Analyse de fonctions

Croissance et extremums locaux

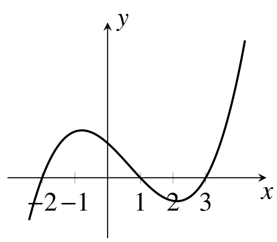
Question 1
Démontrer avec la définition de croissance d'une fonction que $f(x) = x^3$ est croissante sur l'intervalle $[0, \infty[$.

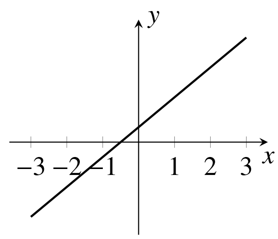
Question 2
À l'aide d'un tableau de signe, étudier le signe de la fonction

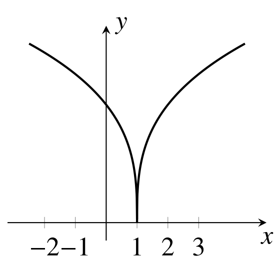
$$f(x) = \frac{(x+1)^2(x+2)^3\sqrt{x+3}}{(x-3)^5}.$$

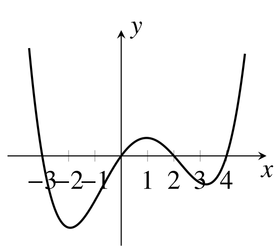
(Note : on demande d'étudier le signe de la fonction f et non de sa dérivée).

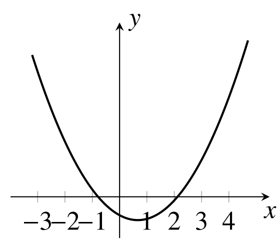
Question 3
Associer chacune des fonctions suivantes (à gauche) à sa dérivée (à droite).

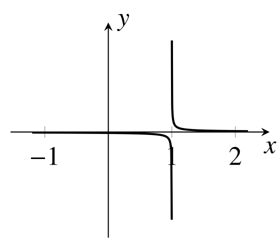
a)


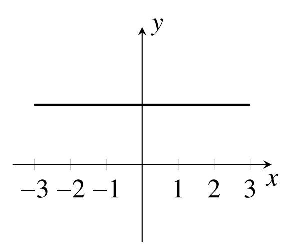
b)


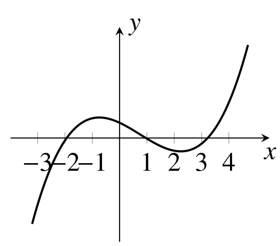
c)


d)


i)


ii)


iii)


iv)


Question 4
Soit la fonction $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

a) $f(x)$ est-elle positive en $x = 2$?

b) f est-elle croissante dans le voisinage de $x = 2$?

c) f est-elle croissante dans le voisinage de $x = 5$?

d) f est-elle croissante sur l'intervalle $[1, 6]$?

Question 5
Étudier la croissance de la fonction $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + 1$ et faire une esquisse du graphe f.

Question 6
Pour chacune des fonctions suivantes, trouver les intervalles de croissance, les intervalles de décroissance et les extremums locaux.

a) $y = 4x^3 - x + 4$

b) $y = 2x^4$

c) $y = \dfrac{x+2}{3x-1}$

d) $y = \sqrt{2x-1}$

e) $y = x^3 - 18x^2 + 105x + 41$

f) $y = \dfrac{x}{x^2+16}$

g) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x - 1$

h) $y = (x-2)^2(x-3)$

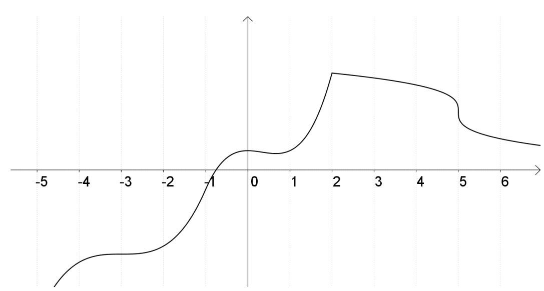
i) $y = \sqrt[3]{x-3}$

j) $y = \dfrac{x^2+8}{x-1}$

k) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+2}$

l) $y = (2x-3)^{2/3}$

Question 7
Soit la fonction représentée par le graphique ci-dessous.



a) Pour quelle(s) valeur(s) de x la dérivée de cette fonction est-elle nulle ?

b) Pour quelle(s) valeur(s) de x cette fonction n'est-elle pas dérivable ?

c) La dérivée de cette fonction est-elle plus grande en $x = -1$ ou en $x = 1$?

Question 8
Trouver les maximums, les minimums et les points stationnaires des fonctions suivantes.

a) $y = x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = x^3 - 3x$

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 9$

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$

Question 9
Déterminer le domaine ainsi que les valeurs critiques de la dérivée première, les minimums et les maximums et faire une esquisse de la fonction définie par

$$f(x) = x\sqrt{3-x}.$$

Question 10
Faire une esquisse de la fonction $y = x\sqrt{2-x^2}$ en étudiant son domaine et sa croissance.

Question 11
Montrer, en utilisant le calcul différentiel, que le sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ se situe en

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Question 12
Trouver la valeur de x pour laquelle la croissance de la fonction

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

est la plus rapide.

Question 13
Sachant qu'un polynôme de degré n a au plus n zéros, dire jusqu'à combien de maximums et de minimums peut avoir la fonction

$$f(x) = x^{2013} - x^{11} + x^8 - 1.$$

Concavité et points d'inflexion

Question 14
Esquisser le graphe d'une fonction ayant les propriétés données.

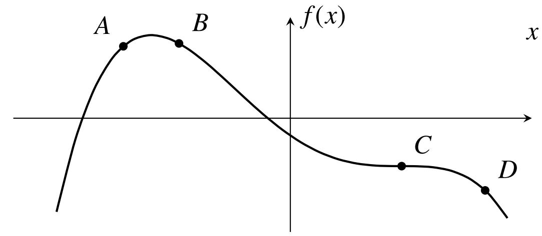
a) f est concave vers le haut et croissante sur $\mathbb{R}$.

b) f est concave vers le bas et croissante sur $\mathbb{R}$.

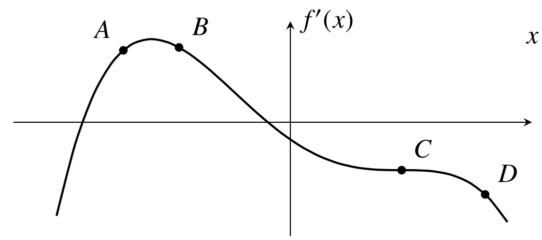
c) f est concave vers le haut et décroissante sur $\mathbb{R}$.

d) f est concave vers le bas et décroissante sur $\mathbb{R}$.

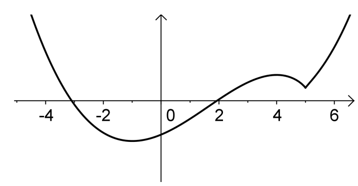
Question 15
En se référant au graphique de $y = f(x)$ ci-dessous, déterminer les signes de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ aux points A, B, C et D.



Question 16
Soit la fonction $y = f(x)$. En se référant au graphique de $f'(x)$ ci-dessous, déterminer les signes de $\dfrac{dy}{dx}$ et de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ aux points A, B, C et D.



Question 17
Répondre aux questions suivantes selon le graphique de $y = f(x)$ ci-dessous.



a) Trouver les intervalles où f est croissante.

b) Trouver les intervalles où f est décroissante.

c) Trouver les intervalles où f est concave vers le haut.

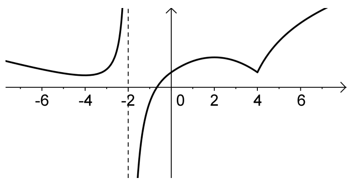
d) Trouver les intervalles où f est concave vers le bas.

e) Trouver les valeurs de x où f a un maximum local.

f) Trouver les valeurs de x où f a un minimum local.

g) Trouver les valeurs de x où f a un point d'inflexion.

Question 18
Répondre aux questions suivantes selon le graphique de $y = f(x)$ ci-dessous.



a) Trouver les intervalles où f est croissante.

b) Trouver les intervalles où f est décroissante.

c) Trouver les intervalles où f est concave vers le haut.

d) Trouver les intervalles où f est concave vers le bas.

e) Trouver les valeurs de x où f a un maximum local.

f) Trouver les valeurs de x où f a un minimum local.

g) Trouver les valeurs de x où f a un point d'inflexion.

Question 19
Étudier la concavité et trouver les points d'inflexion de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 5 - (x-7)^4$

b) $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 1$

c) $f(x) = \sqrt[3]{3x+1} - 7$

d) $f(x) = 1 - (x-4)^{\frac{2}{3}}$

e) $f(x) = (1-3x)^3(2x-3)$

Question 20
Faire l'analyse de la concavité de la fonction

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 2.$$

Question 21
Utiliser, si possible, le test de la dérivée seconde pour trouver les extremums locaux des fonctions suivantes.

a) $y = x^2 - x + 1$

b) $y = 2x^2 - x + 8$

c) $y = x^3 - 1$

d) $y = x^3 - 15x^2 - 33x$

e) $y = x^4 - 6x^2 + 1$

f) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

Extremums absolus

Question 22
Trouver les minimums et les maximums globaux des fonctions suivantes dans l'intervalle donné.

a) $y = 5x^2 + 8x - 4$ sur $[1, 3]$

b) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ sur $[2, 4]$

c) $y = \dfrac{x^2}{1-x}$ sur $[0, 3]$

d) $y = 3x^4 + 16x^3 + 6x^2 - 72x + 1$ sur $[-4, 4]$

e) $y = \dfrac{4-x}{6x+1}$ sur $[0, 3]$

f) $y = \dfrac{x-3}{2x-1}$ sur $[-1, 1]$

g) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 7$ sur $[-4, 4]$

h) $y = \dfrac{2x^2 + x + 8}{x}$ sur $[-1, 3]$

i) $y = (x-2)^2(x-3)$ sur $[-2, 5]$

j) $y = \dfrac{x^2 + 8}{x - 1}$ sur $[0, \infty[$

k) $y = (2x-3)^{2/3}$ sur $\mathbb{R}$

l) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ sur $[3, \infty[$

Exercices récapitulatifs

Question 23
Vrai ou faux ? Il n'est pas nécessaire de justifier vos réponses.

a) Si $f''(a) < 0$, alors f a un minimum en $x = a$.

b) Si une fonction est concave vers le bas sur $[a, b]$, sa dérivée est décroissante sur $[a, b]$.

c) Une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ ne peut pas avoir d'asymptote horizontale.

d) Si $f'(a)$ n'est pas défini, alors $f(x)$ a un asymptote verticale en $x = a$.

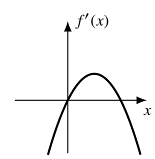
e) Si $f(0) = 2$ et $f(2) = 5$, alors la fonction f est croissante sur $[0, 2]$.

f) Si $x < 0$, alors $\sqrt{x^2} = -x$.

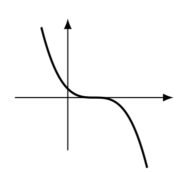
g) Si f a une tangente verticale en $x = a$, alors $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \pm\infty$.

Question 24
Répondre aux questions suivantes en choisissant un des graphiques (1) à (16).

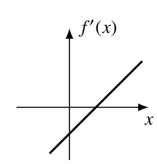
a) Si $f'(x)$ a le graphe suivant, quel est le graphe de $f(x)$?



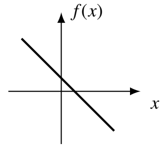
b) Si $f(x)$ a le graphe suivant, quel est le graphe de $f'(x)$?



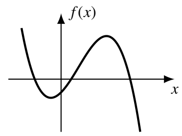
c) Si $f'(x)$ a le graphe suivant, quel est le graphe de $f(x)$?



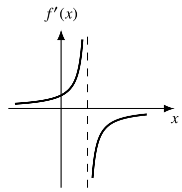
d) Si $f(x)$ a le graphe suivant, quel est le graphe de $f'(x)$?



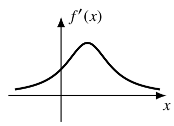
e) Si $f(x)$ a le graphe suivant, quel est le graphe de $f'(x)$?



f) Si $f'(x)$ a le graphe suivant quel est le graphe de $f(x)$?



g) Si $f'(x)$ a le graphe suivant, quel est le graphe de $f(x)$?



h) Quelle fonction correspond au tableau de signe suivant ?

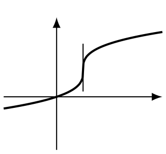
x	$-\infty$		1		∞
$f'(x)$		$+$	$\nexists$	$-$	
$f''(x)$		$+$	$\nexists$	$+$	
$f(x)$	0		$\nexists$		0

i) Quelle fonction correspond au tableau de signe suivant ?

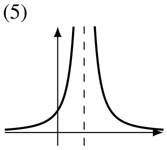
x		1	
$f'(x)$	$+$	∞	$-$
$f''(x)$	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$		2	

j) Quel est le graphe de la fonction telle que $f'(1) = 0$ et $f''(1) = 0$?

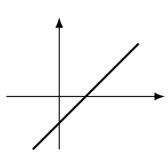
(1)



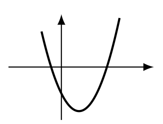
(5)



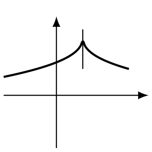
(9)



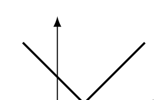
(13)



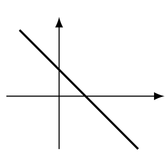
(2)



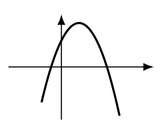
(6)



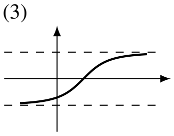
(10)



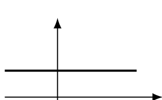
(14)



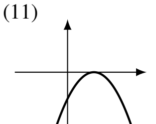
(3)



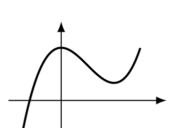
(7)



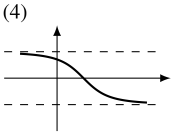
(11)



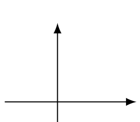
(15)



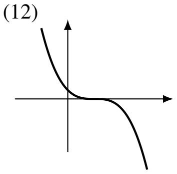
(4)



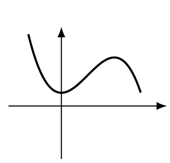
(8)



(12)

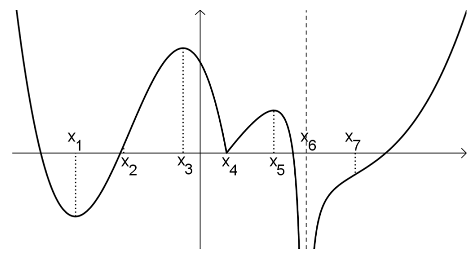


(16)



Question 25

Répondre aux questions suivante sur le graphique de la fonction f donné ci-dessous.



a) Trouver les valeurs de x où f a un minimum local.

b) Trouver les valeurs de x où f a un maximum local.

c) Trouver les valeurs de x où f a un point d'inflexion.

d) Trouver les valeurs de x où f n'est pas dérivable.

e) Quel est le maximum absolu sur l'intervalle $[0, x_6[$?

f) Quel est le minimum absolu sur l'intervalle $[x_2, x_5]$?

g) Quels sont les extremums absolus sur l'intervalle $[x_1, x_7]$?

Question 26

Sur quel(s) intervalle(s) les fonction suivantes sont-elles croissante ?

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$

b) $y = \dfrac{2x^2 + x + 8}{x}$

c) $y = \dfrac{8 - 7x}{x^2 - 1}$

Question 27

Sur quel(s) intervalle(s) la fonction donnée est-elle concave vers le bas ?

a) $f(x) = (1 - 4x)^3$

b) $f(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2$

c) $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$

Question 28

Faire l'étude complète de chaque fonction et tracer une esquisse de son graphique respectant son domaine, ses asymptotes, ses intervalles de croissance et de concavité, ses extremums et ses points d'inflexion.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2}$

b) $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$

c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x - 6)^{\frac{1}{3}}$

d) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

e) $f(x) = (x - 1)^3(x + 3)^2$

Question 29

Utiliser, si possible, le test de la dérivée seconde pour trouver les extremums locaux des fonctions suivantes.

a) $y = x^3 - 6x^2 - 63x$

b) $y = \dfrac{x^2+8}{x-1}$

c) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+2}$

Question 30
Trouver les minimums et les maximums absolus des fonctions suivantes dans l'intervalle donné.

a) $y = x^3 - 18x^2 + 105x + 41$ sur $[4, 8]$

b) $y = x^4 - 2x^2 + 2$ sur $[-2, 2]$

c) $y = \dfrac{x}{x^2+16}$ sur $[1, \infty[$

Question 31
Vrai ou faux. Trouver un contre-exemple si l'énoncé est faux.

a) Si f et g sont croissantes sur un intervalle, alors $f + g$ l'est également.

b) Si f et g sont croissantes sur un intervalle, alors $f \cdot g$ l'est également.

c) Si f et g sont concaves vers le haut sur un intervalle, alors $f + g$ l'est également.

d) Si f et g sont concaves vers le haut sur un intervalle, alors $f \cdot g$ l'est également.

Question 32
Soit un polynôme de degré trois $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a) Montrer que ce polynôme ne possède qu'un seul point d'inflexion.

b) Montrer que si ce polynôme a 3 zéros, alors la coordonnée en x de ce point d'inflexion correspond à la moyenne des 3 zéros.

c) Trouver le point d'inflexion de $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ en utilisant d'abord le résultat montré en b), puis à l'aide de la dérivée seconde.

Solutions

Croissance et extremums locaux

Question 1

Supposons que $0 \leq x_1 < x_2$. Il faut montrer que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

$$\begin{aligned} f(x_1) \leq f(x) &\iff x_1^3 \leq x_2^3 \\ &\iff 0 \leq x_2^3 - x_1^3 \\ &\iff 0 \leq (x_2 - x_1)(x_2^3 + x_1 x^2 + x_1^3) \end{aligned}$$

On montre que $(x_2 - x_1)(x_2^3 + x_1 x^2 + x_1^3)$ est positif en vérifiant que chacun de ses facteurs est positif.

Comme $x_1 < x_2$, on a que $0 < x_2 - x_1$, ce qui implique que le premier facteur est positif.

Les terme x_1^2 et x_2^2 du second facteur sont positifs. Comme par hypothèse x_1 et x_2 sont positifs, leur produit $x_1 x_2$ doit aussi l'être.

Ainsi, le second facteur $x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2$ est une somme de termes positifs, qui est donc elle aussi positive.

Enfin, comme chaque facteur de $(x_2 - x_1)(x_2^3 + x_1 x^2 + x_1^3)$ est positif, le produit est aussi positif.

Question 2

x	$-\infty$		-3		-2		-1		3		∞
f		+	0	+	0	−	0	−	$\nexists$	+	

Question 3

a) i)
b) iii)
c) ii)
d) iv)

Question 4

a) Oui
b) Non
c) Oui
d) Non

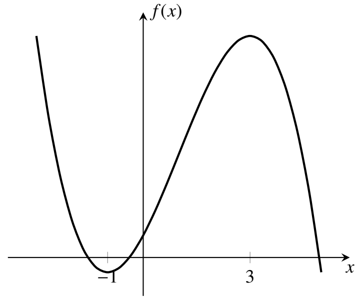
Question 5

La dérivée de f est

$$f'(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x+1)(x-3).$$

$f'(x) = 0$ quand $x = -1$ ou $x = 3$.

x		-1		3	
$x+1$	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
f'(x)	-	0	+	0	-
	↘ MIN		↗	MAX	↘



Question 6

a) Croissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}, \infty\right[$, décroissante sur $\left[-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right]$, maximum local en $\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{36+\sqrt{3}}{9}\right)$, minimum local en $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{36-\sqrt{3}}{9}\right)$

b) Croissante sur $[0, \infty[$, décroissante sur $]-\infty, 0]$, minimum local en $(0, 0)$.

c) Croissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$, décroissante sur $\left]\frac{1}{3}, \infty\right[$, aucun extremum local.

d) Croissante sur $[\frac{1}{2}, \infty[$, minimum local en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

e) Croissante sur $]-\infty, 5]$ et sur $[7, \infty[$, décroissante sur $[5, 7]$, maximum local en $(5, 241)$, minimum local en $(7, 237)$.

f) Croissante sur $]-4, 4]$, décroissante sur $]-\infty, -4[$ et sur $]4, \infty]$, maximum local en $(4, 1/8)$, minimum local en $(-4, -1/8)$.

g) Croissante sur $-\infty, -2]$, sur $[-1, 1]$ et sur $[2, \infty[$, décroissante sur $[-2, -1]$ et sur $[1, 2]$, maximums locals en $(-2, -17)$ et en $(1, 37)$, minimums locals en $(-1, -39)$ et en $(2, 15)$.

h) Croissante sur $]-\infty, 2]$ et sur $(8/3, \infty)$, décroissante sur $[2, 8/3]$, maximum local en $(2, 0)$, minimum local en $(8/3, -4/27)$.

i) Croissante sur $\mathbb{R}$, aucun extremum local.

j) Croissante sur $]-\infty, -2$ et sur $[4, \infty[$, décroissante sur $[-2, 0[$ et sur $]0, 4]$, maximum local en $(-2, -4)$, minimum local en $(4, 8)$.

k) Croissante sur $[0, \infty[$, décroissante sur $]-\infty, 0]$, minimum local en $(0, -1/2)$

l) Croissante sur $[3/2, \infty[$, décroissante sur $]-\infty, 3/2]$, minimum local en $(3/2, 0)$.

Question 7

a) $x \in \left\{-3,\ -\frac{1}{4},\ \frac{2}{3}\right\}$

b) $x \in \{2,\ 5\}$

c) En $x = -1$

Question 8

a) Valeurs critiques : $y' = 2x-3$, donc $y' = 0 \iff x = 3/2$.

x	$-\infty$		$3/2$		∞
y		-	0	+	
		↘	MIN	↗	

La fonction y a donc un min en $x = 3/2$.

b) Valeurs critiques : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$. $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 3 = 0 \iff x = \pm 1$.

x	$-\infty$		-1		1		∞
y		+	0	-	0	+	
		↗	MAX	↘	MIN	↗	

$f(x)$ a un max en $x = -1$ et un min en $x = 1$.

c) Valeurs critiques : $f'(x) = 3(x-2)^2$. $f'(x) = 0 \iff 3(x-2)^2 = 0 \iff x = 2$. $f'(x)\nexists \iff x = 1$.

x	$-\infty$		2		∞
y		+	0	+	
		↗	PS	↗	

$f(x)$ a un point statitonnaire en $x = 2$.

d) Valeurs critiques : $f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$. $f'(x) = 0 \iff \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2} = 0 \iff x = 0, 3/2$. $f'(x)\nexists \iff x = 1$.

x	$-\infty$		0		1		$3/2$		∞
y		-	0	-	$\nexists$	-	0	+	
		↘	PS	↘	AV	↘	MIN	↗	

$f(x)$ a un max en $x = -1$ et un min en $x = 1$.

Question 9

Le domaine de la fonction est $[-\infty, 3]$.

La dérivée de la fonction est

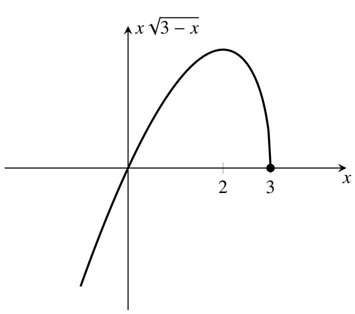
$$f'(x) = -\frac{3(x-2)}{2\sqrt{3-x}}.$$

Ses valeurs critiques sont

- $f'(x) = 0$ en $x = 2$
- $f'(x)\nexists$ pour $x \leq 3$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$		2		3
$f'(x)$		+	0		∞
$f(x)$		↗	MAX	↘	TV



Question 10

y est défini sur l'intervalle $[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$ car $\sqrt{2-x^2}$ est défini uniquement sur cet intervalle.

Pour étudier la croissance de y, on utilise sa dérivée :

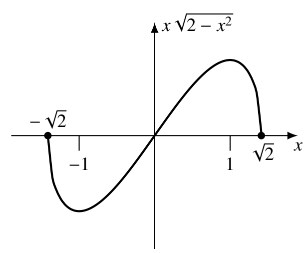
$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{2-x^2} - \frac{x}{2\sqrt{2-x^2}}(2x) \\ &= \sqrt{2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} \\ &= \frac{(2-x^2)-x^2}{\sqrt{2-x^2}} \\ &= \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{2-x^2}} \\ &= \frac{2(1-x)(1+x))}{\sqrt{2-x^2}} \\ &= \frac{-2(x-1)(x+1))}{\sqrt{2-x^2}} \end{aligned}$$

y' est définie sur l'intervalle $]-\sqrt{2},\ \sqrt{2}[$ (car il y a une division par zéro en $\pm\sqrt{2}$).

$y' = 0$ quand $x = \pm 1$.

Tableau de variation :

x	$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$
y'	$-\infty$	-	0	+	0	-	$-\infty$
y	TV		MIN		MAX		TV



Question 11

Au sommet, on doit avoir que $y' = 0$. $y' = 2ax + b$, et donc $y' = 0$ quand $x = -b/2a$.

Question 12

La croissance de y est la plus rapide quand la dérivée est maximum, donc quand la dérivée de la dérivée, c'est à dire y'', est nulle. On calcule donc la dérivée seconde de y et on détermine pour quelle valeur de x on a que $y'' = 0$. La valeur cherchée est $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

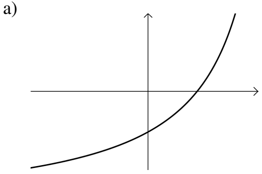
Question 13

Comme la dérivée de f est $f'(x) = 2013x^{2012} - 11x^{10} + 8x^7$, un polynôme de degré 2012, qui peut avoir au plus 2012 zéros, et que la dérivée a un zéro à chaque minimum ou maximum, la fonction f a au plus 2012 minimums et maximums.

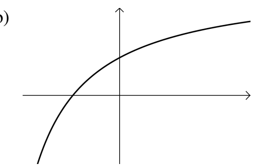
Concavité et points d'inflexion

Question 14

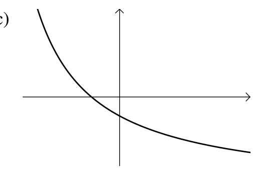
a)



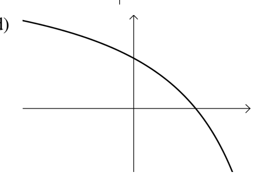
b)



c)



d)



Question 15

	A	B	C	D
$\frac{dy}{dx}$	+	-	-	0
$\frac{d^2y}{dx^2}$	-	-	+	0

Question 16

	A	B	C	D
$\frac{dy}{dx}$	+	+	-	-
$\frac{d^2y}{dx^2}$	+	-	-	0

Question 17

a) $[-1, 4]$, et $[5, \infty[$

b) $]-\infty, -1]$ et $[4, 5]$

c) $]-\infty, 2[$ et $[5, \infty[$

d) $]2, 4]$

e) $x = 4$

f) $x = 1$ et $x = 5$

g) $x = 2$

Question 18

a) $[-4, -2[,]-2, 2[$ et $[4, \infty[$

b) $]-\infty, -4]$ et $[2, 4]$

c) $]-\infty, -2[$

d) $]-2, 4]$ et $[4, \infty[$

e) $x = 2$

f) $x = -4$ et $x = 4$

g) Aucun point d'inflexion

Question 19

a) Concave vers le bas sur $\mathbb{R}$, aucun point d’inflexion.

b) Concave vers le haut sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, \infty[$, concave vers le bas sur$[-1, 1]$, points d’inflexion en $(-1, -2)$ et $(1, -2)$

c) Concave vers le haut sur $]-\infty, -1/3]$, concave vers le bas sur $[-1/3, \infty[$, point d’inflexion en $(-1/3, -7)$

d) Concave vers le haut sur $]-\infty, 4]$ et sur $[4, \infty[$, aucun point d’inflexion.++

e) Concave vers le haut sur $[1/3, 11/12]$, concave vers le bas sur $]-\infty, 1/3]$ et sur $[11/12, \infty[$, points d’inflexion en $(1/3, 0)$ et $(11/12, 25/4)$

Question 20

Le seul point critique de f'' est $x = 1$, où $f''(x)\nexists$. Le tableau des signes de f'' :

x		-1	
$f''(x)$	-	0	+

La fonction est donc concave vers le bas sur $]-\infty, 1[$, concave vers le haut sur $]1, \infty[$, et elle a un point d’inflexion en $x = 1$.

Question 21

a) Minimum local en $(1/2, 3/4)$.

b) Minimum local en $(1/4, 63/8)$.

c) Aucun extremum local.

d) Minimum local en $(11, -847)$, maximum local en $(-1, 17)$

e) Minimums local en $(-\sqrt{3}, -8)$ et $(\sqrt{3}, -8)$, maximum local en $(0, 1)$

f) Minimum local en $(0, 0)$, maximum local en $(-2, -4)$

Question 22

a) Minimum = 9, maximum = 65.

b) Minimum = $\sqrt{3}$, maximum = $\sqrt{15}$.

c) Aucun extremum.

d) Minimum = -46, maximum = 1601.

e) Minimum = 1/19, maximum = 4.

f) Aucun extremum.

g) Minimum = -37, maximum = 88.

h) Aucun extremum.

i) Minimum = -80, maximum = 18.

j) Minimum = 8, aucun maximum.

k) Minimum = 0, aucun maximum.

l) Maximum = 1, aucun minimum.

Question 23

a) Faux c) Faux e) Faux g) Vrai

b) Vrai d) Faux f) Vrai

Question 24

a) 16 d) 8 g) 3 j) 12

b) 11 e) 14 h) 5

c) 13 f) 2 ou 5 i) 2

Question 25

a) x_1 et x_4.

b) x_3 et x_5.

c) x_2 et x_7.

d) x_4 et x_6.

e) $f(0)$

f) $f(x_4)$

g) Aucun minimum absolu, maximum absolus en x_3.

Question 26

a) Croissante sur $]-\infty, -3]$ et sur $[2, \infty[$, décroissante sur $[-3, 2]$, maximum local en $(-3, 92)$, minimum local en $(2, -33)$.

b) Croissante sur $]-\infty, -2]$ et sur $[2, \infty[$, décroissante sur $[-2, 0[$ et sur $]0, 2]$, maximum local en $(-2,\ -7)$, minimum local en $(2, 9)$.

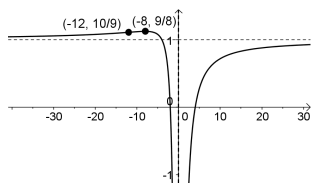
c) Croissante sur $]-\infty, -1[$, sur $]-1; 0,59]$ et sur $[1,70; \infty[$, décroissante sur $[0,59; 1[$ et sur $]1, 1,70]$, maximum local en $(0,59; -5,94)$, minimum local en $(1,70;\ -2,06)$.

Question 27

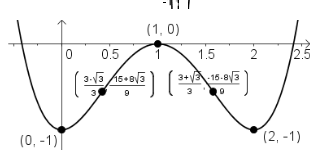
a) $[1/4, \infty[$ b) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ c) $\left[0, \sqrt{2}\right]$

Question 28

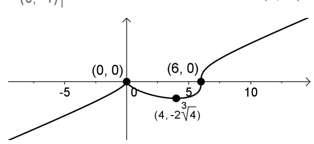
a)



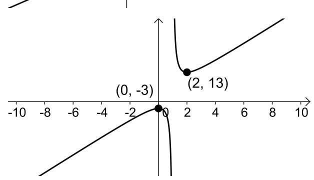
b)



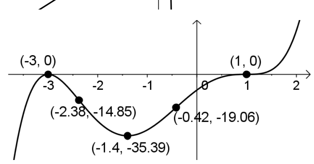
c)



d)



e)



Question 29

a) Minimum local $(7, -392)$, maximum local $(-3, 108)$

b) Minimum local $(4, 8)$, maximum local $(-2, -4)$

c) Minimum local $(0, -1/2)$.

Question 30

a) Min = 237, max = 241.

b) Min = 1, max = 10

c) Max = 1/8, aucun min.

Question 31

a) Vrai

b) Faux, on peut prendre $f(x) = x$ et $g(x) = x$, toutes deux croissantes sur $\mathbb{R}$, mais telles que $f(x) \cdot g(x) = x^2$ ne l’est pas.

c) Vrai

d) Faux, on peut prendre $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = x^2 - 1$, toutes deux concaves vers le haut sur $\mathbb{R}$, mais $f \cdot g(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ ne l’est pas.

Question 32

a) Montrer que l’équation $y'' = 0$ a une seule solution.

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y'' = 6ax + 2b$$

donc $y'' = 0$ quand

$$x = -\frac{b}{3a}.$$

b) On suppose que $y = a(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)$, où z_1, z_2 et z_3 sont les trois zéros du polynôme.

En dérivant, on trouve que

$$y' = a(x-z_2)(x-z_3) + a(x-z_1)(x-z_3) + a(x-z_1)(x-z_2)$$

et que

$$\begin{aligned} y'' &= a(x - z_2) + a(x - z_3) + a(x - z_1) \\ &\quad + a(x - z_3) + a(x - z_1) + a(x - z_2) \\ &= 2a(x - z_1) + 2a(x - z_2) + 2a(x - z_3) \end{aligned}$$

On cherche le point d’inflexion :

$$\begin{aligned} 2a(x - z_1) + 2a(x - z_2) + 2a(x - z_3) &= 0 \\ 2a\left((x - z_1) + (x - z_2) + (x - z_3)\right) &= 0 \\ 3x - z_1 - z_2 - z_3 &= 0 \\ x &= \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \end{aligned}$$

c) À l’aide de b) :

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x - 2)(x - 1).$$

Les zéros sont 0, 1 et 2. La moyenne des trois zéros est

$$\frac{0 + 1 + 2}{3} = 1.$$

Le point d’inflexion de y est donc situé en $x = 1$.

Avec la dérivée seconde :

$$y' = 3x^2 - 6x + 2$$

$$y'' = 6x - 6$$

donc $y'' = 0$ quand $x = 1$. Le point d’inflexion de y est donc situé en $x = 1$.