Limites et dérivées de fonctions trigonométriques

Révision fonctions trigonométriques

Question 1
Localiser les points correspondants aux angles suivants sur le cercle trigonométrique.

a) $\frac{\pi}{6}$
b) $\frac{5\pi}{6}$
c) $\frac{4\pi}{3}$
d) $\frac{\pi}{4}$
e) $\frac{3\pi}{4}$
f) $\frac{5\pi}{2}$
g) $\frac{7\pi}{4}$
h) $\frac{6\pi}{5}$

Question 2
Évaluer et simplifier les expressions suivantes.

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
b) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$
c) $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)$
d) $\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)$
e) $\csc\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
f) $\cot\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$
g) $\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)$
h) $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$
i) $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
j) $\cot\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$
k) $\sec\left(\frac{4\pi}{3}\right)$
l) $\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
m) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$
n) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
o) $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$

Question 3

a) Démontrer l'identité $\cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta)$ à l'aide du cercle trigonométrique.
b) Démontrer la même identité à l'aide des identités trigonométriques pour les sommes d'angles.

Question 4
Démontrer les identités trigonométriques suivantes.

a) $\sin(-x) = -\sin(x)$
b) $\cos(-x) = \cos(x)$
c) $\sin(x) = -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
d) $\cos(x) = \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
e) $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$
f) $\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$
g) $\sin^4(\theta) - \cos^4(\theta) = \cos(2\theta)$
h) $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$

Limites

Question 5
Évaluer les limites suivantes

a) $\lim_{x\to\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$
b) $\lim_{x\to\pi/3} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
c) $\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{3x}{2}\right)$
d) $\lim_{x\to\pi^+} \tan\left(\frac{x}{2}\right)$
e) $\lim_{x\to-\pi^-} \tan\left(\frac{x}{2}\right)$
f) $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{1}{\cos(x)}$
g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\tan(x)}$
h) $\lim_{x\to\pi^-} \frac{1}{\tan(x)}$
i) $\lim_{x\to\pi} \sec(x)$
j) $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sec(x)$
k) $\lim_{x\to-\frac{\pi}{8}} \tan(2x)$
l) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} x\sin(x)$
m) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(-2x)\tan(4x)}{2x^2}$
n) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x-1}$
o) $\lim_{x\to 0} \frac{\sec(x)\tan(x)}{x^2\csc(x)}$

Dérivées

Question 6
Démontrer les formules de dérivation suivantes à l'aide des formules de dérivation des fonctions sinus et cosinus, des formules de dérivations pour les produits, sommes et quotients et des définitions des fonctions trigonométrique impliquées. (Autrement dit : dériver !)

a) $\left(\cot(x)\right)' = -\csc^2(x)$
b) $\left(\sec(x)\right)' = \sec(x)\tan(x)$
c) $\left(\csc(x)\right)' = -\csc(x)\cot(x)$

Question 7
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \sin(5x)$
b) $y = \cos(3x)$
c) $y = \tan\left(x^2\right)$
d) $y = \sec\left(x^2\right)$
e) $y = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{3}$
f) $y = x^3\sin(x)$
g) $y = \cos(3x) - 3\cos(x)$
h) $y = \sec^2(x)$
i) $y = \cot(3x)\csc(3x)$
j) $y = \tan\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$
k) $y = e^{\sin(3x)}$

Question 8
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \cos(e^{-x})$
b) $y = \sin^3(x) + 3^{\sin(x)}$
c) $y = \ln(\sec(x) + \tan(x))$
d) $y = \dfrac{1+\csc(x^2)}{1-\cot(x^2)}$
e) $y = \cos\left(\tan(x^2)\right)$
f) $y = e^{x^3}\sec^2(2x)$
g) $y = e^{\tan(x)} - \sin(x)\cos(x)$
h) $y = \cot\left(\dfrac{x-1}{x-4}\right)$

Question 9
Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ à l'aide de la dérivation implicite.

a) $x\sin(y) = 1$
b) $x\sin(x) + y\cos(y) = 0$
c) $\sec\left(y^3\right) + y^2 = 3x^4$
d) $x\tan(e^y) + \ln(y) = 3$

Question 10
Démontrer que $(\cos(x))' = -\sin(x)$

a) En utilisant la définition de la dérivée.
b) En utilisant l'identité $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$.
c) En utilisant les identités $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Applications

Question 11
Trouver l'équation de la droite tangente à la courbe de $f(x) = \ln(\sin(x))$ au point $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Question 12
Étudier la croissance et la concavité des fonctions suivantes et tracer leur graphique.

a) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \sin(x)$, où $x \in [0,\ 2\pi]$
b) $f(x) = \sin x + \cos(x)$, où $x \in [0,\ 2\pi]$

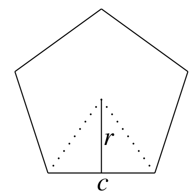
Question 13
Trouver les extremums locaux des fonctions suivantes.

a) $y = \sin^2 x + 2\cos x$.

Question 14
Trouver les extremums absolus des fonctions données sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

a) $f(x) = \cos^2(2x)$
b) $f(x) = 5\sin(x) + 12\cos(x)$

Question 15
Un polygone régulier à n côtés est une figure formée de n côtés et angles congrus (carré, pentagone régulier, hexagone régulier, etc.). Plus le nombre de côtés augmente, plus le polygone ressemble à un cercle. On peut dire qu'un cercle est la limite d'un polygone régulier lorsque le nombre n de côtés tend vers l'infini. Le rayon de ce cercle correspondra alors à l'apothème r illustrée dans la figure.



a) Trouver l'aire d'un polygone régulier à n côtés en fonction de r et de c.
b) Exprimer c en directement fonction de n et de r (vous aurez besoin de trigonométrie ici).
c) Utiliser les deux résultats pour trouver une formule générale pour l'aire d'un polygone à n côtés en fonction uniquement de n et de r.
d) En déduire la formule de l'aire d'un cercle (Remarquons que r est une constante dans le processus). Indice : il faut adapter le résultat $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ à la situation. *Vous venez de démontrer la formule de l'aire du cercle ! Cette formule a été démontrée pour la première fois par Archimède (287 av. J.C. – 212 av. J.C.), mais sans utiliser le concept moderne de limite.*

Question 16
Déterminer quel est le rectangle de périmètre maximum pouvant être inscrit dans le cercle unité.

Question 17
On lance un projectile avec un canon selon une vitesse initiale de v_0 m/s. Si on néglige la résistance de l'air, la portée (la distance horizontale parcourue par le projectile) est donnée par la fonction

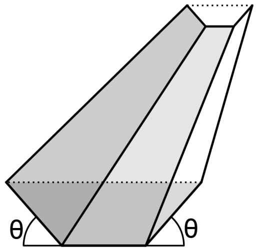
$$R(\theta) = \frac{v_0^2\sin(2\theta)}{g}$$

où $g = 9,8$ m/s^2 et θ est l'angle d'inclinaison du canon. Selon quel angle doit-on placer le canon pour avoir une portée maximale ?

Question 18
Les côtés congrus d'un triangle isocèle mesurent 5 cm. Trouver l'angle θ entre ces deux côtés qui maximise l'aire du triangle.

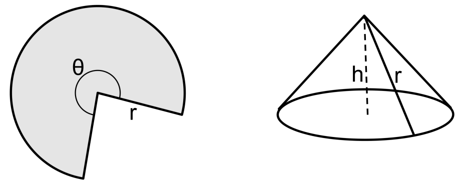
Question 19

On fabrique une auge à partir d'une feuille de métal de 120 cm de largeur. De chaque côté, on replie une bande de 40 cm selon un angle θ. Quel doit être cet angle pour que l'auge puisse contenir un volume maximal ?



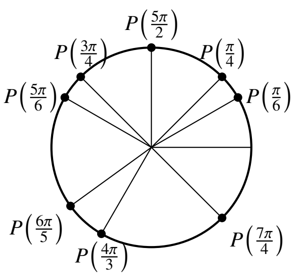
Question 20

On forme un cône en supprimant un secteur d'un disque de rayon égal r. Trouver la valeur de l'angle θ pour lequel le volume du cône obtenu est maximal.



Solutions

Question 1



Question 2

a) 1

b) $-\sqrt{3}/2$

c) 1

d) 2

e) $\sqrt{2}$

f) $1/\sqrt{3}$

g) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

h) 0

i) -1

j) $\sqrt{3}$

k) $-\sqrt{2}$

l) -2

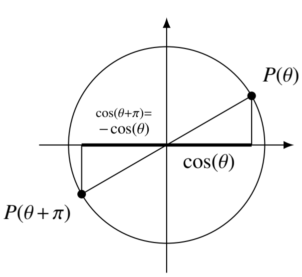
m) Utiliser l'identité $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ou utiliser le fait que $\pi/3+\pi/4=7\pi/12$ et identifier le triangle remarquable approprié.

n) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

o) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

Question 3

a)

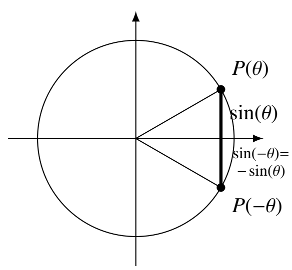


b)

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\pi)&=\cos(\theta)\cos(\pi)-\sin(\theta)\sin(\pi)\\&=\cos(\theta)(-1)-\sin(\theta)(0)\\&=-\cos(\theta)\end{aligned}$$

Question 4

a)



b) Voir formulaire trigo.

c) Voir formulaire trigo.

d) Utiliser l'identité pour cosinus d'une somme d'angles et évaluer $\cos(\pi/2)$.

e) Utilisez l'identité donnant le cosinus d'une somme de deux angles.

f) Utilisez l'identité donnant le sinus d'une somme de deux angles à deux reprises.

g) Laissé à l'étudiant·e.

h) Laissé à l'étudiant·e.

Question 5

a) 1

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\nexists$

d) $-\infty$

e) $+\infty$

f) $-\infty$

g) $+\infty$

h) $-\infty$

i) -1

j) ∞

k) -1

l) $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$

m) -4

n) -1

o) 1

Question 6

a)

$$\begin{aligned}\Big(\cot(x)\Big)'&=\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)'\\&=\frac{-\sin(x)\sin(x)-\cos(x)\cos(x)}{\sin^2(x)}\\&=\frac{-1}{\sin^2(x)}\\&=-\csc^2(x)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\Big(\sec(x)\Big)'&=\Big((\cos(x))^{-1}\Big)'\\&=-\Big(\cos(x)\Big)^{-2}(-\sin(x))\\&=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\frac{1}{\cos(x)}\\&=\sec(x)\tan(x)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\Big(\csc(x)\Big)'&=\Big((\sin(x))^{-1}\Big)'\\&=-\Big(\sin(x)\Big)^{-2}(\cos(x))\\&=-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\frac{1}{\sin(x)}\\&=-\csc(x)\cot(x)\end{aligned}$$

Question 7

a) $y'=5\cos(5x)$

b) $y'=-3\sin(3x)$

c) $y=2x\sec^2\left(x^2\right)$

d) $y=2x\sec\left(x^2\right)\tan\left(x^2\right)$

e) $y=-\frac{1}{6}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

f) $\dfrac{dy}{dx}=3x^2\sin(x)+x^3\cos(x)$

g) $\dfrac{dy}{dx}=3\sin(x)-3\sin(3x)$

h) $\dfrac{dy}{dx}=2\sec^2(x)\tan(x)$

i) $\dfrac{dy}{dx}=3\csc(3x)\left(1-2\csc^2(3x)\right)$

j) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(x^2+2x\right)\sec^2\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}{(x+1)^2}$

k) $\dfrac{dy}{dx} = 3e^{\sin(3x)}\cos(3x)$

Question 8

a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x}\sin e^{-x}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \cos x\left(3sin^2(x)+3^{\sin(x)}\ln(3)\right)$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \sec(x)$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x\csc(x^2)\left(1+\cot(x^2)+\csc(x^2)\right)}{(1-\cot(x^2))^2}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = -2x\sec^2(x^2)\sin\left(\tan(x^2)\right)$

f) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x^3}\sec^2(2x)\left(3x^2+4\tan(2x)\right)$

g) $\dfrac{dy}{dx} = e^{\tan(x)}\sec^2(x)-\cos(2x)$

h) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{x-4}\csc^2\left(\dfrac{x-1}{x-4}\right)$

Question 9

a) $\frac{dy}{dx} = -\dfrac{\tan(y)}{x}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin(x)+x\cos(x)}{\cos(y)-y\sin(y)}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{12x^3}{3y^2\sec(y^3)\tan(y^3)+2y}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y\tan(e^y)}{xye^y\sec^2(e^y)+1}$

Question 10

a) S'inspirer de la preuve de $(\sin(x))' = \cos(x)$; vous pouvez utiliser les deux lemmes démontrés en classe sans les redémontrer.

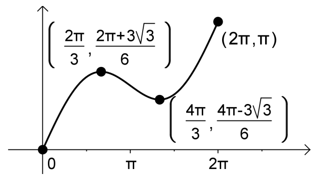
b) Dériver directement.

c) Fait en classe, tentez de le refaire par vous même.

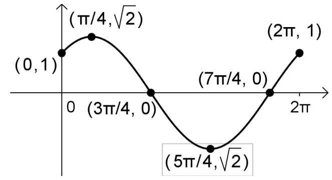
Question 11

$y = x+\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\pi}{4}$

Question 12



a)



b)

Question 13

a) max. local en $(2k\pi,2)$ avec $k\in\mathbb{Z}$, min. local en $\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,-2\right)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Question 14

a) max=1, atteint en $x\in\left\{0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right\}$, min=0, atteint en $x\in\left\{\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}\right\}$

Question 15

a) $A = \dfrac{ncr}{2}$ Ind. n côtés fois aide d'un triangle $\frac{cr}{2}$

b) $c = 2r\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ car l'angle au centre est $\theta = \frac{2\pi}{n}$ et $\tan(\theta/2) = \frac{r}{c/2}$.

c) $A_n = \dfrac{2nr\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} = nr^2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$

d)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} A_n &= \lim_{n\to\infty} nr^2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\\
&= r^2\lim_{n\to\infty} n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\\
&= r^2\lim_{n\to\infty} n\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\\
&= r^2\lim_{n\to\infty} \pi\frac{1}{\pi/n}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\\
&= \pi r^2\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\pi/n}\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\\
&= \pi r^2(1)\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{\infty}\right)}\\
&= \pi r^2\frac{1}{\cos(0)}\\
&= \pi r^2
\end{aligned}$$

Question 16

Si on pose que x est la base d'un rectangle inscrit dans le cercle unité et y sa hauteur, le périmètre du rectangle est $p = 2x+2y$.

La diagonale du rectangle étant le double du rayon unité, celle-ci est de longueur 2. De plus, si θ est l'angle formé par la diagonale du rectangle et sa base, alors $x = 2\cos(\theta)$ et $x = 2\sin(\theta)$.

On peut donc exprimer le périmètre p en fonction de l'angle θ :

$$p(\theta) = 4\cos(\theta)+4\sin(\theta).$$

L'angle θ doit être compris entre 0 et $\pi/2$.

En dérivant, on trouve que

$$p'(\theta) = 4(-\sin(\theta)+\cos(\theta))$$

p'$(\theta) = 0$ si

$$-\sin(\theta)+\cos(\theta) = 0$$

donc si

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta) = 1,$$

ce qui est le cas quand $\theta = \pi/4$ ou $\theta = 3\pi/4$. On rejette cette seconde solution car elle n'est pas entre 0 et $\pi/4$.

On vérifie avec la dérivée seconde laquelle de cette solution donne un maximum de $p(\theta)$.

$$p'(\theta) = 4(-\cos(\theta)+-\sin(\theta)) p'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$$

Comme la dérivée seconde $p'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est négative, le périmètre est maximum en $\pi/4$.

Question 17

$\theta = \frac{\pi}{4}$

Question 18

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$

Question 19

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ rad

Question 20

$\theta = \sqrt{2}\pi$ rad $\approx 254,56°$