Chapitre 10

Fonctions trigonométriques inverses

10.1 Définition géométrique des fonctions trigonométriques inverses

Les fonctions trigonométriques inverses sont les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques. Elles permettent de résoudre des équations comportant des fonctions trigonométriques.

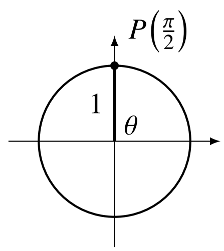
Par exemple, si on veut résoudre

$$\sin(\theta) = 1$$

on trouve une infinité de solution :

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi, \dots$$

Toutes ces solutions correspondent au même point dans le cercle trigo car $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = P\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = P\left(\frac{5\pi}{2}\right) = P\left(\frac{9\pi}{2}\right) = \dots$.



La fonction arcsinus nous donne un de ces solutions, un des angles θ tels que $\sin(\theta) = 1$. Ce choix d'une solutions particulière parmis toutes les solutions possibles est nécessaire pour que arcsinus soit une fonction, car une fonction associe une seule valeur à une valeur donnée. On appelle cette valeur la « valeur principale ». Ainsi, on peut dire qu'on peut résoudre l'équation initiale avec la fonction arcsinus :

$$\theta = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

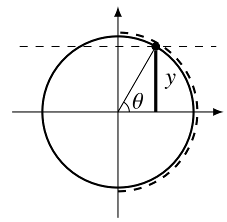
Cette valeur principale est toujours choisie pour donner une solution utile quand on résout des équations dans un contexte géométrique, où les angles cherchés sont souvent dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Afin de pouvoir évaluer une fonction trigonométrique inverse, il faut restreindre leur domaine aux valeurs obtenue en appliquant les fonctions trigonométriques correspondantes. Par exemple, comme $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, la fonction $\arcsin(x)$ ne peut pas être définie pour des valeurs hors de l'intervalle $[-1, 1]$.

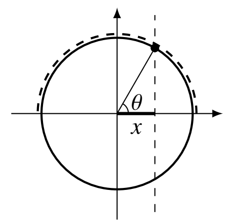
De plus, si on connait la valeur d'une fonction trigonométrique, il y a plusieurs angles différent qui correspondent à cette valeur. Pour que la fonction trigonométrique inverse soit une fonction, il faut choisir un seul de ces angles. Dans les définitions qui suivent, le choix de cet angles est toujours fait dans la partie du cercle trigonométrique indiquée en « traitillés ». Pour que les solutions soient géométriquement utiles, ce choix inclue toujours les angles θ dans le premier quadrant, c'est à dire tels que $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ et est prolongé de manière avoir une une valeur principale unique.

Définition 10.1. Les fonctions trigonométriques inverses sont définies par les équivalences suivantes. Les valeurs de ces fonctions sont choisies dans l'intervalle donné pour θ ; on appelle cette valeur la **valeur principale**.

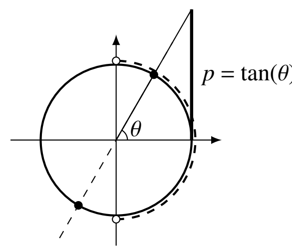
a) $\arcsin(y) = \theta \iff \sin(\theta) = y$, avec $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, $-1 \le y \le 1$



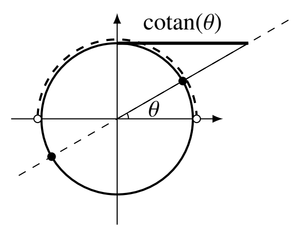
b) $\arccos(x) = \theta \iff \cos(\theta) = x$, avec $0 \le \theta \le \pi$ et $-1 \le x \le 1$



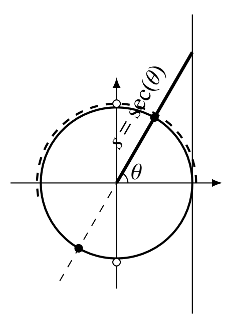
c) $\arctan(p) = \theta \iff \tan(\theta) = p$, avec $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ et $p \in \mathbb{R}$



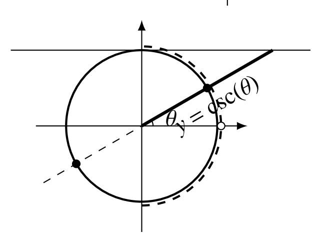
d) $\operatorname{arcctg}(q) = \theta \iff \operatorname{cotan}(\theta) = q$, avec $0 < \theta < \pi$ et $q \in \mathbb{R}$



e) $\operatorname{arcsec}(s) = \theta \iff \sec(\theta) = s$, avec $0 \le \theta \le \pi$, $\theta \ne \pi/2$ et $s \ge 1$ ou $s \le -1$.



f) $\operatorname{arccosec}(c) = \theta \iff \csc(\theta) = c$, avec $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, $\theta \ne 0$



Remarque 10.1. Ne pas confondre les fonction trigonométriques inverses et les inverses de ces fonctions ! Par exemple,

$$\arcsin(x) \neq \frac{1}{\sin(x)} = \csc(x).$$

Cette confusion est fréquente pour deux raisons :

1. l'expression « fonction inverse » est synonyme de « fonction réciproque ». En général, la fonction réciproque de la fonction $f(x)$ n'est pas $\frac{1}{f(x)}$.
2. l'utilisation de la notation $\sin^{-1}(x)$, notamment sur certaines calculatrices, peut laisser penser que

$$\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sin(x)} \qquad \text{(Faux !)}$$

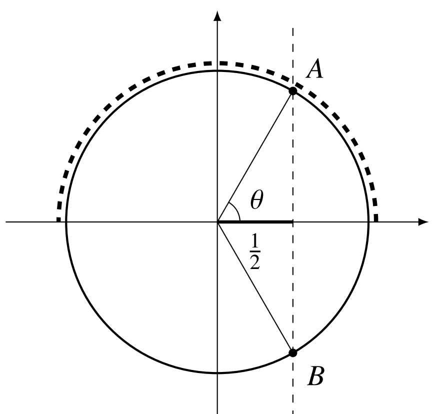
mais ce n'est pas le cas. Cette notation est utilisée pour dénoter « la fonction réciproque de sin » qui est arcsin et non pas « l'inverse de $\sin(x)$ qui est $\frac{1}{\sin(x)}$.

Exemple 10.1. Déteminer $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$.

Par définition

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \theta \iff \cos(\theta) = \frac{1}{2}$$

Comme $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$, la coordonnée en x du point $P(\theta)$ doit être $\frac{1}{2}$. On se trouve donc dans la situation suivante : il y a deux angles $-\pi \leq \theta \leq \pi$ satisfaisant cette relation, angle correspodant aux points A et B de la figure suivante.



Comme l'angle θ correspondant au point B n'est pas la valeur principale conventionnelle pour arccos, la solution est l'angle correspondant au point A. Comme le côté de longueur $\frac{1}{2}$ correspond au côté d'un des triangles remarquables, ont doit avoir $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Proposition 10.1.

$$\sin(\arcsin(y)) = y$$

$$\cos(\arccos(x)) = x$$

$$\tan(\arctan(p)) = p$$

$$\vdots$$

Si θ est la valeur principale des fonction trigonométriques inverses impliquée, alors

$$\arcsin(\sin(\theta)) = \theta$$

$$\arccos(\cos(\theta)) = \theta$$

$$\arctan(\tan(\theta)) = \theta$$

$$\vdots$$

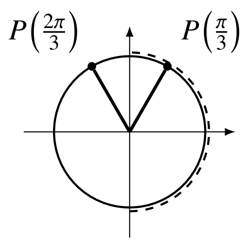
Exemple 10.2.

$$\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

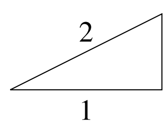
On peut voir pourquoi $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \neq \frac{2\pi}{3}$ dans le cercle trigo. Comme $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, la valeur de $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est la valeur principale et est $\frac{\pi}{3}$.



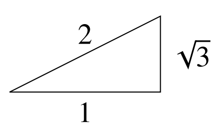
Ansi, on a que $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \neq \frac{2\pi}{3}$.

Exemple 10.3. Sachant que $\theta = \arccos(1/2)$, trouver les valeurs de toutes les fonctions trigonométriques.

Solution : comme $\cos(\theta)$ doit être $1/2$, on peut supposer que θ est un angle dans le triangle suivant (car les valeurs des fonctions trigonométriques restent les même si on change l'échelle d'un triangle.)



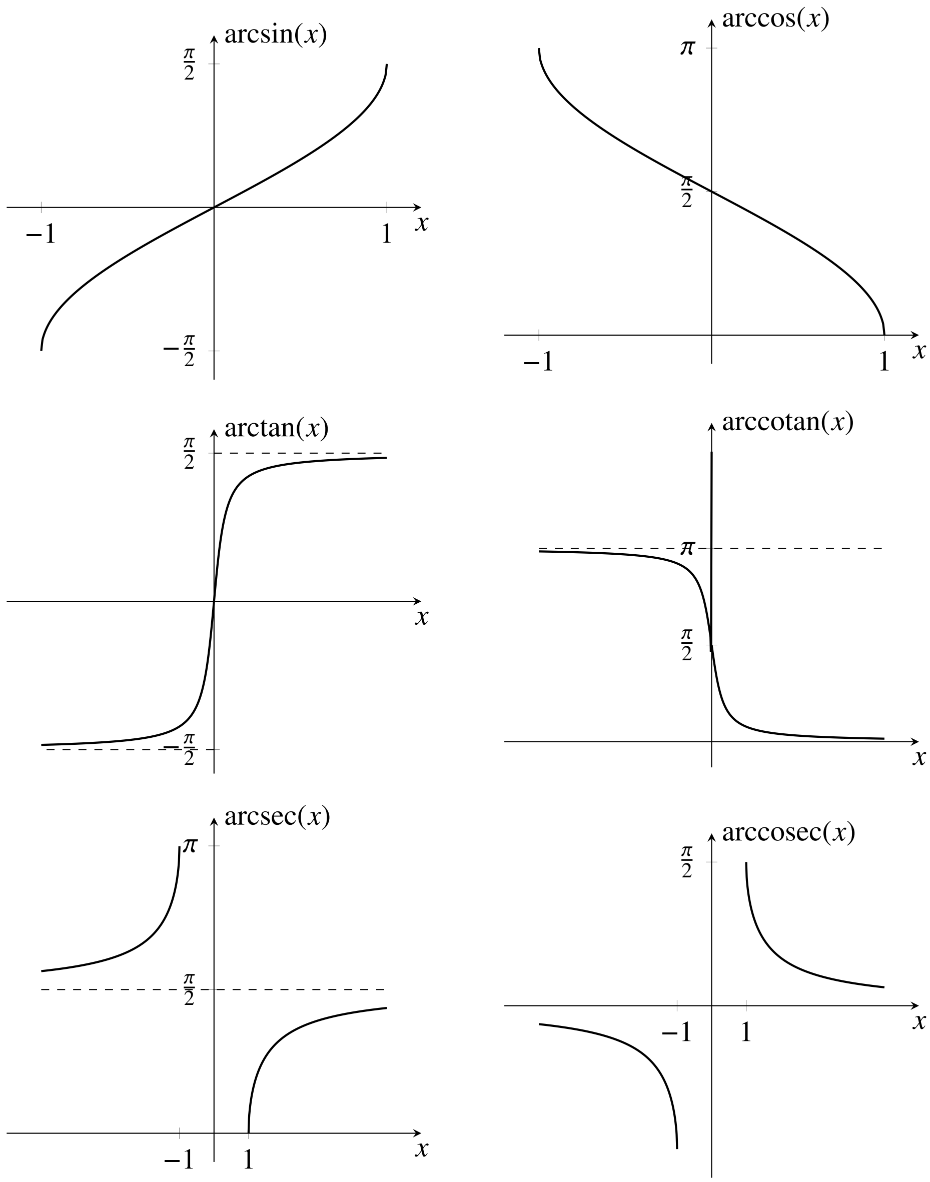
Comme le triangle est rectangle, on peut trouver la mesure du côté manquant à l'aide du théorème de Pythagore.



À l'aide de ce triangle, on trouve les valeurs des autres fonction trigonométriques :

- $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$
- $\tan(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$
- $\sec(\theta) = \dfrac{2}{1} = 2$
- $\csc(\theta) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$
- $\cot(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

10.2 Graphe des fonctions trigonométriques inverses



10.3 Limites des fonctions trigonométriques inverses

Hypothèse 10.1. *Les fonctions trigonométriques inverses sont continues partout où elles sont définies.*

Les deux limites suivantes sont souvent utilisés en pratique.

Proposition 10.2.

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

10.4 Dérivation des fonctions trigonométriques inverses

Proposition 10.3. Dérivée des fonctions trigonométriques inverses.

(a) $\Big(\arcsin(x)\Big)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\Big(\text{arcctg}(x)\Big)' = \frac{-1}{x^2+1}$

(b) $\Big(\arccos(x)\Big)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (e) $\Big(\text{asec}(x)\Big)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(c) $\Big(\arctan(x)\Big)' = \frac{1}{x^2+1}$ (f) $\Big(\text{arccosec}(x)\Big)' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Démonstration.

Toutes ces preuves se font en utilisant la dérivation implicite et des identités trigonométriques et la proposition 10.1. On suppose que x est dans le domaine des fonctions impliquées.

On utilise aussi les identités de Pythagore suivantes :

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1 \qquad \sec^2(x)=\tan^2(x)+1 \qquad \csc^2(x)=\text{cotan}^2(x)+1.$$

(a) Preuve de $\Big(\arcsin(x)\Big)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\begin{aligned}
\sin\big(\arcsin(x)\big) &= x\\
\Big(\sin\big(\arcsin(x)\big)\Big)' &= (x)'\\
\cos\big(\arcsin(x)\big)\Big(\arcsin(x)\Big)' &= 1\\
\Big(\arcsin(x)\Big)' &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}\\
\Big(\arcsin(x)\Big)' &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}}\\
\Big(\arcsin(x)\Big)' &= \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2}}\\
\Big(\arcsin(x)\Big)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

(c) Preuve de $\Big(\arctan(x)\Big)' = \dfrac{1}{x^2+1}$:

$$\begin{aligned}
\tan\big(\arctan(x)\big) &= x\\
\Big(\tan\big(\arctan(x)\big)\Big)' &= (x)'\\
\sec^2\big(\arctan(x)\big)\Big(\text{asec}(x)\Big)' &= 1\\
\Big(\arctan(x)\Big)' &= \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))}\\
\Big(\arctan(x)\Big)' &= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}\\
\Big(\arctan(x)\Big)' &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

(e) Preuve de $\left(\operatorname{asec}(x)\right)' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$:

$$\begin{aligned}
\sec(\operatorname{asec}(x)) &= x \\
\left(\sec(\operatorname{asec}(x))\right)' &= (x)' \\
\sec(\operatorname{asec}(x))\tan(\operatorname{asec}(x))\left(\operatorname{asec}(x)\right)' &= 1 \\
\left(\operatorname{asec}(x)\right)' &= \frac{1}{\sec(\operatorname{asec}(x))\tan(\operatorname{asec}(x))} \\
\left(\operatorname{asec}(x)\right)' &= \frac{1}{x\sqrt{\sec^2(\operatorname{asec}(x))-1}} \\
\left(\operatorname{asec}(x)\right)' &= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

Les autres preuves sont laissées en exercice. On utilise la dérivation implicite et les identités de Pythagore de manière similaire aux trois preuves données. □

Note 10.1. Dans les preuves qui précèdent, on utilise les identités liant les fonctions trigonométriques inverses avec leur fonction trigonométriques correspondantes :

$$\sin(\arcsin(x)) = x \quad \tan(\arctan(x)) = x \quad \cdots$$

Si ont met au carré chaque membre de ces identités, on obtient :

$$\sin^2(\arcsin(x)) = (\sin(\arcsin(x)))^2 = x^2 \quad \tan^2(\arctan(x)) = x^2 \quad \cdots$$

Exemple 10.4.

$$\begin{aligned}
\left(\arcsin(2x)\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2)}}\left(2x\right)' \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}
\end{aligned}$$

Exemple 10.5.

$$\begin{aligned}
\left(\arccos\left(x^3\right)\right)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\left(x^3\right)' \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}3x^2 \\
&= -\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}
\end{aligned}$$

Exemple 10.6.

$$\begin{aligned}\Big(\arctan(\sin(x))\Big)' &= \frac{1}{\sin^2(x)+1}\Big(\sin(x)\Big)' \\ &= \frac{1}{\sin^2(x)+1}\cos(x) \\ &= \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)+1}\end{aligned}$$

Exemple 10.7.

$$\Big(\arctan(x)^{13}\Big)' = 13\arctan(x)^{12}\frac{1}{x^2+1} = \frac{13\arctan(x)^{12}}{x^2+1}$$

Note : $\arctan(x)^{13} = \Big(\arctan(x)\Big)^{13}$ et non pas « $\arctan(x^{13})$. »

Exemple 10.8.

$$\Big(\operatorname{arcsec}(x/2)\Big)' = \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}} = \frac{2}{x\sqrt{\frac{x^2}{2}-1}} = \frac{8}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Exemple 10.9.

$$\begin{aligned}\Big(\sqrt{\arctan(x)}\Big)' &= \frac{1}{2\sqrt{\arctan(x)}}\Big(\arctan(x)\Big)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\arctan(x)}}\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Exemple 10.10. Trouvons les extrémums de $f(x) = \arctan(x^3-12x)$.

La dérivée de f est

$$f'(x) = \frac{1}{(x^3-12x)^2+1}(3x^2-12) = \frac{3(x^2-4)}{(x^3-12x)^2+1} = \frac{3(x-2)(x+2)}{(x^3-12x)^2+1}.$$

La dérivée s'annule quand $x = 2$ ou $x = -2$. Le numérateur $(x^3-12x)^2+1$ étant toujours plus grand que 1, il ne s'annule jamais,

Les valeurs critiques sont donc 2 et -2.

On peut faire un tableau de signe de la dérivée

x		-2		2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

On conclue donc que f a un maximum en $x = -2$ et un minimum en $x = 2$.

Note : on choisit ici de faire un tableau de signe plutôt que d'utiliser le test de la dérivée seconde, car la simplification de dérivée seconde plus complexe que la détermination des signes de la dérivée !

Exemple 10.11. Analyser la fonction $f(x) = \arcsin(x)$.

La dérivée première est

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La dérivée seconde est

$$f''(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

Valeurs critiques de f' : $f'(x)$ non défini pour $x \geq 1$ ou $x \leq -1$. $f'(x)$ n'est jamais nul (car la fonction racine carrée, si elle est définie, donne toujours un résultat positif.)

Comme il y a division par 0 possible dans la dérivée en $x = \pm 1$, on vérifie si la dérivée tend vers $\pm\infty$ pour déterminer s'il y a un tangente verticale.

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

Valeurs critiques de f'' :

$f''(x) = 0$ si $x = 0$. $f''(x)$ est non-défini pour $x \geq 1$ ou $x \leq -1$.

Tableau de variation :

x	-1		0		1
$f'(x)$	∞	+	+	+	∞
$f''(x)$	$\nexists$	-	0	+	$\nexists$
$f(x)$	TV	$\nearrow$	INF	$\nearrow$	TV

Graphe de la fonction $f(x) = \arcsin(x)$.