Exercices révision et notions préliminaires - algèbre

Calcul différentiel – Automne 2020 – Yannick Delbecque

Algèbre

Question 1

Dans le raisonnement suivant, dire à chacune des étapes quel principe de base de l'algèbre est utilisé pour résoudre l'équation de départ.

$$\begin{aligned}
x^2+4&=4x & \\
x^2-4x+4&=0 & (a)\\
(x-2)^2&=0 & (b)\\
x-2&=0 & (c)\\
x&=2 & (d)
\end{aligned}$$

Question 2

Démontrer l'identité algébrique suivante de chacune des deux manières demandées.

$$\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)=A-B$$

a) En développant le membre de droite de l'égalité.

b) En substituant dans l'identité algébrique pour une différence de carré.

Question 3

Résoudre les équations suivantes (donner des solutions exactes).

a) $\dfrac{3}{4x}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{2}$

b) $\dfrac{3}{4+x}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{2}$

c) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=\dfrac{5}{3}$

d) $\dfrac{1}{2x}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{4}{5}$

e) $x^3=x^2$

f) $\dfrac{\sqrt{6}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

g) $\dfrac{3x}{\sqrt{15}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}$

h) $x^2=\sqrt{2}$

i) $8x^3=27$

Exposants

Question 4

Simplifier et réécrire les expressions suivantes pour que le résultat n'ait aucun exposant fractionnaire ou négatif.

a) 2^{-3}

b) $2^{1/2}$

c) $3^{-1/3}$

d) $5^{-2/3}$

e) $\left(2^{1/2}\right)^3$

f) $\left(\frac{1}{100}\right)^{1/2}$

g) $2^{1/2}2^{-5/2}$

h) $\dfrac{2^{3/2}}{2^{5/2}}$

i) $\dfrac{2^{1/2}}{2^{1/3}}$

j) $\left(\frac{1}{5^{2/3}}\right)^{1/2}$

k) $\left(2^{1/2}+3^{1/2}\right)^{-2}$

l) $\sqrt{3^2+4^2}$

m) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^8\right)^{1/2}$

Question 5

Mettre les expressions suivantes sous la forme

$$C(x-a)^b$$

où a et b et C sont des nombres réels.

a) $\dfrac{1}{x^3}$

b) $\dfrac{2}{x^3}$

c) $\dfrac{2}{3x^5}$

d) $\dfrac{1}{(x-3)^2}$

e) $\dfrac{7}{(x+1)^6}$

f) $\sqrt{x}$

g) $\sqrt[3]{x-2}$

h) $\dfrac{\sqrt[4]{x+2}}{5}$

i) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

j) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$

k) $\dfrac{2}{3\sqrt[5]{x}}$

l) $\sqrt{x^3}$

m) $\sqrt[4]{(x-3)^5}$

n) $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$

o) $\dfrac{4}{3\sqrt[5]{x^4}}$

p) $(2x-3)^2$

q) $(2x)^3$

r) $(2x-1)^3$

s) $\sqrt{4x-1}$

t) $\dfrac{(x-2)^2}{\sqrt{x-2}}$

u) $\dfrac{3(x+1)}{4\sqrt[3]{x+1}}$

v) $\dfrac{2\sqrt[5]{x+1}}{5\sqrt{x+1}}$

Polynômes

Question 6

Factoriser complètement les polynômes suivants.

a) $4x^3-3x^2+4x-3$

b) x^2+5x+6

c) $9x^2+12x+4$

d) $16x^2-81$

e) x^2+25

f) $3x^3-108x$

g) $18x^5+32x^3$

h) x^4-5x^2+4

Question 7
Résoudre les équations polynomiales suivante en factorisant.

a) $x^2+x-6=0$
b) $3x^2+x-2=0$
c) $x^2-16=0$
d) $9x^2-25=0$
e) $x^4=x^3$
f) $x^2+7x+12=0$
g) $9-4x^2=0$
h) $3x^2+5x=0$
i) $-x^2-100=0$

Question 8
Utiliser la formule quadratique pour résoudre chacune des équations suivantes.

a) $3x^2+2x+6=0$
b) $6x^2-17x+12=0$
c) $x^2+11=0$
d) $9x^2-6x+1=0$

Question 9
Effectuer les divisions polynomiales suivantes.

a) $\dfrac{x^2-1}{x-1}$
b) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$
c) $\dfrac{x^2+1}{x-1}$
d) $\dfrac{x^3-1}{x-1}$
e) $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$
f) $\dfrac{x^4-x^3-2x^2+3x-1}{x-1}$
g) $\dfrac{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+2}{x+1}$

Question 10
Factoriser et simplifier les expressions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{(x+1)^4}{x^2+2x+1}$
b) $\dfrac{x^2-4}{x-2}$
c) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}$
d) $(x-2)^3(2x+1)^2+(x-2)^2(2x+1)^3$
e) $(x-1)^9(x^2+2)^5+(x-1)^8(x^2+2)^6$
f) $\dfrac{(x-2)^3(x-1)^4-(x-2)^4(x-1)^3}{x^2-x-2}$

Théorème de factorisation

Question 11
Factoriser les polynômes suivant à l'aide du théorème de factorisation en utilisant le zéro donné.

a) $P(x)=x^3+x^2-2x-8$, $P(2)=0$.
b) $P(x)=x^3+4x^2+6x+4$, $P(-2)=0$.
c) $P(x)=x^3-4x^2+x+6$, $P(2)=0$.
d) $P(x)=x^4+x^3-8x-8$, $P(-1)=0$.

Question 12
Vrai ou faux ?

a) Tous les facteurs d'un polynôme sont de la forme $(x-a)$.
b) $(x-2)(x^2+x-6)$ un produit de polynômes premiers.

Question 13
Le polynôme $P(x)=x^3-4x^2+8x-15$ peut également s'écrire de la manière suivante.

$$P(x)=(x-3)\left(x^2-x+5\right)$$

a) Peut-on le factoriser davantage ? Expliquer.
b) Vérifier que $x=3$ est un zéro de $P(x)$ dans les deux formes données dans la question.
c) Trouver, s'il y en a, d'autres valeurs de x pour lesquelles $P(x)=0$.

Question 14
Soit le polynôme $P(x)=x^4-5x^3-8x^2-24$.

a) Sans effectuer de division, dire si $(x-2)$ est un facteur de $P(x)$.
b) Est-ce que $(x+2)$ divise $P(x)$?

Question 15
Soit le polynôme $P(x)=x^4+3x^2+2$.

a) Ce polynôme a-t-il des zéros ?
b) Existe-t-il une factorisation pour de $P(x)$?
c) Cela contredit-il le théorème de factorisation ? Expliquer.

Question 16
Soit $P(x)$ un polynôme de degré 5. En supposant que tous les zéros sont différents, déterminer le nombre de zéro que ce polynôme pourrait avoir.

Solutions

Question 1

(a) Appliquer la même fonction ($f(A) = A - 4x$) à chaque même de l'égalité.
(b) Transitivité de l'égalité (Si $A = B$ et $A = C$, alors $C = B$).
(c) Si le produit (x-2)(x-2) est nul, alors un des facteurs (x-2) doit être nul.
(d) Appliquer la même fonction ($g(A) = A + 2$) à chaque membre de l'égalité.

Question 2

a)

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{A} - \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A} + \sqrt{B}\right)\\
&= \sqrt{A}\left(\sqrt{A} + \sqrt{B}\right) - \sqrt{B}\left(\sqrt{A} + \sqrt{B}\right)\\
&= \sqrt{A}\sqrt{A} + \sqrt{A}\sqrt{B} - \sqrt{B}\sqrt{A} - \sqrt{B}\sqrt{B}\\
&= \sqrt{A}\sqrt{A} + \left(\sqrt{A}\sqrt{B} - \sqrt{A}\sqrt{B}\right) - \sqrt{B}\sqrt{B}\\
&= \sqrt{A}\sqrt{A} + 0 - \sqrt{B}\sqrt{B}\\
&= \sqrt{A}\sqrt{A} - \sqrt{B}\sqrt{B}\\
&= A - B
\end{aligned}$$

b) L'identité algébrique pour une différence de carré est

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

Si on substitue $\sqrt{A}$ à A et $\sqrt{B}$ à B, on obtient

$$\left(\sqrt{A}\right)^2 - \left(\sqrt{B}\right)^2 = \left(\sqrt{A} - \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A} + \sqrt{B}\right).$$

Comme $\left(\sqrt{A}\right)^2 = A$ et $\left(\sqrt{B}\right)^2 = B$, on a obtient l'identité demandée :

$$A - B = \left(\sqrt{A} - \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A} + \sqrt{B}\right).$$

Question 3

a) $x = \frac{9}{22}$
b) $x = -\dfrac{26}{11}$
c) $x = -\frac{7}{2}$
d) $x = \frac{35}{8}$
e) $x = 1$ ou $x = 0$. (Si vous n'avez pas obtenu la solution $x = 0$, vous avez probablement divisé par x sans vous assurer que $x \neq 0$. Il faut traiter ce cas séparément.)
f) $x = 3\sqrt{2}$ (utilisez $\sqrt{6}\sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$)
g) $x = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ ou $\frac{5}{\sqrt{3}}$. (Utiliser $\sqrt{15} = \sqrt{3}\sqrt{5}$)
h) $x = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$
i) $x = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$

Question 4

a) $\frac{1}{2^3}$
b) $\sqrt{2}$
c) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$
d) $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$
e) $\sqrt{2^3}$
f) $\dfrac{1}{10}$
g) $\frac{1}{2^2}$
h) $2^{-1} = \frac{1}{2}$
i) $\sqrt[6]{2}$
j) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$
k) $\dfrac{1}{\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2}$
l) $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ et non $\sqrt{3^2} + \sqrt{4^2} = 3 + 4 = 7$.
m) 4

Question 5

a) x^{-3}
b) $2x^{-3}$
c) $\dfrac{2}{3}x^{-5}$
d) $(x-3)^{-2}$
e) $7(x+1)^{-6}$
f) $x^{1/2}$
g) $(x-2)^{1/3}$
h) $\dfrac{1}{5}(x+2)^{1/4}$
i) $x^{-1/2}$
j) $2x^{-1/3}$
k) $\dfrac{2}{3}x^{-1/5}$
l) $x^{3/2}$
m) $(x-3)^{5/4}$
n) $x^{-3/2}$
o) $\dfrac{4}{3}x^{-4/5}$
p) $4(x-3/2)^2$
q) $8x^3$
r) $8(x-1/2)^3$
s) $2(x-1/4)^{-1/2}$
t) $(x-2)^{3/2}$
u) $\dfrac{3}{4}(x+1)^{2/3}$
v) $\dfrac{2}{5}(x+1)^{-3/10}$

Question 6

a) $(4x-3)(x^2+1)$
b) $(x+2)(x+3)$
c) $(3x+2)^2$
d) $(4x-9)(4x+9)$
e) x^2+25
f) $3x(x-6)(x+6)$
g) $2x^3(9x^2+16)$
h) $(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$

Question 7

a) $x^2+x-6=0 \iff (x-2)(x+3)=0$ donc $x=2$ et $x=-3$ sont les deux solutions.
b) $3x^2+x-2=0 \iff (3x-2)(x+1)=0$ donc $x=\frac{2}{3}$ et $x=-1$ sont les deux solutions
c) $x^2-16=0 \iff (x-4)(x+4)=0$ donc les solutions sont $x=4$ et $x=-4$.
d) $9x^2-25=0 \iff (3x-5)(3x+5)=0$ donc les solutions sont $x=\frac{5}{3}$ et $x=-\frac{5}{3}$.
e) $x^4-x^3=0 \iff x^3(x-1)=0$ donc les solutions sont $x=0$ et $x=1$.
f) $x=-3$ et $x=-4$
g) $x=-\frac{3}{2}$ et $x=\frac{3}{2}$
h) $x=-\frac{5}{3}$ et $x=0$
i) L'équation n'a pas de solution car x^2+100 est toujours >0.

Question 8

a) La équation n'a pas de solution
b) $x=\frac{4}{3}$ et $x=\frac{3}{2}$
c) L'équation n'a pas de solutions
d) $x=\frac{1}{3}$ (zéro double)

Question 9

a) $x+1$
b) $x-1$
c) $x+1$ reste 2
d) x^2+x+1
e) x reste $x-1$
f) x^3-2x+1
g) x^4+2x^2+1 reste 1

Question 10

a) $\dfrac{(x+1)^4}{x^2+2x+1} = \dfrac{(x+1)^4}{(x+1)^2} = (x+1)^2$
b) $\dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$
c) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+4x+3} = \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x+3)} = \dfrac{x-2}{x+1}$
d) $(x-2)^2(2x+1)^2\big((x-2)+(2x+1)\big) = (x-2)^2(2x+1)^2(3x-1)$
e) $(x-1)^9(x^2+2)^5 + (x-1)^8(x^2+2)^6 = (x-1)^8(x^2+2)^5\big((x-1)+(x^2+2)\big) = (x-1)^8(x^2+2)^5(x^2+x+1)$
f) $\dfrac{(x-2)^3(x-1)^4-(x-2)^4(x-1)^3}{x^2-x-2} = \dfrac{(x-2)^3(x-1)^3\big((x-1)-(x-2)\big)}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{(x-2)^2(x-1)^3}{x+1}$

Question 11

a) $P(x) = (x-2)(x^2+3x+4)$. Note : x^2+3x+4 est premier car $\Delta = 3^2 - 4(1)(4) < 0$.
b) $P(x) = (x+2)(x^2+2x+2)$. Note : x^2+2x+2 est premier car $\Delta = 2^2 - 4(1)(2) < 0$.
c) $P(x) = (x-2)(x^2-2x-3) = (x-2)(x-3)(x+1)$.
d) $P(x) = (x+1)(x^3-8) = (x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$. Note : x^2+2x+4 est premier car $\Delta = 2^2-4(1)(4) < 0$

Question 12

a) Faux, car il peut y avoir des facteurs de degré deux de la forme ax^2+bc+x
b) Faux. $\Delta = 1^1 - 4(1)(-6) > 0$.

Question 13

a) Non, car le facteur x^2-x+5 n'a pas de zéro : le discriminant $\Delta = b^2-4ac$ est négatif, il n'y a donc pas de zéros.
b) Laissé à l'étudiant.
c) Il n'y en a pas d'autres, d'après la factorisation.

Question 14

a) $(x-2)$ n'est pas un facteur de $P(x)$
b) Oui

Question 15

a) Chacun des termes de x^4+3x^2+2 consistent en une puissance paire de x avec un facteur positif, les valeurs prises par $P(x)$ sont donc toujours strictement positives. Elle n'admet donc pas de zéros.
b) Il existe une factorisation : $(x^2+1)(x^2+2)$. On peut la trouver en posant $y = x^2$ et en factorisant y^2+3y+2.
c) Chacun des facteurs de ce polynôme est irréductible. $P(x)$ n'a donc pas de facteur du premier degré, donc le théorème n'est pas contredit.

Question 16

Comme $P(x)$ se factorise en facteurs de degrés 1 ou 2 par le théorème fondamental de l'algèbre et que le degré du produit de ces facteur est la somme de leur degrés, une factorisation est possible seulement elle correspond à une décomposition de 5 en une somme des nombres 1 et 2. Il y a trois manières de faire une telle décomposition :

$$5 = 1+1+1+1+1$$
$$5 = 2+1+1+1$$
$$5 = 2+2+1$$

il y a trois factorisation possible Par le théorème de factorisation, chaque zéro distinct correspond à un facteur de degré 1.

$P(x)$ peut donc avoir 1, 3 ou 5 zéros différents.