Limites et dérivées des fonctions trigonométriques inverses

Fonctions trigonométriques inverses

Question 1
Résoudre les équations suivantes. Donner toutes les solutions et la solution pricipale.

a) $2\sin(x) = \sqrt{3}$
b) $2\cos(x) = -\sqrt{2}$
c) $2\sin(x) = 2 + \sqrt{2}$
d) $\tan(x) = -\sqrt{3}$
e) $\tan(x) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
f) $\sec(x) = 2$

Question 2
Évaluer les nombres suivants en radians ; donner des valeurs exactes.

a) $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)$
b) $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$
c) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
d) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
e) $\arctan(-1)$
f) $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$
g) $\operatorname{asec}(2)$
h) $\operatorname{arccosec}(-2)$
i) $\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{3}\right)$

Question 3
Simplifier les expressions suivantes.

a) $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$
b) $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$
c) $\sin\left(\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$
d) $\sin\left(\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$
e) $\cos\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$
f) $\tan(\arctan(3))$
g) $\sin(\arcsin(1/2))$
h) $\arccos(\cos(\pi/7))$
i) $\arcsin(\sin(7\pi/5))$
j) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
k) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
l) $\arctan(-1)$
m) $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$

Limites

Question 4
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \arcsin(x)$
b) $\lim\limits_{x\to\frac{2}{\sqrt{3}}} \operatorname{asec}(x)$
c) $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan\left(x^2\right)$
d) $\lim\limits_{x\to 3^-} \arctan\left(\dfrac{1}{x-3}\right)$
e) $\lim\limits_{x\to 1^+} \arctan\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)$
f) $\lim\limits_{x\to (-1)^+} \arctan\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)$

Dérivées

Question 5
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$
b) $f(x) = \operatorname{arccosec}\left(x^2\right)$
c) $y = \arcsin\left(x^3 - 3x\right)$
d) $y = \left(x - \arctan(2x)\right)^5$
e) $y = \operatorname{arccosec}\left(x^2\right)$
f) $y = \arcsin\left(\sqrt{x}\right)$
g) $y = \dfrac{2}{\operatorname{arcctg}(x)}$
h) $y = x\arctan(x)$
i) $y = x\arccos(2x)$
j) $y = \arccos\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$
k) $y = \operatorname{asec}\left(x^2+1\right)$

Question 6
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \dfrac{\arcsin(x^2)}{\ln(x)}$
b) $y = \log_3\left(\sqrt{x}\right)$
c) $y = \sqrt{\ln\left(\sqrt{x}\right)}$
d) $y = \operatorname{arcctg}\left(\mathrm{e}^{3\sec(x)}\right)$
e) $y = \tan^2\left(e^{x^3}\right)$
f) $y = \log\left(\cos(3x) - \cos^3(2x)\right)$
g) $y = \sin\left(2^x + \cos(x)\right)$
h) $y = \ln\left(\csc\left(3x^4 - 2e^x\right)\right)$
i) $y = \cot\sqrt{x} + \sqrt{\sec x^2}$
j) $y = \dfrac{x^2}{\tan\left(\sqrt[3]{x}\right)}$
k) $y = \sqrt{\sec(\sin(x^2))}$
l) $y = \ln(\arctan(e^x))$
m) $y = \arcsin\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$

Question 7
Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ pour chacune des relations suivantes.

a) $\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) = y^2$
b) $\arccos(y) = \arcsin(x)$
c) $\mathrm{e}^{\arctan(y)} = \sin(\ln(x))$
d) $\arcsin(e^y) = x\sqrt{y}$

Question 8
Déterminer l'équation de la droite tangente à $y = \arcsin(x)$ en $x = \frac{1}{2}$.

Question 9
Trouver l'équation de la droite tangente à la courbe de $f(x) = \ln(\sin(x))$ au point $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Question 10
Trouver les valeurs de x pour lesquelles la fonction $f(x) = \arcsin(3x)$ admet une droite tangente perpendiculaire à la droite $y = 3 - x/5$.

Applications

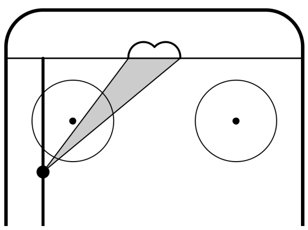
Question 11
Trouver les extremums locaux de

$$f(x) = \arctan(x) + \frac{x^2}{2} - x.$$

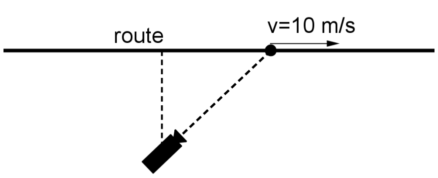
Déterminer les types d'extrémums l'aide du test de la dérivée seconde.

Question 12
Soit $f(x) = \sqrt{x-4}$ et la droite D joignant l'origine et un point quelconque sur la courbe de f. Quelle valeur de x minimise l'angle entre la droite D et l'axe des x

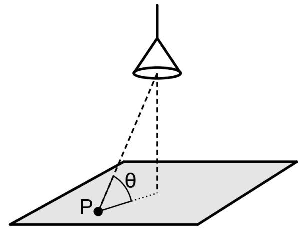
Question 13
À quelle distance de la ligne des buts un ailier gauche de hockey sur table doit-il lancer pour maximiser ses chances de marquer si le but mesure 5 cm de largeur et que le joueur est restreint à un rail situé à 8 cm du poteau le plus près ? On suppose que le joueur maximise ses chances de marquer si l'angle d'ouverture vers le but est maximal.



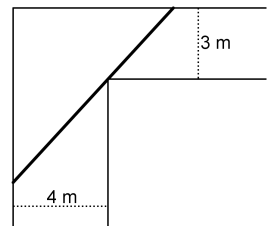
Question 14
Un caméraman est posté à 5 m d'une route rectiligne et doit filmer une voiture qui passera sur cette route à vitesse constante de $10\,\mathrm{m/s}$. À quelle vitesse angulaire (en rad/s) la caméra doit-elle pivoter exactement une seconde après que la voiture soit passée devant elle ?



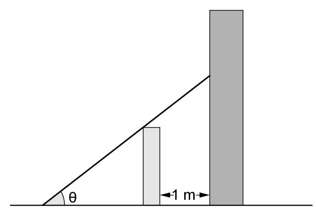
Question 15
On doit suspendre une lampe au dessus du centre d'une table carrée de 2 m par 2 m. L'intensité de la lumière à un point P de la table est directement proportionnel au sinus de l'angle que forme le rayon lumineux avec la table, et inversement proportionnel à la distance entre P et la lampe. À quelle hauteur la lampe doit-elle être suspendue pour que l'intensité lumineuse soit maximale aux quatre coins de la table ?



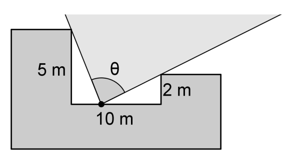
Question 16
Quelle est la longueur maximale du tuyau de diamètre négligeable qui peut tourner le coin de ce corridor si on néglige la hauteur du corridor ?



Question 17
On veut atteindre un mur fragile en appuyant une échelle sur un muret de 2 m de haut situé à 1 m du mur. Déterminer l'angle θ qui minimise la longueur de l'échelle à utiliser.



Question 18
On veut placer une caméra de surveillance sur le mur de 10 mètres. À quel endroit doit-on la placer pour maximiser son champ de vision ?



Question 19

a) Montrer à l'aide des formules de dérivation que

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{x}\right)' = (\arctan(x))'.$$

b) Montrer, à l'aide d'un triangle rectangle, que

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Solutions

Fonctions trigonométriques inverses

Question 1

a) $\sin(x) = \sqrt{3}2$. Solutions :

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

ou

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

La solution principale est $x = \frac{\pi}{3}$.

b) $\cos(x) = -\sqrt{2}2$. Solutions :

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

ou

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

La solution principale est $x = \frac{3\pi}{4}$.

c) $\sin(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$. Solutions :

$$x = \frac{3\pi}{8} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

ou

$$x = \frac{5\pi}{8} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

La solution principale est $x = \frac{3\pi}{8}$.

d) $tan(x) = -\sqrt{3}$. Solutions :

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

ou

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

La solution principale est $x = -\frac{\pi}{3}$.

e) Utiliser le triangle remarquable approprié et la définition de tangente. Solutions :

$$x = \frac{3\pi}{10} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

ou

$$x = \frac{13\pi}{10} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

La solution principale est $x = \frac{3\pi}{10}$.

f) $\sec(x) = 2 \iff \dfrac{1}{\cos(x)} = 2$

$$\iff \cos(x) = \frac{1}{2}.$$

Solutions :

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

ou

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

La solution principale est $x = \frac{\pi}{3}$.

Question 2

a) $\dfrac{\pi}{6}$

b) $\dfrac{2\pi}{3}$

c) $-\dfrac{\pi}{4}$

d) $\dfrac{5\pi}{6}$

e) $-\dfrac{\pi}{4}$

f) $\dfrac{\pi}{3}$

g) $\dfrac{\pi}{3}$

h) $-\dfrac{\pi}{6}$

i) $\dfrac{\pi}{6}$

Question 3

a) $\dfrac{\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{6}$

c) $\dfrac{1}{2}$

d) $-\dfrac{1}{2}$

e) $\frac{1}{2}$

f) 3

g) $1/2$

h) $\pi/7$

i) $-2\pi/5$

j) $-\pi/4$

k) $2\pi/3$

l) $-\pi/4$

m) $\pi/3$

Limites

Question 4

a) Par continuité : $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$

b) Par continuité : $\operatorname{arcsec}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ (pour évaluer arcsec, transformer l'équation en $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et trouver la valeur principale pour arcsec).

c) $\arctan(\infty) = \dfrac{\pi}{2}$

d) $\arctan\left(\frac{1}{0^-}\right) = \arctan(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$

e) $\arctan\left(\frac{1}{0^+}\right) = \arctan(\infty) = \dfrac{\pi}{2}$

f) $\arctan\left(\frac{1}{0^-}\right) = \arctan(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$

Dérivées

Question 5

a) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}$

b) $f'(x) = -\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2-3}{\sqrt{1-(x^3-3x)^2}}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = 5\left(x - \arctan(2x)\right)^4 \dfrac{4x^2-1}{4x^2+1}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2}{(x^2+1)\operatorname{arcctg}^2(x)}$

h) $\dfrac{dy}{dx} = \arctan(x) + \dfrac{1}{1+x^2}$

i) $\dfrac{dy}{dx} = \arccos(2x) - \dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}$

j) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^2+2}{\sqrt{x^4-6x^2+1}}$

k) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$

Question 6

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{\ln(x)\sqrt{1-x^4}} - \dfrac{\arcsin(x)}{x\ln^2(x)}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2x\ln(3)}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{4x\sqrt{\ln\left(\sqrt{x}\right)}}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3\mathrm{e}^{3\sec(x)}\sec(x)\tan(x)}{1+\mathrm{e}^{6\sec(x)}}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2e^{x^3}\tan\left(e^{x^3}\right)\sec^2\left(e^{x^3}\right)$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3\sin(3x)+6\cos^2(2x)\sin(2x)}{\ln(10)((\cos(3x-\cos^3(2x)))}$

g) $\dfrac{dy}{dx} = (2^x\ln(2) - \sin(x))\cos\left(2^x + \cos(x)\right)$

h) $\dfrac{dy}{dx} = \left(12x^3 - 2e^x\right)\cot\left(3x^4 2e^x - 3x^4\right)$

i) $\dfrac{dy}{dx} = x\tan\sqrt{\sec(x^2)} - \dfrac{\csc^2\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$

j) $\dfrac{dy}{dx} = 2x\cot\left(\sqrt[3]{x}\right) - \dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{3}\csc\left(\sqrt[3]{x}\right)$

k) $\dfrac{dy}{dx} = \cos\left(x^2\right)\tan\left(\sin x^2\right)\sqrt{\sec\left(\sin x^2\right)}$

l) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{(1+e^{2x})\arctan(e^x)}$

m) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-\ln x}{x^2+\ln^2 x}$

Question 7

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y}{2x^2+2y^3-x}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(1+y^2\right)\cos(\ln(x))}{x\mathrm{e}^{\arctan(y)}}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y\sqrt{1-e^{2y}}}{2\sqrt{y}e^y - x\sqrt{1-e^{2y}}}$

Question 8

$y = \frac{2x}{\sqrt{3}} + \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Question 9

$y = x + \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\pi}{4}$

Question 10

$x = -4/15$ et $x = 4/15$

Problèmes d'optimisation

Question 11

Minimun local en $(0,0)$

Question 12

$x = 8$

Question 13

À $2\sqrt{26}$ cm.

Question 14

$\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d\theta}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{5}$ rad/s

Question 15

$h = \sqrt{2}$ m

Question 16

Environ 9,87 m

Question 17

$\theta = \arctan\left(\sqrt[3]{2}\right)$

Question 18

À 5,66 m du mur de 5 m.

Question 19

a)
$$\begin{aligned}\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{x}\right)' &= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(\frac{-1}{x^2}\right)\\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(\frac{-1}{x^2}\right)\\ &= \frac{-1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2}\\ &= \frac{-1}{x^2+1}\\ &= (\arctan(x))'\end{aligned}$$

b) Défi !