide du petit carré dx^2 est négligée.



On peut voir dans ce graphique que

$$dy = xdx + xdx + dx^2 \approx 2x\,dx.$$

Ainsi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x\,dx}{dx} = 2x.$$

□

Proposition 3.2. La dérivée de la fonction racine carrée est

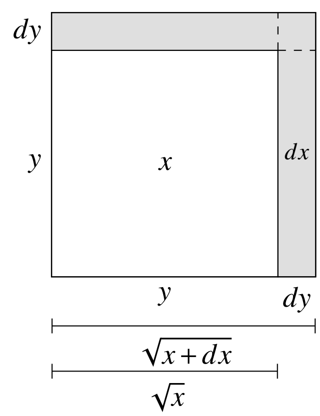
$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{dx} &= \frac{\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}}{dx}\,\frac{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{(x+dx)-x}{dx(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}} \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

car $\sqrt{x+dx} \approx \sqrt{x}$ si dx très petit.

Preuve graphique. si x est l'aire d'un carré, alors le côté est $y = \sqrt{x}$. Si l'aire du carré change de x à $x+dx$ (donc varie de la partie en gris dx), alors la variation approximative dy du côté du carré est approximativement $dy = \sqrt{x+dx} - \sqrt{x}$.



D'après la figure, l'aire dx (en gris) peut s'écrire comme

$$dx = ydy + ydy + dy^2.$$

Si on néglige dy^2 qui est très petit par rapport à dy, on trouve

$$dx = 2ydy,$$

donc, en isolant,

$$dy = \frac{1}{2y}dx.$$

Enfin, comme $y = \sqrt{x}$, on doit avoir que

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx. \qquad \square$$

Proposition 3.3. Si $y = \frac{1}{x}$, alors

$$dy = -\frac{1}{x^2}dx.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x}}{dx} \\
&= \frac{\frac{x-(x+dx)}{x(x+dx)}}{dx} \\
&= \frac{\frac{-1}{x^2+xdx}dx}{dx} \\
&= \frac{-1}{x^2+xdx} \\
&\approx \frac{-1}{x^2} \qquad \text{car } x^2 + x\,dx \approx x^2.
\end{aligned}$$

□

3.2 Linéarité et dérivée de puissances

Pour alléger, à partir de ce point nous utiliserons souvent la notation « $(y)'$ » pour désigner la dérivée de y. Par exemple, on écrit directement

$$\left(x^2\right)' = 2x$$

plutôt que

$$y = x^2 \qquad \frac{dy}{dx} = 2x.$$

Comme une fonction constante a comme graphe une droite de pente 0, la tangente à cette droite en n'importe quel point est aussi une droite de pente nulle.

Proposition 3.4 (Dérivée d'une constante)**.** Si $y = C$, où C est une constante réelle quelconque, alors

$$\frac{d(C)}{dx} = 0$$

Exemple 3.1.

$$(2)' = 0 \qquad (-3)' = 0 \qquad (0)' = 0 \qquad (\pi)' = 0$$

Démonstration. Comme $y = f(x) = C$ peut importe la valeur de x, on a que

$$\begin{aligned}
\frac{d(C)}{dx} &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\
&= \frac{C-C}{dx} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

De manière similaire au cas où y est une fonction constante, la dérivée de $y = x$ coïncide avec l'intuition : $y = x$ est une droite de pente 1, donc toute tangente à cette droite doit être de pente 1.

Proposition 3.5. Si $y = x$, alors

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

Démonstration.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)-x}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1 \qquad \square$$

Proposition 3.6 (linéarité 1 – dérivée d'un multiple d'une fonction)**.** Si $y = Cu$, où $u = f(x)$ est une fonction de x, alors

$$\frac{d}{dx}\left(Cu\right) = C\frac{du}{dx}$$

Exemple 3.2.

$$\left(3x^5\right)' = 3\left(x^5\right)' \qquad \left(\frac{x^3}{5}\right)' = \frac{1}{5}\left(x^3\right)' \qquad \left(10\sin(x)\right)' = 10\left(\sin(x)\right)'.$$

Démonstration. Preuve algébrique directe : si $u = f(x)$, alors $du = f(x+dx) - f(x)$, donc, comme $f(x) = u$, on a que

$$u + du = f(x+dx)$$

et donc

$$C(u+du) = Cf(x+dx)$$

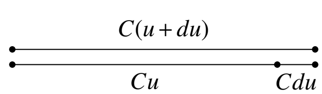
La différentielle $d(Cu)$ peut se calculer comme

$$d(Cu) = Cf(x+dx) - Cf(x) = C(u+du) - Cu.$$

On a donc que

$$\begin{aligned} \frac{d(Cu)}{dx} &= \frac{C(u+du)-Cu}{dx} \\ &= \frac{Cu+Cdu-Cu}{dx} \\ &= \frac{Cdu}{dx} \\ &= C\frac{du}{dx} \end{aligned}$$

Preuve graphique :



$\square$

Proposition 3.7 (Linéarité 2 : additivité)**.** Si u et v sont toutes deux des fonctions d'une même variable, alors

$$\frac{d\big(u+v\big)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

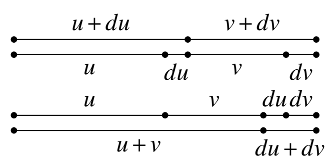
Démonstration.

$$\begin{aligned}\frac{d\big(u+v\big)}{dx} &= \frac{\big((u+du)+(v+dv)\big)-(u+v)}{dx}\\ &= \frac{du+dv}{dx}\\ &= \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

Ainsi, on a que

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Preuve graphique :



□

Note : les deux dernières propriétés considérées ensemble forment une propriété appelée *linéarité* de la dérivée. Les limites et plusieurs autres constructions mathématiques étudiées au collégial on cette propriété de « linéarité », qui est le sujet d'étude central du cours d'algèbre *linéaire*.

Exemple 3.3.

$$\big(-x^2+3x\big)' = \big(-x^2\big)' + \big(3x\big)' \qquad \big(x^2-3x\big)' = \big(x^2+(-3x)\big)' = \big(x^2\big)' + \big(-3x\big)'$$

Proposition 3.8 (Puissances)**.** Si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\frac{d\big(x^n\big)}{dx} = nx^{n-1}.$$

Exemple 3.4.

$$\big(x^3\big)' = 3x^2 \quad \big(x^{10}\big)' = 10x^9 \quad \big(x^{743}\big)' = 743x^{742} \quad (x^1)' = 1\cdot x^0 = 1 \quad (1)' = (x^0)' = 0\cdot x^{-1} = 0.$$

Démonstration. Pour cette preuve, nous utiliserons le triangle de Pascal pour développer $(x+dx)^n$. Ce développement débute ainsi :

$$(x+dx)^n = x^n + nx^{n-1}\,dx + (\text{ termes où } dx \text{ apparait avec un exposant} \geq 2).$$

Notons qu'on peut mettre dx en évidence d'une somme dont les termes tous un facteur dx^2. On trouve ainsi la dérive directement à partir de la définition :

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(x^n\right)}{dx} &= \frac{(x+dx)^n - x^n}{dx} \\
&= \frac{\left(x^n + nx^{n-1}\,dx + (\text{termes})\,dx^2\right) - x^n}{dx} \\
&= \frac{nx^{n-1}\,dx + (\text{termes})\,dx^2}{dx} \\
&= \frac{\left(nx^{n-1} + (\text{termes})\,dx\right)dx}{dx} \\
&= nx^{n-1} + (\text{termes}\,dx) \\
&\approx nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

Exemple 3.5. À l'aide des propriétés précédentes, on peut déterminer la dérivée d'une fonction polynômiale quelconque. Par exemple

$$\begin{aligned}
\left(3x^2 - 2x + 4\right)' &= (3x^2)' - (2x)' + (4)' \\
&= 3(x^2)' - 3(x)' + (4)' \\
&= 3(x^2)' - 3(x)' + (4)' \\
&= 3(2x^1) - 3(1) + (0) \\
&= 6x - 3
\end{aligned}$$

Par la suite, nous ne donnerons pas autant de détails pour la dérivée des polynômes. La plupart du temps, nous donnerons directement le résultat.

3.3 Dérivée d'un produit et d'un quotient

Proposition 3.9 (Dérivée d'un produit, formule de Leibniz)**.** Si u et v sont toutes deux des fonctions de x, alors sous forme différentielle

$$d\left(uv\right) = vdu + udv.$$

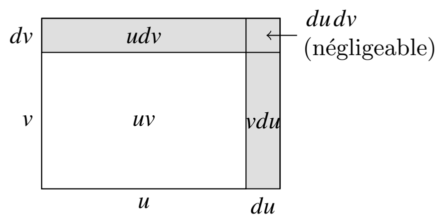
Le taux de variation instantané est donc

$$\frac{d\left(uv\right)}{dx} = \frac{vdu + udv}{dx}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{d\big(uv\big)}{dx} &= \frac{\big((u+du)(v+dv)\big)-(uv)}{dx}\\
&= \frac{\big(uv+vdu+udv+dudv\big)-uv}{dx}\\
&= \frac{vdu+udv+dudv}{dx}\\
&\approx \frac{vdu+udv}{dx} \qquad \text{car } dudv \text{ est très petit quand } du \text{ et } dv \text{ sont petits}\\
&= v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}
\end{aligned}$$

Preuve graphique :



La région en gris est $d(uv)$, la variation de uv quand u varie de du et v varie de dv. Selon le graphique, on a que

$$d(uv) = udv + vdu + dudv,$$

ce qui est approximativement

$$d(uv) \approx udv + vdu$$

car le produit $dudv$ est très petit par rapport à du et dv. □

Exemple 3.6. En utilisant la formule de Liebniz 3.9, on trouve que

$$\begin{aligned}
\big((x^4+1)(x^6+1)\big)' &= (x^4+1)'(x^6+1)+(x^4+1)(x^6+1)'\\
&= (4x^3)(x^6+1)+(x^4+1)(6x^5)\\
&= (4x^9+4x^3)+(6x^9+6x^5)\\
&= 10x^9+6x^5+4x^3
\end{aligned}$$

Proposition 3.10 (Dérivée d'un quotient)**.** Si u et v sont toutes deux des fonctions de x, alors, partout où $\frac{1}{v}$ est définie :

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu-udv}{v^2}.$$

Sous forme de taux de variation instantané

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

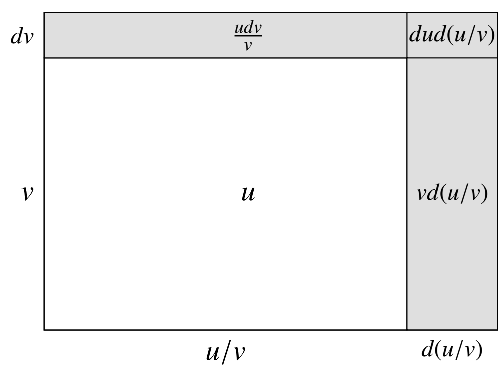
Démonstration. On utilise directement avec la définition $dy = f(x+dx) - f(x)$. La fonction à dériver est $f(x) = \frac{u}{v}$. Si x varie de dx, alors u et v varient respectivement de du et dv pour devenir $u + du$ et $v + dv$.

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{u+du}{v+dv} - \frac{u}{v} \\
&= \frac{v(u+du) - u(v+dv)}{v(v+dv)} \\
&= \frac{(vu + v\,du) - (uv + u\,dv)}{v^2 + vdv} \\
&= \frac{vu + v\,du - uv - u\,dv}{v^2 + vdv} \\
&= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2 + vdv} \\
&\approx \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}
\end{aligned}$$

On peut diviser par dx pour obtenir le résultat voulu :

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{vdu - udv}{v^2 dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Preuve graphique



$$du \approx \frac{udv}{v} + vd(u/v)$$

$$vd(u/v) = \frac{udv}{v} - du$$

$$d(u/v) = \frac{udv - vdu}{v^2}$$

On divise enfin par dx comme dans l'argument algébrique. □

Exemple 3.7. En utilisant la propriété 3.10 permettant de calculer la dérivée d'un quotient, on trouve que

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^4+1}{x^6++1}\right)' &= \frac{(x^4+1)'(x^6+1)-(x^4+1)(x^6+1)'}{(x^6+1)^2}\\ &= \frac{4x^3(x^6+1)-(x^4+1)(6x^5)}{(x^6+1)^2}\\ &= \frac{(4x^9+4x^3)-(6x^9+6x^5)}{(x^6+1)^2}\\ &= \frac{-2x^9+6x^5+4x^3}{(x^6+1)^2}\end{aligned}$$

Proposition 3.11 (Inverse d'une puissance)**.**

$$\frac{d(x^{-n})}{dx} = -nx^{-n-1}$$

Démonstration. On détermine $\left(x^{-n}\right)'$ de deux manière différentes en utilisent l'identité algébrique et à l'aide de la formule pour la dérivée d'un produit.

$$x^n x^{-n} = 1.$$

En calculant la dérivée de chaque membre de cette égalité, on trouve que

$$\left(x^n x^{-n}\right)' = (1)' = 0$$

parce que $(C)' = 0$ pour n'importe quelle constante.

On peut aussi utiliser la formule donnant la dérivée d'un produit :

$$\begin{aligned}\left(x^n x^{-n}\right)' &= x^{-n}\left(x^n\right)' + x^n\left(x^{-n}\right)'\\ &= x^{-n}\left(nx^{n-1}\right)dx + x^n\left(x^{-n}\right)'.\end{aligned}$$

Comme on calcule la différentielle d'une même expression de deux manières différentes, les deux résultats doivent être égaux. On doit donc avoir que

$$x^{-n}nx^{n-1}dx + x^n\left(x^{-n}\right)' = 0$$

On isole $d\left(x^{-n}\right)'$ dans cette dernière égalité :

$$\left(x^{-n}\right)' = -n\frac{x^{-n}x^{n-1}}{x^n}dx$$

On trouve enfin, en simplifiant l'expression obtenue :

$$\left(x^{-n}\right)' = -nx^{-n-1}dx,$$

ce qui est le résultat désiré. □

Démonstration. Preuve à l'aide de la formule de dérivation d'un quotient.

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx} &= \frac{(1)'x^n - (1)(x^n)'}{(x^n)^2} \\
&= \frac{(0)x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} \\
&= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} \\
&= -nx^{(n-1)-2n} \\
&= -nx^{-n-1}
\end{aligned}$$

□

Exemple 3.8.

$$\left(\frac{3}{x^5}\right)' = 3\left(x^{-5}\right)' = 3(-5)x^{-6} = -\frac{15}{x^6}$$

On peut remarquer que les formules trouvées dans les propositions 3.8, 3.11 et 3.2 sont toutes des cas particuliers d'un schéma plus général :

$$d\left(x^q\right) = rx^{q-1}$$

pour q un exposant rationnel quelconque.

Proposition 3.12. La formule

$$\frac{d\left(x^q\right)}{dx} = qx^{q-1}$$

est valable pour tout nombre rationnel q.

On verra plus loin que cette formule de dérivation est aussi valable pour n'importe quel exposant réel r.

3.3.1 Règle de chaine

Proposition 3.13. Si z est fonction de y fonction de x, alors le taux de variation total est le produit des taux de variations :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Démonstration.

$$\frac{dz}{\cancel{dy}}\frac{\cancel{dy}}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

□

Exemple 3.9. Soient $z = y^3$ et $y = \sqrt{x}$ deux fonctions. On aimerait connaitre le taux de variation de z par rapport à x. On utilise la règle de chaine. Noter que l'on veut le taux de variation en fonction de x. Il faut donc exprimer $\frac{dz}{dy}$ en fonction de

x en substituant $\sqrt{x}$ pour y.

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \\
&= (3y^2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= \left(3\left(\sqrt{x}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= (3x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= \frac{3x}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{3\sqrt{x}}{2}
\end{aligned}$$

La règle de chaine peut aussi s'écrire avec la notation $f(x)$. La dérivée d'une fonction composée $f(g(x))$ est

$$\Big(f(g(x))\Big) = f'\Big(g(x)\Big)g'(x).$$

Voyons pourquoi cette forme de la règle de chaine n'est qu'une reformulation de 3.13. Si on pose que $z = f(g(x))$ et que $y = g(x)$, on a que $z = f(y)$. En appliquant la règle de chaine, on a que

$$\Big(f(g(x))\Big)' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Comme $\frac{dy}{dx} = g'(x)$ et $\frac{dz}{dy} = f'(y)$, on doit avoir que

$$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(y)g'(x)$$

Enfin, on substitute $y = g(x)$, dans cette dernière égalité pour exprimer la dérivée uniquement en fonction de x :

$$\Big(f(g(x))\Big) = f'(g(x))g'(x).$$

Exemple 3.10. Soit la fonction définie par $z = (2x-3)^8$. On peut voit cette fonction comme la composée de la fonction $f(y) = y^8$ et $g(x) = 2x-3$. La dérivée de la composée de f et g est

$$\begin{aligned}\big(f(g(x))\big)' &= f'(g(x))g'(x)\\ &= f'(y)g'(x)\\ &= 8y^7(2x-3)'\\ &= 8(2x-3)^7(2)\\ &= 16(2x-3)^7\end{aligned}$$

Étant donné que la règle de chaine est très souvent utilisée, on ne fait habituellement pas autant d'étape dans le calcul d'une dérivé avec la règle de chaine. Le résultat d'un dérivée comme celle du dernier exemple se calcule directement sans étapes intermédiaire — après un entrainement suffisant !

La manière suivante d'écrire la règle de chaine permet de simplifier le calcul de la dérivée en pratique. Si $u = g(x)$, alors

$$\big(f(u)\big)' = f'(u)\,u'$$

Exemple 3.11.

$$\begin{aligned}\big((x^2+1)^5\big)' &= \big(u^5\big)' \qquad (\text{si } u = x^2+1)\\ &= 5u^4u'\\ &= 5(x^2+1)^4(x^2+1)'\\ &= 5(x^2+1)^4(2x)\\ &= 10x(x^2+1)^4\end{aligned}$$

En pratique, la variable intermédiaire u sera souvent choisie comme étant « main » au tableau ou « doigt » sur papier pour éviter d'écrire explicitement u à chaque dérivée.

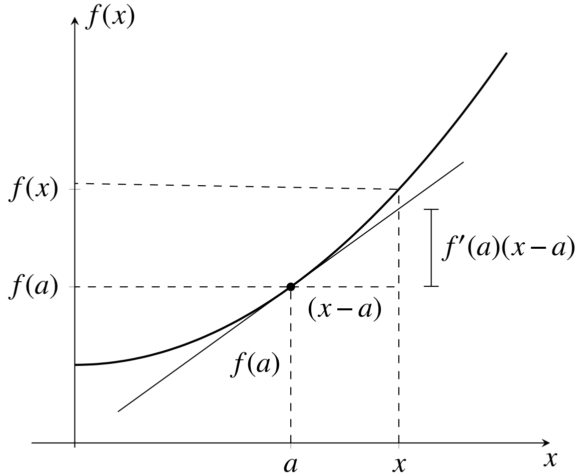
3.4 Linéarisation

Nous avons vu que la droite tangente à une fonction donnée est une bonne approximation de la fonction près du point de tangence. Pour une fonction f donnée, on appelle cette droite tangente la **linéarisation** de la fonction près de $x = a$.

Proposition 3.14. La linéarisation de f près de $x = a$ est la droite suivante

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Démonstration. On voit dans le graphique suivant que la coordonnée en y de $f(x)$ est $f(a)$ plus (approximativement) $f'(a)(x-a)$.



La longueur $f'(a)(x-a)$ est l'accroissement Δy le long de la droite tangente quand $\Delta x = x-a$, sachant que par définition de la dérivée, la pende droite tangente en $x=a$ est

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

Ainsi, on peut approximer la fonction f près de $x=a$ par

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$ □

Exemple 3.12. Approximons la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ par sa droite tangente en $x=4$. La dérivée est

$$f(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La fonction est donc approximée par sa droite tangente en $x=2$ qui a pour équation

$$\begin{aligned} y &= f(4) + f'(4)(x-4) \\ &= \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(x-4) \\ &= 2 + \frac{1}{4}(x-4) \end{aligned}$$

On peut se servir de cette approximation pour déterminer approximativement $\sqrt{2.1}$. En approximant par la droite tangente en $x=4$, on a que

$$\sqrt{x} \approx 2 + \frac{1}{4}(x-4).$$

Pour $x=4.1$ on trouve

$$\sqrt{4.1} \approx 2 + \frac{1}{4}(4.1-4) = 2 + (0.25)(0.1) = 2.025.$$

Ainsi, $\sqrt{4.1} \approx 2.025$. Cette valeur est proche de la valeur approximative donnée par une calculatrice : $\sqrt{4.1} \approx 2.02484567313166$.

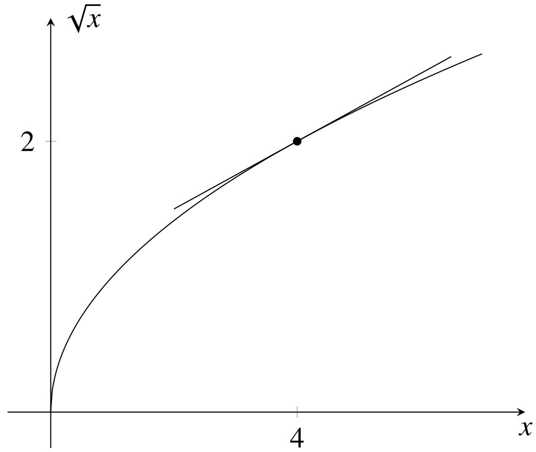
Si on prend une valeur moins près de $a = 4$, l'approximation est moins bonne. Par exemple, si $x = 5$ l'approximation par la droite tangente en $x = 4$ donne

$$\sqrt{5} \approx 2 + \frac{1}{4}(5-4) = 2 + (0.25)(1) = 2.25,$$

alors qu'une meilleure approximation donnée par un logiciel ou une calculatrice est

$$\sqrt{5} \approx 2.23606797749979.$$

On peut comprendre pourquoi en examinant le graphe suivant représentant le graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ et celui de la droite tangente en $x = 4$ dont l'équation est $y = 2 + \frac{1}{4}(x-4)$



Plus x est loin de $x = 4$, plus l'écart entre la droite tangente et le graphe est grand, ce qui explique pourquoi l'écart trouvé est plus grand en $x = 5$ qu'en $x = 4.1$.

3.5 Dérivation implicite

Il est possible de définir une fonction par une équation. Par exemple :

$$y = \frac{1}{x} \qquad y = x^2$$

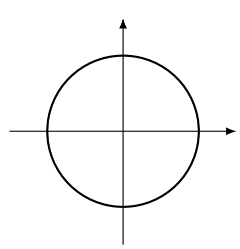
On pourrait aussi définir ces fonctions par les équations suivantes

$$xy = 1 \qquad x^2 - y = 0.$$

Dans une telle définition implicite, il faut cependant spécifier quelle variable est fonction de l'autre. Par habitude, nous prenons souvent y comme fonction de x.

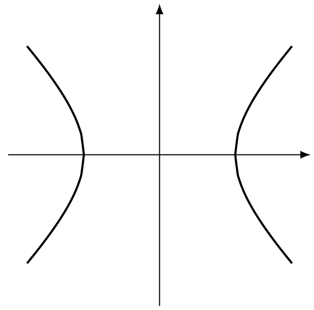
Nous savons cependant qu'une équation ne peut pas toujours être vue comme une définition implicite d'une fonction. Par exemple l'équation du cercle de rayon 1

$$x^2 + y^2 = 1$$



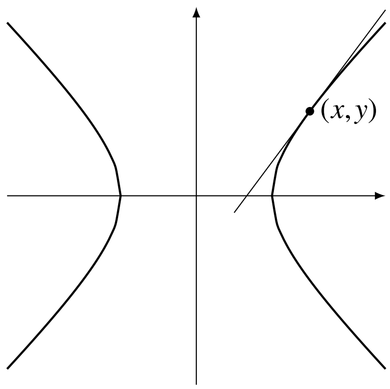
ou encore celle d'une hyperbole

$x^2 - y^2 = 1$



Même si ces équations établissent des relations entre les variables x et y sans que ces relations soient des fonctions, il est possible de déterminer la pente des tangentes à ces courbes à l'aide de la dérivée en supposant qu'il est possible *localement* de supposer que ces courbes sont le graphe d'une fonction définie implicitement.

Exemple 3.13. Prenons l'hyperbole définie par l'équation $x^2 - y^2 = 1$. On veut connaitre la pente de la tangente au point (x, y).



On suppose que « localement » y est une fonction de x, que l'on pourrait écrire comme $y = f(x)$.

Comme le point (x, y) est sur la courbe, on doit avoir que

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Si on considère chaque membre de cette égalité comme une fonction, on peut les dériver et ont obtient le même résultat :

$$\left(x^2 - y^2\right)' = \left(1\right)'.$$

$$2x - 2yy' = 0.$$

Notez le « y' » : c'est la « dérivée de l'intérieur » dans l'application de la règle de chaine. En effet, on pourrait écrire y^2 comme $(f(x))^2$ puisque $y = f(x)$. En dérivant sous cette forme avec la règle de chaine on obtient

$$\left((f(x))^2\right)' = 2f(x)f'(x).$$

Comme $2f(x)f'(x) = 2yy'$, on voit que la dérivée de y^2 *par rapport à x* est bien $2yy'$.

Enfin, on isole y' dans l'égalité $2x-2yy'=0$ pour obtenir une expression donnant la pente de la tangente en fonction des coordonnées x et y du point (x,y) :

$$y' = \frac{-2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

On peut utiliser ce résultat pour déterminer la pente de la tangente au point $(2, \sqrt{3})$. On vérifie que ce point est bien sur l'hyperbole :

$$2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1.$$

(Si le point n'était pas sur l'hyperbole, l'hypothèse de départ de ce calcul serait fausse et la conclusion $y' = \frac{x}{y}$ le serait aussi !)

La pente de la tangente au point donné est donc

$$y' = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

On peut utiliser la dérivation implicite dans les preuves de certaines propositions — cela arrivera dans la suite du cours. Voyons un exemple typique.

Proposition 3.15.

$$\left(x^{1/n}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Démonstration. On a la relation suivante :

$$\left(x^{1/n}\right)^n = x.$$

Si on dérive chaque membre de cette égalité, on a

$$\left(\left(x^{1/n}\right)^n\right)' = (x)',$$

c'est-à-dire, en utilisant la règle de chaine :

$$n\left(x^{1/n}\right)^{n-1}\left(x^{1/n}\right)' = 1.$$

On isole la dérivée recherchée :

$$\left(x^{1/n}\right)' = \frac{1}{n\,(x^{1/n})^{n-1}}.$$

On simplifiant le membre de droite, on trouve la formule désirée :

$$\left(x^{1/n}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

□

3.5.1 Taux liés

La règle de chaine permet l'étude de taux de variation de variables liées entre elles par une relation, comme dans la section précédente.

Exemple 3.14. Imaginons un cercle dont le rayon r varie dans le temps. Si le rayon varie, l'aide du cercle doit varier elle aussi car les deux quantités sont reliés par l'équation

$$A = \pi r^2.$$

On a donc une situation où l'aire A est fonction du rayon r, lui-même fonction du temps. Pour connaitre le taux de variation de l'aire en fonction du temps, on utilise la règle de chaine :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$$

Si le taux de variation du rayon $\frac{dr}{dt}$ est de $55\,\mathrm{cm/s}$ et que le rayon du cercle est de 10 cm, le taux de variation de l'aire est

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r|_{r=10\,\mathrm{cm}}(5\,\mathrm{cm/s}) = 2\pi(10\,\mathrm{cm})(5\,\mathrm{cm/s}) = 100\pi\,\mathrm{cm^2/s} \approx 314.16\,\mathrm{cm^2/s}.$$

Notons que pour le taux de variation du rayon $\frac{dr}{dt}$ est de $55\,\mathrm{cm/s}$ et que le rayon du cercle est différent, par exemple de 100 cm, le taux de variation de l'aire est

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r|_{r=100\,\mathrm{cm}}(5\,\mathrm{cm/s}) = 2\pi(100\,\mathrm{cm})(5\,\mathrm{cm/s}) = 1000\pi\,\mathrm{cm^2/s} \approx 3141.59\,\mathrm{cm^2/s}$$

On voit que le taux de variation de l'aire dépend du rayon du cercle. On explique cela géométriquement par le fait que pour un petit cercle, un accroissement de son rayon de 5 cm aura un grand effet sur l'aire, alors que pour un grand cercle, un même accroissement du rayon aura peu d'effet sur l'aire.

3.6 Dérivée d'ordre supérieur

Le « taux de changements du taux de changement » est une autre quantité importante pouvant nous donner de l'information sur le comportement d'une fonction. En dynamique, elle correspond à l'**accélération**, qui est le taux de changement de la vitesse, elle même le taux de changement de la position.

Comme le taux de changement d'une fonction un point de son graphe est donnée par la dérivée de la fonction, le taux de changement du taux de changement est donnée par la *dérivée de la dérivée*. On peut voir la dérivée d'une fonction comme une nouvelle fonction, que l'on peut dériver elle aussi.

Par exemple, si on prend $f(x) = x^3$, le taux de changement est donnée par $f'(x) = 3x^2$. Le taux de changement de f' est donc donné par la **dérivée seconde** $f''(x) = 6x$.

Définition 3.1. On appelle **dérivée seconde** d'une fonction la dérivée de sa dérivée

$$f''(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f'(x))'.$$

On défini de manière similaire la **dérivée troisième** $f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$, la **dérivée quatrième** $f''''(x) = \left(f'''(x)\right)'$, etc.

On appelle ces dérivées les **dérivées d'ordre supérieur**.

Exemple 3.15. Calculer la dérivée troisième de $f(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} \\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
f''(x) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)x^{-3/2} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \\
f'''(x) &= \left(-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right)' = -\frac{1}{4}\left(x^{-3/2}\right)' = -\frac{1}{4}\left(\frac{-3}{2}\right)x^{-5/2} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}
\end{aligned}$$

Comme on peut répéter la dérivation autant de fois que l'on veut, l'accumulation de « ' » peut alourdir la notation. Il est plus pratique d'avoir une notation qui indique plus simplement le nombre de fois qu'une fonction est dérivée.

Définition 3.2.

$$\begin{aligned}
\text{Dérivée première :}\quad & f^{(1)}(x) \overset{\text{def}}{=} f'(x) \\
\text{Dérivée seconde :}\quad & f^{(2)}(x) \overset{\text{def}}{=} f''(x) = (f'(x))' \\
\text{Dérivée troisième :}\quad & f^{(3)}(x) \overset{\text{def}}{=} f'''(x) = \left(f^{(2)}(x)\right)' \\
\text{Dérivée quatrième :}\quad & f^{(4)}(x) \overset{\text{def}}{=} f''''(x) = \left(f^{(3)}(x)\right)' \\
\text{Dérivée cinquième :}\quad & f^{(5)}(x) \overset{\text{def}}{=} \left(f^{(4)}(x)\right)' \\
& \vdots \\
\text{Dérivée } n\text{-ième :}\quad & f^{(n)}(x) \overset{\text{def}}{=} \left(f^{(n-1)}(x)\right)'
\end{aligned}$$

La dérivée d'ordre quelconque $f^{(n)}$ est appelée **dérivée n-ième**.Par convention, la « dérivée 0-ieme » est la fonction elle même : $f^{(0)}(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)$.

Les dérivées d'ordre supérieur ont une notation dans toute les variantes de la notation pour la dérivée. Le tableau suivant offre un panorama de ces notations.

Notations pour la dérivée seconde						
$f''(x)$	$f^{(2)}(x)$	y''	$\left(x^2\right)''$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2}$	$\frac{d^2x^2}{dx^2}$
$f''(a)$	$f^{(2)}(a)$	$y''\rvert_{x=a}$	$\left(x^2\right)''\Big\rvert_{x=a}$	$\frac{d^2y}{dx^2}\Big\rvert_{x=a}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2}\Big\rvert_{x=a}$	$\frac{d^2x^2}{dx^2}\Big\rvert_{x=a}$