Exercices sur la règle de chaine

Calcul différentiel – Automne 2020 – Yannick Delbecque

Dérivée de fonctions composées

Question 1

Soient les fonctions $z = g(y) = y^3$ et $y = f(x) = x^2 + x + 1$.

a) Évaluer $g'(f(x))f'(x)$.

b) Évaluer $\frac{dz}{dy}$ et $\frac{dy}{dx}$ et vérifier que le produit

$$\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dz}.$$

donne le même résultat qu'en a) si on exprime le résultats en fonction de x.

Question 2

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \left(x^3 - 1\right)^7$

b) $f(t) = \left(3x^2 - x + 1\right)^5$

c) $f(t) = (2x+1)^{99}$

d) $g(t) = \left(1 - 5t^4\right)^{10}$

e) $y = \left(5x^2 - 3x + 2\right)^{\frac{7}{2}}$

f) $f(x) = \sqrt{x^5 + 1}$

g) $f(x) = 5\sqrt[3]{8 - x}$

h) $y = (2-x)^5\,(7x+3)$

i) $y = x^2 + \sqrt{3x - 1}$

j) $y = x^2\sqrt{3x - 1}$

k) $y = 5\sqrt[3]{2x^2 + 5x + 7}$

l) $g(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

m) $y = 7\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)$

n) $x(t) = \sqrt{\frac{mt}{1+t}}$ (m est une constante)

Question 3

Soit les fonctions définies par $z = \frac{1}{y}$, $y = \sqrt{x}$ et $x = 6t^2 - 5t$. Calculer les dérivées suivantes.

a) $\frac{dx}{dt}$ et $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=2}$

b) $\frac{dz}{dy}$ et $\left.\frac{dz}{dy}\right|_{y=-3}$

c) $\frac{dx}{dt}$ et $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=2}$

d) $\frac{dz}{dy}$ et $\left.\frac{dz}{dy}\right|_{y=-3}$

e) $\frac{dy}{dt}$ et $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=-1}$

f) $\frac{dz}{dx}$ et $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=\frac{1}{9}}$

Question 4

Calculer la dérivée des fonctions suivantes **sans utiliser la règle de Leibnitz ou du quotient**.

a) $y = 17(x-2)^{10}$

b) $f(x) = \frac{5}{2(3x-1)^{10}}$

c) $y = \frac{-17}{3\,(x^2 - x + 6)}$

d) $y = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2 + 4x + 2}}$

Question 5

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \left[\left(x^3 + 2x\right)^4 + 3x\right]^5$

b) $y = (3x+4)^{14}\left(x^2 - 2\right)^{18}$

c) $f(t) = \sqrt{(2t+\pi)^3(2-5t)}$

d) $y = \frac{\left(2x^3 + 1\right)^3}{\sqrt{x+3}}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{3x+1}}$

Question 6

Si $y = \sqrt{x^2+1}$, que vaut $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}$? Déterminer l'équation de la droite tangente à la fonction y en $x = 2$.

Question 7

Soit la fonction $f(x) = (4x-9)^2 + 3$. Déterminer la ou les valeurs de a telles que la droite tangente à la courbe de f en $x = a$ et les axes forment un triangle isocèle.

Question 8

Soient $z = y^3$ et y une fonction de x non spécifiée, mais telle que $\frac{dy}{dx} = 5$ quand $y = 2$. Déterminer $\frac{dz}{dx}$ quand $y = 2$ à en utilisant la règle de chaine :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Question 9

On a observé que la masse m (en kilogrammes) d'un poisson d'une certaine espèce dépend de sa longueur L (en mètres) par la fonction $m = 4L^2$. Supposons que le taux de croissance de la longueur par rapport au temps (en années) est de $(0,3 - 0,2L)$ m/an.

a) Trouver l'expression de $\frac{dm}{dt}$ en fonction de L. Indiquer les unités.

b) Évaluer $\left.\frac{dm}{dt}\right|_{m=4}$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte donné.

Question 10

En utilisant la formule de la dérivée d'un produit de deux fonctions, montrer que

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Question 11
Nous avons montré en classe que $(x^n)' = nx^{n-1}$ était valide lorsque n est un entier naturel.

a) En utilisant la formule de la dérivée du quotient, montrer que cette formule est valide lorsque n est négatif (donc si $n = -k$ avec k positif.)

b) En utilisant la dérivée implicite, montrer que cette formule est valide lorsque n est une fraction du type $\frac{1}{k}$, avec k naturel.

c) Montrer ensuite à l'aide de la dérivée d'une fonction composée que la formule est valide lorsque n est une fraction $\frac{a}{b}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

Solutions

Question 1

a) Comme $g'(x) = 3x^2$, on a que $g'(f(x)) = g'(x^2 + x + 1) = 3(x^2 + x + 1)^2$. Comme $f'(x) = 2x + 1$, on a enfin que

$$g'(f(x))f'(x) = 3(x^2 + x + 1)^2(2x + 1)$$

b) $\dfrac{dz}{dy} = 3y^2$ et $\dfrac{dy}{dx} = 2x + 1$. Le produit est donc

$$\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = (3y^2)(2x + 1)$$

Comme $y = x^2 + x + 1$, on a que

$$\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = (3(x^2 + x + 1)^2)(2x + 1).$$

Question 2

a) $\dfrac{dy}{dx} = 21x^2\left(x^3 - 1\right)^6$

b) $f'(t) = 5\left(3x^2 - x + 1\right)^4(6x - 1)$

c) $f'(t) = 99\,(2x + 1)^{98}\,(2) = 198\,(2x + 1)^{98}$

d) $g'(t) = -200t^3\left(1 - 5t^4\right)^9$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{7}{2}\left(5x^2 - 3x + 2\right)^{\frac{5}{2}}(10x - 3)$

f) $f'(x) = \dfrac{5x^4}{2\sqrt{x^5 + 1}}$

g) $f'(x) = \dfrac{-5}{3\sqrt[3]{(8 - x)^2}}$

h) $\dfrac{dy}{dx} = (2 - x)^4(-42x - 1)$

i) $\dfrac{dy}{dx} = 2x + \dfrac{3}{2\sqrt{3x - 1}}$

j) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{15x^2 - 4x}{2\sqrt{3x - 1}}$

k) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{20x + 25}{3\sqrt[3]{(2x^2 + 5x + 7)^2}}$

l) $g'(x) = -\dfrac{6(x + 1)^2}{(x - 1)^4}$

m) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-112x}{(x^2 - 4)^2}$

n) $x'(t) = \dfrac{m}{2(1 + t)^2}\sqrt{\dfrac{1 + t}{mt}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m}{t(1 + t)^3}}$

Question 3

a) $\dfrac{dx}{dt} = 12t - 5$ et $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=2} = 19$

b) $\dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{1}{y^2}$ et $\left.\dfrac{dz}{dy}\right|_{y=-3} = -\dfrac{1}{9}$

c) $\dfrac{dx}{dt} = 12t - 5$ et $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=2} = 19$

d) $\dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{1}{y^2}$ et $\left.\dfrac{dz}{dy}\right|_{y=-3} = -\dfrac{1}{9}$

e) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{12t - 5}{2\sqrt{6t^2 - 5t}}$ et $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=-1} = -\dfrac{17}{2\sqrt{11}}$

f) $\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ et $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=\frac{1}{9}} = -\dfrac{27}{2}$

Question 4

a)

$$\begin{aligned}
y' &= \left(17(x - 2)^{10}\right)' \\
&= 17\left((x - 2)^{10}\right)' \\
&= 17\left(10(x - 2)^9\right)(x - 2)' \\
&= 170(x - 2)^9
\end{aligned}$$

b) $f'(x) = \left(\frac{5}{2}(3x - 1)^{-10}\right)' = -\frac{50}{2}(3x - 1)^{-11}(3) = -\frac{150}{2(3x-1)^{11}}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{34x - 17}{3\left(x^2 - x + 6\right)^2}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-8(x + 2)}{3\sqrt[3]{(x^2 + 4x + 2)^4}}$

Question 5

a) $\dfrac{dy}{dx} = 5\left[\left(x^3 + 2x\right)^4 + 3x\right]^4\left(4\left(x^3 + 2x\right)^3\left(3x^2 + 2\right) + 3\right)$

b) $\dfrac{dy}{dx} = 6\,(3x + 4)^{13}\left(x^2 - 2\right)^{17}\left(25x^2 + 24x - 14\right)$

c) $f'(t) = \left(6 - 20t - \dfrac{5\pi}{2}\right)\sqrt{\dfrac{2t + \pi}{2 - 5t}}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(2x^3 + 1\right)^2\left(34x^3 + 108x^2 - 1\right)}{2\sqrt{(x + 3)^3}}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + \sqrt{3x + 1}}}\left(2x + \dfrac{3}{2\sqrt{3x + 1}}\right)$

Question 6

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}\left(x^2 + 1\right)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}(2x) \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}
\end{aligned}$$

On a donc que

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

.

L'équation de la droite tangente est de la forme

$$y = \frac{2}{\sqrt{5}}x + b.$$

En $x = 2$, $y = \sqrt{5}$ et la droite tangente passe par le point $\left(2, \sqrt{5}\right)$.

On détermine b :

$$\sqrt{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}(2) + b,$$

donc

$$\begin{aligned}
b &= \sqrt{5} - \frac{4}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\sqrt{5}\sqrt{5} - 4}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{5 - 4}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

et l'équation de la droite est

$$y = \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Question 7

$a = \dfrac{71}{32}$ ou $a = \dfrac{73}{32}$.

Question 8

Comme $\frac{dz}{dy} = 3y^2$, on a que

$$\frac{dz}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx}.$$

Quand $y = 2$, on a que

$$\frac{dz}{dx} = 3(2)^2\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=2} = 12 \cdot 5 = 60.$$

Question 9

a) $\dfrac{dm}{dt} = \dfrac{dm}{dL}\dfrac{dL}{dt} = 8L(0,3 - 0,2L)$

b) Au moment où la masse du poisson est de 4 kg, celle-ci augmente à un taux de 0,8 kg/an.

Question 10

Laissé à l'étudiant. Indice : Démontrer avec la règle de chaine que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \left((g(x))^{-1}\right)' \\ &= -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\end{aligned}$$

et transformer le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en produit $f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)$.

Question 11

a) Voir preuve dans notes de cours

b) Voir preuve dans notes de cours

c) $$\begin{aligned}\left(x^{a/b}\right)' &= \left(\left(x^{1/b}\right)^a\right)' \\ &= a\left(x^{1/b}\right)^{a-1}\left(x^{1/b}\right)' \\ &= ax^{\frac{a-1}{b}}\,\frac{1}{b}x^{\frac{1}{b}-1} \\ &= \frac{a}{b}x^{\frac{a-1}{b}}\,x^{\frac{1}{b}-1} \\ &= \frac{a}{b}x^{\frac{a-1}{b}+\frac{1}{b}-1} \\ &= \frac{a}{b}x^{\frac{a}{b}-\frac{1}{b}+\frac{1}{b}-1} \\ &= \frac{a}{b}x^{\frac{a}{b}-1}\end{aligned}$$