

# Exercices révision et notions préliminaires — fonctions

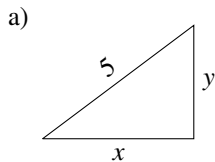
Calcul différentiel – Automne 2020 – Yannick Delbecque

## Fonctions

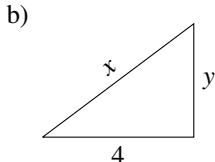
### Fonctions et relations

#### Question 1

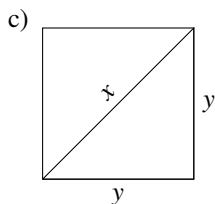
Exprimer algébriquement la variable dépendante en fonction de la variable indépendante en utilisant les relations géométrique déterminée par les figures suivantes. Note : considérez tout les angles en radians et que les longueurs sont positives. Toutes les dimensions autres que indépendante et dépendante sont considérées comme des constantes.



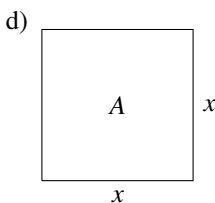
Variable dépendante  $y$ ,  
variable indépendante  $x$ .



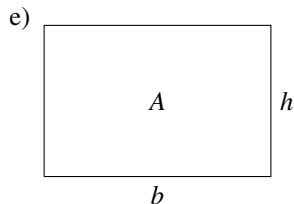
Variable dépendante  $y$ ,  
variable indépendante  $x$ .



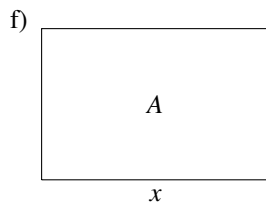
Variable dépendante  $y$ ,  
variable indépendante  $x$ .



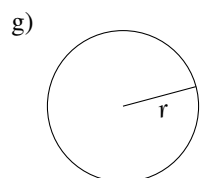
Variable dépendante  $x$  (côté),  
variable indépendante  $A$  (aire).



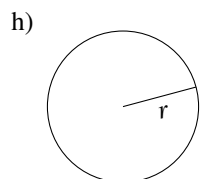
Variable dépendante  $b$  (côté),  
variable indépendante  $A$  (aire).



Périmètre fixe = 10.  
Variable dépendante  $A$  (aire),  
variable indépendante  $b$  (côté)



Variable dépendante  $A$  (aire),  
variable indépendante  $r$  (rayon)



Variable dépendante  $r$  (rayon)  
Variable indépendante  $A$  (aire).

#### Question 2

Substituer (sans simplifier)...

- a)  $y$  à  $x$  dans  $x^2 + 3x + 4$       e)  $x + \Delta x$  à  $x$  dans  $x^2 + 3x + 4$   
 b)  $y + 1$  à  $x$  dans  $x^2 + 3x + 4$       f)  $x + \Delta x$  à  $x$  dans  $\frac{1}{x^2 + 1}$   
 c)  $y + h$  à  $x$  dans  $x^2 + 3x + 4$       g)  $x + \Delta x$  à  $x$  dans  $\frac{1}{(x + 1)^2}$   
 d)  $x^2$  à  $x$  dans  $x^2 + 3x + 4$

#### Question 3

Déterminer lesquelles des équations suivantes définissent des fonctions si on considère  $x$  comme variable indépendante et  $y$  comme variable dépendante. Si l'équation donnée définit une fonction, donner la règle de correspondance et son domaine de définition.

- a)  $yx = 1$       d)  $x + y^2 = 1$       g)  $2x^2 - y + 8 = 3x$   
 b)  $x + y = 1$       e)  $x^2 + y = 1$       h)  $\frac{1}{y} = \frac{1}{x^2}$   
 c)  $x^2 + y^2 = 1$       f)  $x^3 + y^3 = 0$

### Évaluation de fonction

#### Question 4

Évaluer...

- a)  $f(3)$  si  $f(x) = x^3$       j)  $f(1)$  si  $f(x) = x^{5/2}$   
 b)  $f(1)$  si  $f(x) = x^{3/2}$       k)  $f(x + \Delta x)$  si  $f(x) = x^{5/2}$   
 c)  $f(9)$  si  $f(x) = x^{3/2}$       l)  $f(2)$  si  $f(x) = \log(x - 1)$   
 d)  $f(\sqrt[3]{2})$  si  $f(x) = x^{3/2}$       m)  $f(0)$  si  $f(x) = 2^{(x-1)}$   
 e)  $f(2)$  si  $f(x) = 2^{2/3} x^{1/3}$       n)  $f(-1)$  si  $f(x) = \frac{1}{x+1}$   
 f)  $f(1 + h)$  si  $f(x) = x^2$       o)  $f(1)$  si  $f(x) = 2^{(x-1)}$   
 g)  $f(3 + \Delta x)$  si  $f(x) = x^3$       p)  $f(x + \Delta x)$  si  $f(x) = x - 1$   
 h)  $f(y)$  si  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$       q)  $f(x + \Delta x)$  si  $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$   
 i)  $f(y + \Delta x)$  si  $f(x) = \frac{1}{x}$       r)  $f(x + \Delta x)$  si  $f(x) = (x + 1)^2 - x$

### Composition

#### Question 5

Considérons les fonctions définie par  $f(x) = 2x$ ,  $g(x) = x^2$  et  $h(x) = \frac{1}{x+1}$ . Évaluer les expressions suivantes.

- a)  $3f(x) - 5$       d)  $f(x)g(x)$       g)  $[f \circ g \circ h](x)$   
 b)  $f(3x - 5)$       e)  $f(g(x))$       h)  $[h \circ g \circ f](x)$   
 c)  $f(x) + h(x)$       f)  $g(f(x))$       i)  $[g \circ h \circ f](x)$

## Graphes

### Question 6

Trouver les zéros des fonctions polynomiales et rationnelles suivantes.

- a)  $f(x) = 4x - 3$                       d)  $f(x) = (x - 1)(x + 1)$   
 b)  $f(x) = 2$                               e)  $f(x) = x(x - 1)(x + \sqrt{2})$   
 c)  $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$                 f)  $f(x) = \frac{(x - 2)(x + 1)}{x^2 + 3}$

### Question 7

Déterminer les points de croisement avec les axes des fonctions suivantes.

- a)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$                       d)  $f(x) = x^4 - 16$   
 b)  $f(x) = (x - 3\sqrt{3})^{2/3}$                 e)  $f(x) = x^3 + 27$   
 c)  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$             f)  $f(x) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$

## Droites

### Question 8

Déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine des droites suivantes.

- a) La droite d'équation  $3x + 2y = 1$ .  
 b) La droite d'équation  $\frac{x}{5} + \frac{2y}{3} = 1$ .  
 c) La droite d'équation  $y = -3(x - 2) + 1$   
 d) La droite d'équation  $\sqrt{2}x + \log_2(3)y = \sqrt{3}$

### Question 9

Donner l'équation de la droite...

- a) de pente  $-5$  qui passe par le point  $(-3, 4)$ ;  
 b) passant par les points  $(-2, 4)$  et  $(1, -5)$ ;  
 c) parallèle à la droite trouvée en a) qui passe par le point  $(1, -2)$ .

### Question 10

Quelle est la pente de la droite passant par les points correspondants aux valeurs  $x = 2$  et  $x = 3$  du graphe de la fonction  $f(x) = x^3$ ?

### Question 11

Quelle est la pente de la droite passant par les points correspondants aux valeurs  $x = 2$  et  $x = 2 + \Delta x$  du graphe de la fonction  $f(x) = x^2$ ?

### Question 12

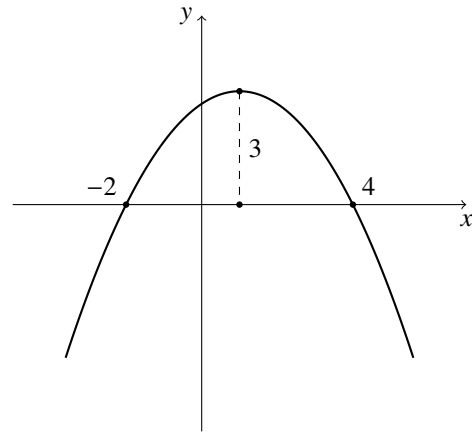
Soit la fonction définie par  $f(x) = x^3 - 4x$ .

- a) Donner l'équation de la droite passant par  $(-1, f(-1))$  et  $(2, f(2))$ .  
 b) Vérifier que le point  $(1, -3)$  est sur le graphe de  $f$ .  
 c) Donner l'équation de la droite passant par  $(1, -3)$  et  $(2, f(2))$ .

## Paraboles

### Question 13

Déterminer quelle fonction quadratique de la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c$  est illustrée dans le graphe suivant.



### Question 14

Faire une esquisse des paraboles définies par les équations suivantes.

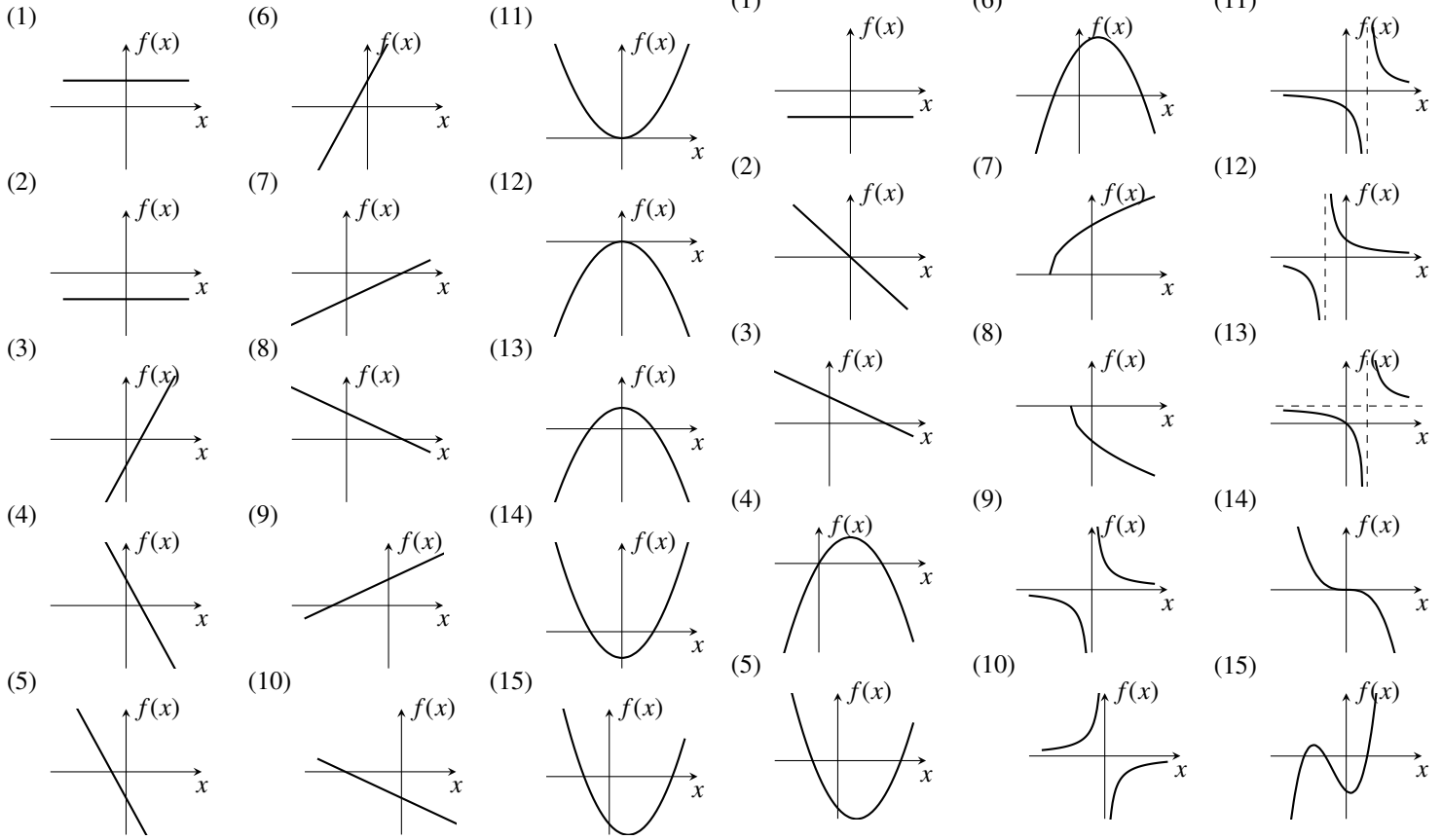
- a)  $y = x^2 - 2$                               f)  $y = (x - 1)^2$   
 b)  $y = 4 - x^2$                             g)  $y = (x + 1)^2 - 1$   
 c)  $y = (x - 1)(x + 2)$                 h)  $y = -(x - 1)(x - 3)$   
 d)  $y = -(x - 2)(x + 1)$               i)  $y = 1 - (x + 1)^2$   
 e)  $y = x(x - 3)$

## Graphes de fonctions en général

### Question 15

Pour chacune des fonctions suivantes, identifier le graphe correspondant parmi les graphes (1) – (15).

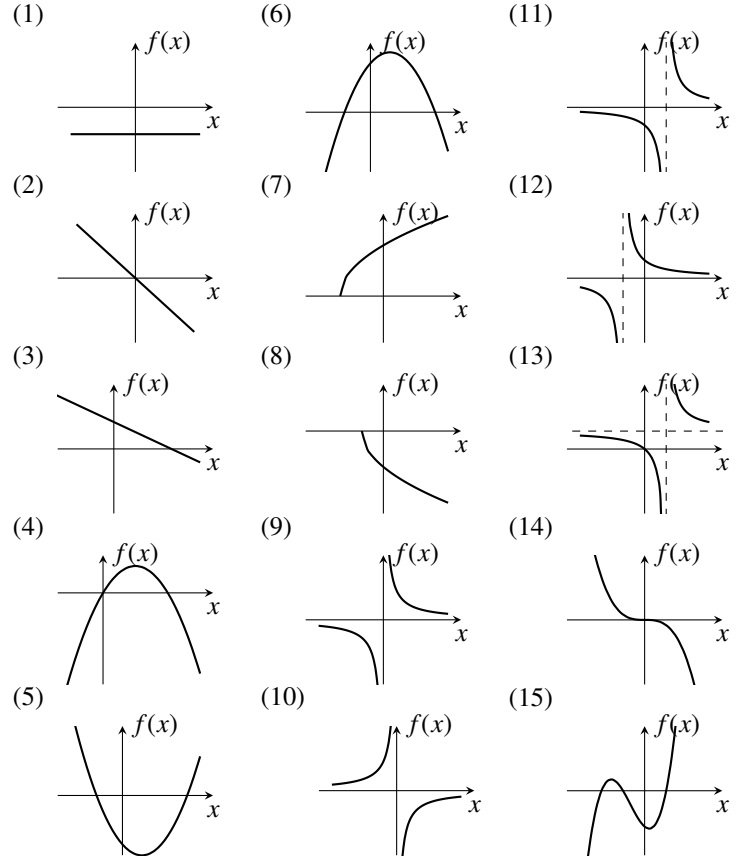
- |                             |                            |
|-----------------------------|----------------------------|
| a) $f(x) = 2x + 1$          | d) $f(x) = -1$             |
| b) $f(x) = 1 - x^2$         | e) $f(x) = -x^2$           |
| c) $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ | f) $f(x) = (x - 1)(x + 3)$ |



### Question 16

Pour chacune des fonctions suivantes, identifier le graphe correspondant parmi les graphes (1) – (15).

- |                           |                                   |
|---------------------------|-----------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{1}{x}$   | d) $f(x) = \sqrt{x-2}$            |
| b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ | e) $f(x) = -x^3$                  |
| c) $f(x) = -x$            | f) $f(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$ |



### Question 17

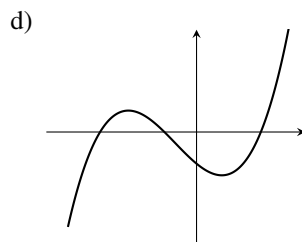
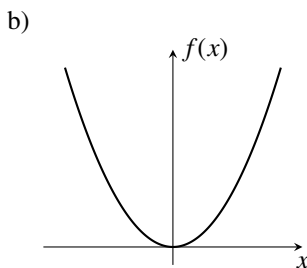
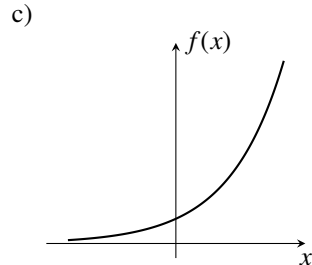
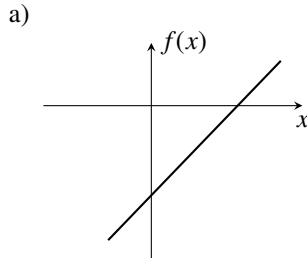
Faire une esquisse du graphe des fonctions suivantes.

- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| a) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$     | e) $f(x) = -(x + \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{2}$ |
| b) $f(x) = \frac{1}{x}$       | f) $f(x) = \sqrt{x}$                      |
| c) $f(x) = -\frac{1}{x-1}$    | g) $f(x) = \sqrt{x-1}$                    |
| d) $f(x) = \frac{1}{x+2} - 1$ | h) $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$                |

## Fonctions réciproques

### Question 18

Tracer, si possible le graphe de la fonction réciproque des fonctions dont les graphes sont les suivants.



### Question 19

Déterminer si les fonctions  $f$  et  $g$  suivantes sont des fonctions inverses l'une de l'autre.

a)  $f(x) = 2x - 3$  et  $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

b)  $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$  et  $g(x) = x^3 - 1$

c)  $f(x) = \frac{2x+1}{3x-2}$  et  $g(x) = \frac{2x+1}{3x-2}$

## Domaine

### Question 20 (4×3 points)

Vrai ou faux ?

a)  $\frac{x^2 + x + 1}{(x-2)(x+3)}$  est défini si et seulement si  $x \leq -3$  ou  $2 \leq x$ .

b)  $\sqrt{x-2}$  est défini si et seulement si  $0 \leq \sqrt{x-2}$ .

### Question 21

Déterminer l'ensemble des valeurs de  $x$  qui satisfont les inégalités suivantes.

a)  $x + 3 \leq 5$

b)  $1 \leq 2x + 3$

c)  $x + 2 < 0$

d)  $x + 3 \leq 5$

e)  $\frac{2-3x}{5} \leq 4$

f)  $x + 2 \geq 0$  et  $2x - 3 \geq 0$

g)  $x + 2 \geq 0$  ou  $2x - 3 \geq 0$

h)  $0 \leq x^2 - 4$

i)  $0 \leq 4 - x^2$

j)  $0 \leq (x-1)(x+2)$

k)  $0 \leq (x-1)^2 - 1$

### Question 22

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

a)  $f(x) = x^{100} + x^{50} + 1$

b)  $f(x) = \frac{1}{2x-3}$

c)  $f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+2)}$

d)  $f(x) = \frac{3x-1}{2x+5}$

e)  $f(x) = \frac{2}{x^2-16}$

f)  $f(x) = \frac{3}{(x-4)^2}$

g)  $f(x) = \frac{2x^2-3x-5}{x^2-x-2}$

h)  $f(x) = \sqrt{x-1}$

i)  $f(x) = \sqrt{2x-5}$

j)  $f(x) = \sqrt{x^3}$

k)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3}$

l)  $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

m)  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

n)  $f(x) = \sqrt{(x^2+1)}$

o)  $f(x) = \sqrt{x^2-2x-3}$

p)  $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$

q)  $f(x) = \frac{-x+2}{x^3-x^2+5x}$

r)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x-5}}$

## Solutions

### Question 1

- a)  $y = \sqrt{25 - x^2}$
- b)  $y = \sqrt{x^2 - 16}$
- c)  $y = x/\sqrt{2}$
- d)  $x = \sqrt{A}$
- e)  $h = \frac{A}{h}$
- f)  $A = x(5-x)$
- g)  $A = \pi r^2$
- h)  $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

### Question 2

- a)  $y^2 + 3y + 4$
- b)  $(y+1)^2 + 3(y+1) + 4$
- c)  $(y+h)^2 + 3(y+h) + 4$
- d)  $(x^2)^2 + 3(x) + 4$
- e)  $(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) + 4$
- f)  $\frac{1}{(x+\Delta x)^2 + 1}$
- g)  $\frac{1}{((x+\Delta x)+1)^2}$

### Question 3

- a)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- b)  $f(x) = 1 - x$ ,  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$
- c)  $y$  pas une fonction de  $x$  car  $y = \pm \sqrt{1-x^2}$  peut prendre deux valeurs différentes.
- d) En isolant, on trouve :  $y = \pm \sqrt{1-x}$ , ce qui ne définit pas une fonction.
- e) En isolant, on trouve :  $y = 1 - x^2$ , ce qui définit une fonction dont le domaine est  $\mathbb{R}$ .
- f)  $f(x) = -x$ ,  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$
- g)  $f(x) = 2x^2 - 3x + 8$ ,  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ .
- h)  $f(x) = x^2$ ,  $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

### Question 4

- a) 27
- b) 1
- c) 27
- d)  $\sqrt{2}$
- e) 2
- f)  $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$
- g)  $(3+\Delta x)^3 = 27 + 27\Delta x + 9\Delta x^2 + \Delta x^3$
- h)  $\sqrt{y^2 + 1}$
- i)  $\frac{1}{y+\Delta y}$
- j) 1
- k)  $(x+\Delta x)^{5/2}$
- l) 0
- m)  $1/2$
- n) Non défini (division par zéro).
- o) 1

- p)  $(x+\Delta x) - 1$
- q)  $\frac{1}{(x+\Delta x)^2} - 1$
- r)  $((x+\Delta x)+1)^2 - (x+\Delta x)$

### Question 5

- a)  $6x - 5$
- b)  $6x - 10$
- c)  $2x + \frac{1}{x+1}$
- d)  $2x^3$
- e)  $2x^2$
- f)  $4x^2$
- g)  $\frac{2}{(x+1)^2}$
- h)  $\frac{1}{4x^2+1}$
- i)  $\frac{1}{(2x+1)^2}$

### Question 6

- a)  $x=3/4$
- b) aucun zéro
- c)  $x=2$  et  $x=1/2$
- d)  $x=1$  et  $x=-1$
- e)  $x=0, x=1$  et  $x=-\sqrt{2}$
- f)  $x=2$  et  $x=-1$

### Question 7

- a) Ne croise pas l'axe des  $y$ ,  $x = \pm 2$
- b)  $y=3$ ,  $x=3\sqrt{3}$
- c)  $y=2$ ,  $x=-1$  ou  $4$
- d)  $y=-16$ ,  $x=-2$  ou  $2$
- e)  $y=27$ ,  $x=-3$
- f) Ne croise pas l'axe des  $y$ ,  $x=-1/2$

### Question 8

- a) Équation de la droite :  $y = -3x/2 + 1/2$ . Pente =  $-3/2$ , ordonnée à l'origine =  $1/2$
- b) Équation de la droite :  $y = -\frac{3}{10}x + \frac{3}{2}$ . Pente =  $-3/10$ , ordonnée à l'origine =  $3/2$
- c) Équation de la droite :  $y = -3x + 7$ . Pente =  $-3$ , ordonnée à l'origine =  $7$
- d) Équation de la droite :  $y = -\frac{\sqrt{2}}{\log_2(3)}x + \frac{\sqrt{3}}{\log_2(3)}$ . Pente =  $-\frac{\sqrt{2}}{\log_2(3)}$ , ordonnée à l'origine =  $\frac{\sqrt{3}}{\log_2(3)}$

### Question 9

- a)  $y = -5x - 11$
- b)  $y = -3x - 2$
- c)  $y = -5x + 3$

### Question 10

$$\frac{3^3 - 2^3}{3 - 2} = 27 - 8 = 19$$

### Question 11

$$\frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{(2+\Delta x) - 2} = \frac{4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

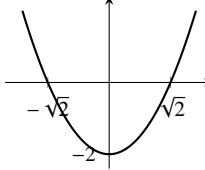
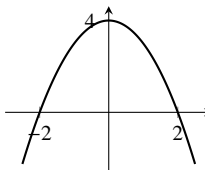
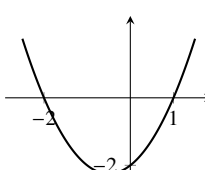
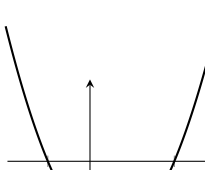
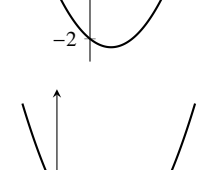
### Question 12

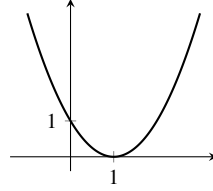
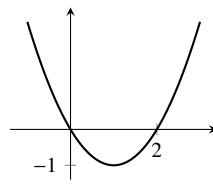
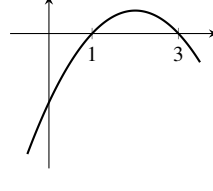
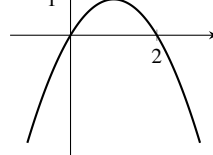
- a)  $y = -x + 2$
- b)  $f(1) = 1^3 - 4(1) = -3$
- c)  $y = -3x - 6$

### Question 13

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

### Question 14

- a) 
- b) 
- c) 
- d) 
- e) 

- f) 
- g) 
- h) 
- i) 

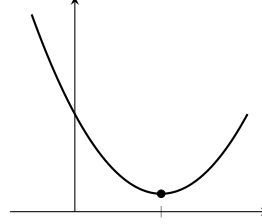
### Question 15

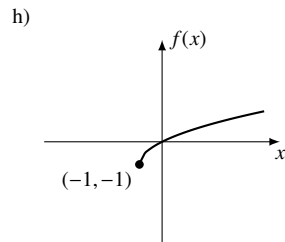
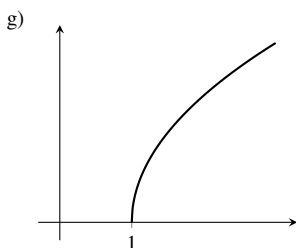
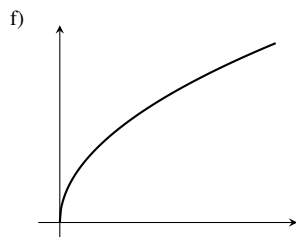
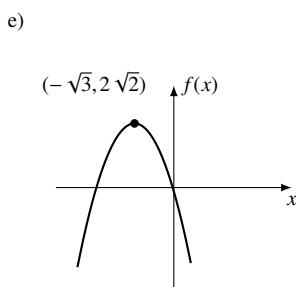
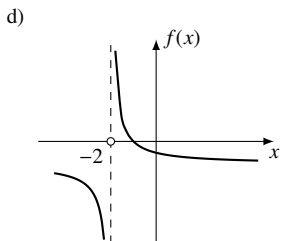
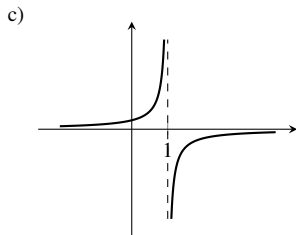
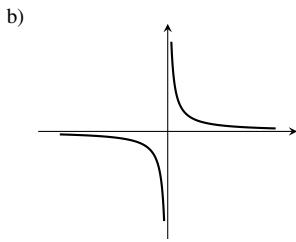
- a) (3)
- b) (13)
- c) (10)
- d) (1)
- e) (12)
- f) (15)

### Question 16

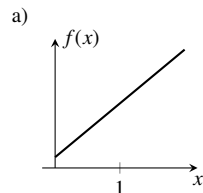
- a) (9)
- b) (12)
- c) (2)
- d) (7)
- e) (14)
- f) (15)

### Question 17

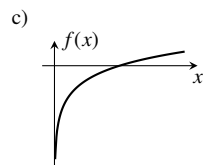
- a) 



### Question 18



b) Pas de fonction réciproque car le graphe obtenu par réflexion par la droite  $y = x$  n'est pas une fonction.



d) Pas de fonction réciproque.

### Question 19

a)  $f(g(x)) = 2\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right) - 3 = x$  et  $g(f(x)) = \frac{2x-3}{2} + \frac{3}{2} = x$ , donc  $f$  et  $g$  sont des fonctions inverses.

b)  $f$  et  $g$  sont des fonctions inverses

c)  $f$  et  $g$  sont des fonctions inverses

### Question 20

a) Faux.

b) Faux, car  $\sqrt{x-2}$  est toujours positif quand défini. La condition est plutôt que  $0 \leq x-2$ .

### Question 21

a)  $x-2 \leq 5 \iff x \leq 7 \iff x \in ]-\infty, 7]$

b)  $1 \leq 2x+3 \iff -2 \leq 2x \iff -1 \leq x \iff x \in [-1, \infty[$

c)  $x+2 < 0 \iff x < -2 \iff x \in ]-\infty, -2[$

d)  $-x+1 \leq 0 \iff -x \leq -1 \iff x \geq 1 \iff x \in [1, \infty[$

e)  $\frac{2-3x}{5} \leq 4 \iff 2-3x \leq 20 \iff -3x \leq 18 \iff x \geq \frac{18}{-3} = -6 \iff x \in ]-\infty, -6]$

$x+2 \geq 0$  et  $2x-3 \geq 0$

$\iff x \geq -2$  et  $2x \geq 3$

$\iff x \geq -2$  et  $x \geq \frac{3}{2}$

f)  $\implies x \geq \frac{3}{2}$

$\iff x \in \left[\frac{3}{2}, \infty\right[$

g)

$x+2 \geq 0$  ou  $2x-3 \geq 0$

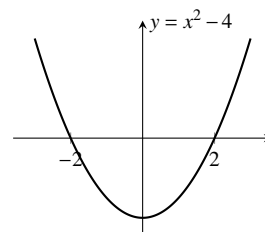
$\iff x \geq -2$  ou  $2x \geq 3$

$\iff x \geq -2$  ou  $x \geq \frac{3}{2}$

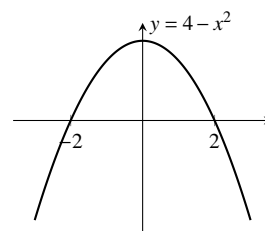
$\implies x \geq -2$

$\iff x \in [-2, \infty[$

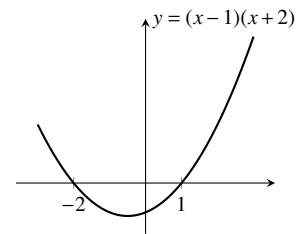
h)  $0 \leq x^2 - 4 \iff 4 \leq x^2 \iff x \leq -2$  ou  $2 \leq x \iff x \in ]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$



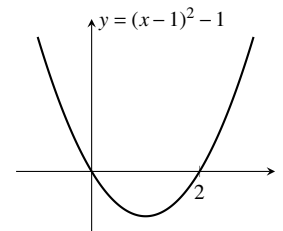
i)  $0 \leq 4 - x^2 \iff x^2 \leq 4 \iff -2 \leq x \leq 2 \iff x \in [-2, 2]$



j)  $0 \leq (x-1)(x+2) \iff x \leq -2$  ou  $1 \leq x \iff x \in ]-\infty, -2] \cap [1, \infty[$



k)  $0 \leq (x-1)^2 - 1 \iff x \leq 0$  et  $2 \leq x \iff x \in ]-\infty, 0] \cup [2, \infty[$



### Question 22

a)  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

b)  $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3/2\}$

c)  $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$

d)  $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-5/2\}$

e)  $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$

f)  $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

g)  $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2, -1\}$

h)  $\text{dom}(f) = [1, \infty[$

i)  $\text{dom}(f) = [5/2, \infty[$

j)  $\text{dom}(f) = [0, \infty[$

k)  $\text{dom}(f) = [1, \infty[$

l)  $\text{dom}(f) = ]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$

m)  $\text{dom}(f) = [-1, 1]$

n)  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

o)  $\text{dom}(f) = ]-\infty, -1] \cup [3, \infty[$

p)  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

q)  $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

r)  $\text{dom}(f) = ]-\infty, -1] \cup [5, \infty[$