# Études complètes de fonctions

Pour chacune des fonctions suivantes, faire une étude complète de la fonction $f(x)$ donnant tous les éléments suivants :

domaine et signe de $f(s)$ ;
croissance de $f(x)$ et minimum/maximum relatifs ;
concavité de $f(x)$ et points d'inflexion ;
asymptote de $f(x)$ ;
esquisse du graphe de $f(x)$.

a) $f(x) = 2x(4-x)^3$
b) $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{x}$
c) $f(x) = \dfrac{-x^2}{x^2+1}$
d) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$
e) $y = (x-3)\sqrt{9+x}$
f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$
g) $f(x) = (5-x)^{\frac{2}{3}} + 3$
h) $f(x) = \sqrt[3]{5-x} + 3$
i) $f(x) = \dfrac{2x^2-8}{x^2-1}$
j) $y = (x-2)^2 + \dfrac{1}{(x-2)^2}$
k) $f(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-1}}$
l) $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x-6)$

# Solutions

a) Signe de $f(x) = 2x(4-x)^3$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

| $x$ | | 0 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | - | 0 | + | 0 | - |

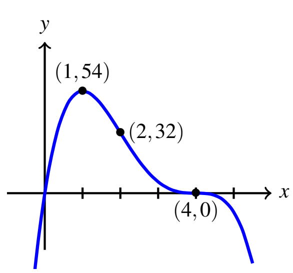
Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = 8(4-x)^2(1-x)$

| $x$ | | 1 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | + | 0 | - | 0 | - |
| $f$ | ↗ | Max | ↘ | 0 | ↘ |

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = -24(4-x)(2-x)$

| $x$ | | 2 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | - | 0 | + | 0 | - |
| $f$ | ⌢ | P.I | ⌣ | P.I | ⌢ |

Aucune asymptote.




Maximum relatif en $(1,54)$ ;
Aucun minimum relatif ;
Points d'inflexion en $(2,32)$ et $(4,0)$.

b) Signe de $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{x}$ ; $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

| $x$ | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $f$ | - | $\nexists$ | + |

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \dfrac{3(x^4-1)}{x^2}$

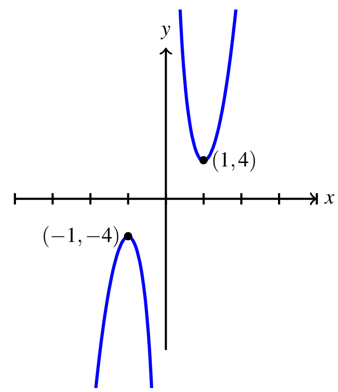
| $x$ | | -1 | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | + | 0 | - | $\nexists$ | - | 0 | + |
| $f$ | ↗ | Max | ↘ | $\nexists$ | ↘ | Min | ↘ |

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \dfrac{6(x^4+1)}{x^3}$

| $x$ | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $f''$ | - | $\nexists$ | + |
| $f$ | ⌢ | $\nexists$ | ⌣ |

A.V. en $x = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x) = \dfrac{3}{0^\pm} = \pm\infty$ ;

Aucune A.H. car $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ;




Maximum relatif en $(1,4)$ ;
Minimum relatif en $(-1,-4)$ ;
Aucun point d'inflexion.

c) Signe de $f(x) = \dfrac{-x^2}{x^2+1}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

| $x$ | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $f$ | - | 0 | - |

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

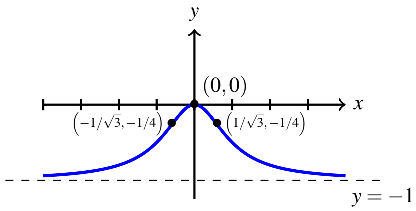
| $x$ | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | + | 0 | - |
| $f$ | ↗ | Max | ↘ |

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \dfrac{-2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$

| $x$ | | $-1/\sqrt{3}$ | | $1/\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f$ | ⌣ | P.I | ⌢ | P.I | ⌣ |

Aucune A.V.

A.H. en $y = -1$ car $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^2}{x^2+1} = -1$ ;




Maximum relatif en $(0,0)$ ;
Aucun minimum relatif ;
Points d'inflexion en $\left(-1/\sqrt{3},-1/4\right)$ et $\left(1/\sqrt{3},-1/4\right)$

d) Signe de $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

| $x$ | | -1 | | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | + | 0 | - | ∄ | + |

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x)=\dfrac{2x^3-1}{x^2}$

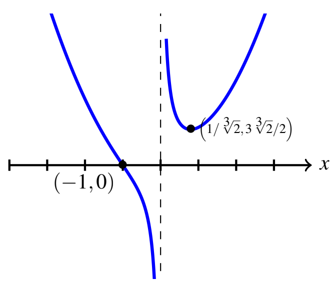
| $x$ | | 0 | | $1/\sqrt[3]{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | - | ∄ | - | 0 | + |
| $f$ | ↘ | ∄ | ↘ | Min | ↗ |

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x)=\dfrac{2(x^3+1)}{x^3}$

| $x$ | | $-1$ | | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | + | 0 | - | ∄ | + |
| $f$ | $\smile$ | P.I | $\frown$ | ∄ | $\smile$ |

A.V. en $x=0$ car $\displaystyle\lim_{x\to 0^\pm} f(x)=\frac{1}{0}=\pm\infty$ ;

Aucune A.H.




Aucun maximum relatif ;
Minimum relatif en $\left(1/\sqrt[3]{2},3\sqrt[3]{2}/2\right)$ ;
Points d'inflexion en $(-1,0)$

e) Signe de $f(x)=(x-3)\sqrt{9+x}$ $\qquad D_f=[-9,+\infty$

| $x$ | -9 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f$ | 0 | - | 0 | + |

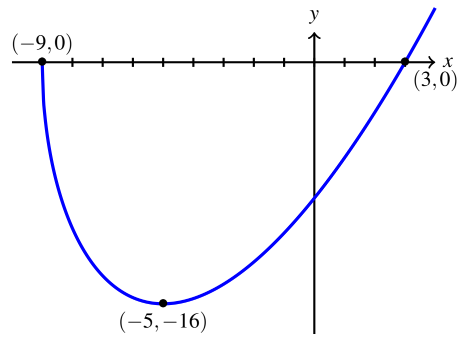
Croissance de $f(x)$ avec $f'(x)=\dfrac{3(x+5)}{2\sqrt{9+x}}$

| $x$ | -9 | | -5 | |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $\infty$ | - | 0 | + |
| $f$ | Max/TV | ↘ | Min | ↗ |

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x)=\dfrac{3(x+13)}{4\sqrt{(9+x)^3}}$

Toujours concave vers le haut car $f''>0\quad \forall x\in D_f$

Aucune A.V. et aucune A.H.




Maximum relatif en $(-9,0)$ ;
Minimum relatif en $(-5,-16)$ ;
Aucun point d'inflexion.

f) Signe de $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$

| $x$ | | -2 | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | - | ∄ | + | 0 | - | ∄ | + |

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x)=\dfrac{-(x^2+4)}{(x^2-4)^2}<0$

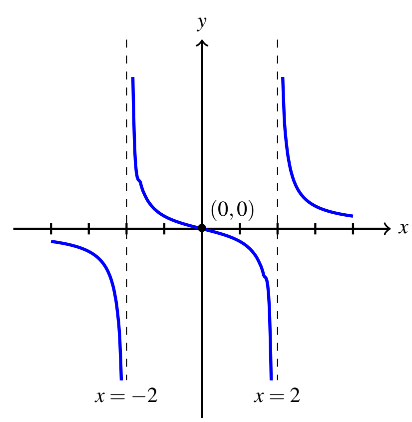
On remarque que $f(x)$ est décroissante, si $x\in D_f$.

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x)=\dfrac{2x(2x^2+12)}{(x^2-4)^4}$

| $x$ | | -2 | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | - | ∄ | + | 0 | - | ∄ | + |
| $f$ | $\frown$ | A.V. | $\smile$ | P.I | $\frown$ | A.V. | $\smile$ |

A.V. en $x=\pm 2$ car $\displaystyle\lim_{x\to\pm 2}\frac{x}{x^2-4}=\frac{\pm 2}{0}=\pm\infty$ ;

A.H. en $y=0$ car $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-4}=0$ ;




Aucun maximum relatif ;
Aucun minimum relatif ;
Point d'inflexion en $(0,0)$.

g) Signe de $f(x)=(5-x)^{2/3}+3$ $\qquad D_f=\mathbb{R}$

On remarque que $f(x)$ est toujours positive.

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x)=\dfrac{-2}{3\sqrt[3]{5-x}}$

| $x$ | $-\infty$ | 5 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | - | $\nexists$ | + |
| $f$ | $\searrow$ | Min | $\nearrow$ |

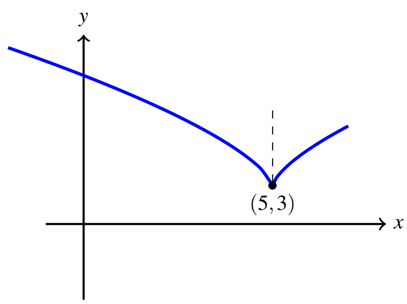
On conclut que $f(x)$ a un pic (la tangente est verticale) en $x = 5$, puisque

$$f'(5) = \frac{-2}{0} = \pm\infty$$

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \dfrac{-2}{9\sqrt[3]{(5-x)^4}} < 0$

On remarque que $f(x)$ est concave vers le bas si $x \neq 5$.

Aucune A.V. et aucune A.H.




Aucun maximum relatif;
Minimum relatif en $(5,3)$;
Aucun point d'inflexion

h) Signe de $f(x) = \sqrt[3]{5-x} + 3 > 0$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

| $x$ | | 32 | |
|---|---|---|---|
| $f$ | + | 0 | - |

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(5-x)^2}} < 0$

| $x$ | | 5 | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | - | $\nexists$ | - |
| $f$ | $\searrow$ | ?? | $\searrow$ |

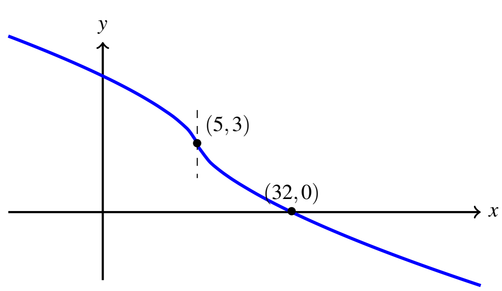
On conclut que la tangente est verticale en $x = 5$, puisque $f(x)$ est décroissante (aucun pic) et

$$f'(5) = \frac{-1}{0} = \pm\infty$$

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \dfrac{-2}{9\sqrt[3]{(5-x)^5}}$

| $x$ | | 5 | |
|---|---|---|---|
| $f''$ | - | $\nexists$ | + |
| $f$ | $\frown$ | P.I | $\smile$ |

Aucune A.V. et aucune A.H.




Aucun maximum relatif;
Aucun minimum relatif;
Point d'inflexion en $(5,3)$

i) Signe de $f(x) = \dfrac{2x^2-8}{x^2-1}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

| $x$ | | -2 | | -1 | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | + | 0 | - | $\nexists$ | + | $\nexists$ | - | 0 | + |

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \dfrac{12x}{(x^2-1)^2}$

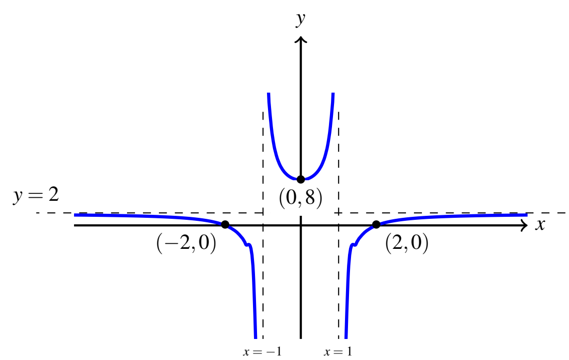
| $x$ | | -1 | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | - | $\nexists$ | - | 0 | + | $\nexists$ | + |
| $f$ | $\searrow$ | A.V. | $\searrow$ | Min | $\nearrow$ | A.V. | $\nearrow$ |

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \dfrac{-12(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$

| $x$ | | -1 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | - | $\nexists$ | + | $\nexists$ | - |
| $f$ | $\frown$ | A.V. | $\smile$ | A.V. | $\frown$ |

A.V. en $x = \pm 1$ car, $\quad \displaystyle\lim_{x \to \pm 1} \frac{2x^2-1}{x^2-1} = \frac{-6}{0} = \pm\infty.$

A.H. en $y = 2$ car, $\quad \displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2-1}{x^2-1} = 2.$




Aucun maximum relatif;
Minimum relatif en $(0,8)$;
Aucun point d'inflexion.

j) Signe de $f(x) = (x-2)^2 + \dfrac{1}{(x-2)^2} > 0$,
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

On remarque que $f(x)$ est positive si $x \neq 2$.

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = 2(x-2) - \dfrac{2}{(x-2)^3}$

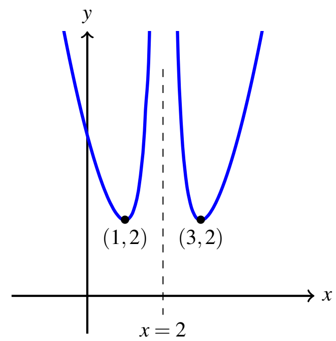
| $x$ | | 1 | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | - | 0 | + | $\nexists$ | - | 0 | + |
| $f$ | $\searrow$ | Min | $\nearrow$ | $\nexists$ | $\searrow$ | Min | $\nearrow$ |

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = 2 + \dfrac{6}{(x-2)^4}$

On conclut que $f(x)$ est concave vers le haut si $x \neq 0$.

A.V. en $x = 2$, car

$$\lim_{x \to 2} (x-2)^2 + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$




Aucun maximum relatif ;
Minimum relatif en $(1,2)$ et $(3,2)$ ;
Aucun point d'inflexion.

k) Signe de $f(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-1}}$

On a $\quad D_f = -\infty,-1[\cap]1,+\infty$

| $x$ | | -1 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | + | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | - |

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$

| $x$ | | -1 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | + | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | + |
| $f$ | $\nearrow$ | A.V. | $\nexists$ | A.V. | $\nearrow$ |

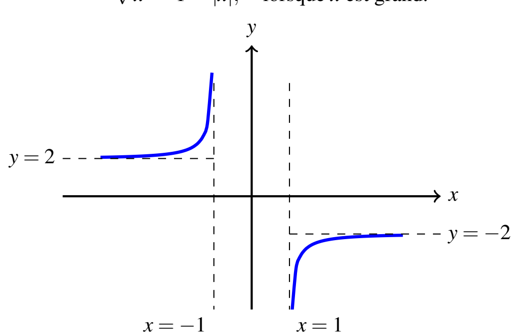
Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \dfrac{-6x)}{\sqrt{(x^2-1)^5}}$

| $x$ | | -1 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | - | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | + |
| $f$ | $\frown$ | A.V. | $\nexists$ | A.V. | $\smile$ |

A.V. en $x = \pm 1$ car, $\quad \lim\limits_{x \to \pm 1} \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\pm 1}{0} = \pm\infty.$

A.H. en $y = 2$ si $x \to -\infty$ et
A.H. en $y = -2$ si $x \to +\infty$ car,

$$\sqrt{x^2-1} \approx |x|, \quad \text{lorsque } x \text{ est grand.}$$




Aucun maximum relatif ;
Aucun minimum relatif ;
Aucun point d'inflexion.

l) Signe de $f(x) = (x-2)^{2/3}(x-6), \quad D_f = \mathbb{R}$

| $x$ | | 1 | | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | - | 0 | - | 0 | + |

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \dfrac{5(x-3)}{3\sqrt[3]{x-1}}$

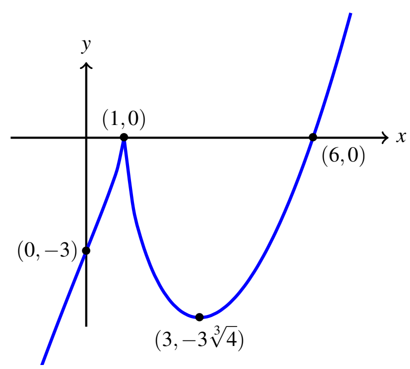
| $x$ | | 1 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | + | $\nexists$ | - | 0 | + |
| $f$ | $\nearrow$ | Max | $\searrow$ | Min | $\nearrow$ |

On conclut que $f(x)$ a un pic en $x = 1$ (la tangente est verticale), puisque
$f'(1)$ n'existe pas bien que $1 \in D_f$.

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \dfrac{10x}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}}$

| $x$ | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | - | 0 | + | $\nexists$ | + |
| $f$ | $\frown$ | P.I. | $\smile$ | ?? | $\smile$ |

Aucune asymptote




Maximum relatif en $(1,0)$ ;
Minimum relatif en $(3,-3\sqrt[3]{4})$ ;
Point d'inflexion en $(0,-3)$.