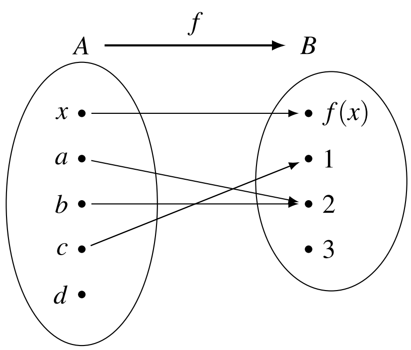
# Résumé : fonctions élémentaires

## Définition d'une fonction

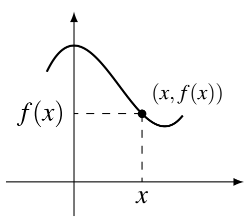
### Notation et représentation graphique

Une fonction est une règle donnant au plus un élément $f(x)$ d'un ensemble $B$ associé à chaque élément $x$ de $A$. Notation : $f\colon A \to B$.




Le plus souvent dans les cours du collégial, $A$ et $B$ sont des ensembles de nombres réels ou de vecteurs $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, etc. Les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont appelées *fonctions réelles*. Les fonctions réelles sont habituellement représentées par leur graphe.

Le graphe d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des points de la forme $(x, f(x))$.




### Domaine

Le domaine d'une fonction $f\colon A \to B$ est l'ensemble des $x \in A$ où $f(x)$ est défini. Notation :

$$\mathrm{dom}(f) = \{a \mid f(a) \text{ est défini}\}.$$

Conditions déterminant le domaine des fonctions élémentaires :

$$\cancel{\div 0} \quad \frac{A}{B} \text{ défini} \iff B \neq 0$$

$$\cancel{\sqrt{<0}} \quad \sqrt[n]{A} \text{ défini} \iff n \text{ impair ou } n \text{ pair et } A \geq 0$$

$$\cancel{\log(\leq 0)} \quad \log_b(A) \text{ défini} \iff A > 0$$

### Différentes manières de définir une fonction

- Définition par une équation : $y = x^2$. ($y$ variable dépendante, $x$ variable indépendante)
- Définition implicite par une équation : $x^2 - y = 0$. (il faut spécifier quelle variable dépend de l'autre : $y$ variable dépendante, $x$ variable indépendante)
- Définition en donnant l'effet de la fonction : $f(x) = x^2$ (ou encore $x \mapsto x^2$).
- Définition par parties (ou par intervalle ou par morceaux) :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ -x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^3 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

### Évaluation d'une fonction

Si $f$ est définie par une expression algébrique, comme $f(x) = x^2 + x + 1$, on évalue $f(A)$ en remplacent toutes les occurrences de $x$ de l'expression algébrique par $A$. Par exemple

$$f(2) = 2^2 + 2 + 1$$

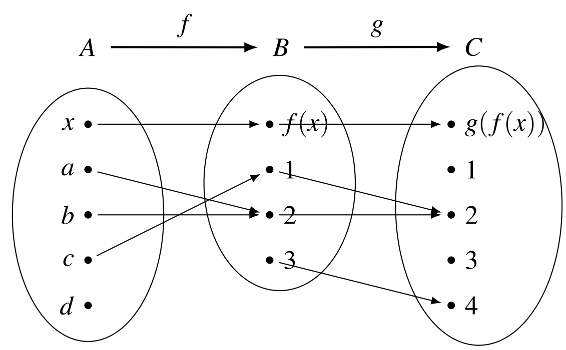
$$f(x+1) = (x+1)^2 + (x+1) + 1$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) + 1$$

### Composition de fonctions

Si $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$, on définit la composition $f \circ g$ de $f$ et $g$ comme la fonction définie en appliquant d'abord $g$ et ensuite $f$ :

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$




### Fonctions inverses

Deux fonctions $f$ et $g$ sont inverses l'une de l'autre si

$$f \circ g(x) = x \text{ et } g \circ f(x) = x.$$

On dénote la fonction inverse de $f$ par $f^{-1}$.

Les fonctions inverses satisfont l'équivalence

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y).$$

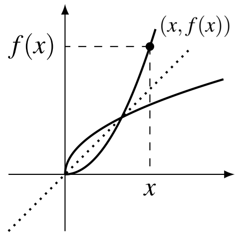
Si $y = f(x)$, on trouve donc $f^{-1}$ en isolant $x$ en fonction de $y$ (si cela est possible) et en échangeant les $x$ pour des $y$.

$$y = 2x + 1 \iff x = \frac{y-1}{2}$$

Donc $f(x) = 2x + 1$ a comme fonction inverse $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

La nouvelle relation trouvé de cette manière n'est pas nécessairement une fonction. Il faut souvent limiter $f$ sur un domaine adéquat pour que $f^{-1}$ soit une fonction.

Le graphe de la fonction inverse d'une fonction $f$ est sa réflexion par la droite $y = x$ (qui a pour effet d'échanger $x$ et $y$).

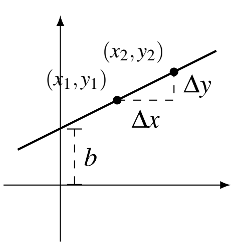



Quelques fonctions inverses ($C$ = constante)

| $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$ | |
|---|---|
| $y = x + C \iff x = y - C$ | |
| $y = Cx \iff x = \dfrac{y}{C}$ | |
| $y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$ | $(x \geq 0)$ |
| $y = b^x \iff x = \log_b(y)$ | |
| $y = e^x \iff x = \ln(x)$ | |
| $y = \sin(x) \iff x = \arcsin(y)$ | $(-\pi/2 \leq x \leq \pi/2)$ |
| $y = \cos(x) \iff x = \arccos(y)$ | $(0 \leq x \leq \pi)$ |
| $y = \tan(x) \iff x = \arctan(y)$ | $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ |

# Fonctions polynomiales

## Fonctions affines (droites)




Forme générale :

$$f(x) = ax + b$$

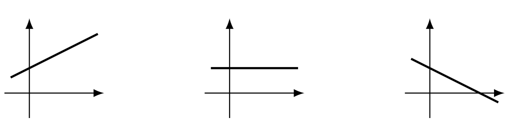
Passant par le point $(x_0, y_0)$ et de pente $a$ :

$$f(x) = a(x - x_0) + y_0$$

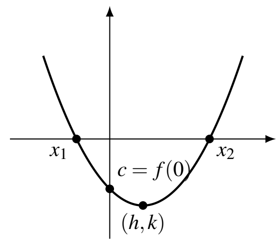
Ordonnée à l'origine : $b = f(0)$

Pente : $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a > 0$ $\qquad a = 0$ $\qquad a < 0$



## Fonctions quadratiques (paraboles)




Forme polynomiale

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Forme canonique

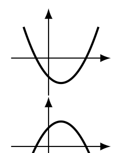
$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Forme factorisée

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

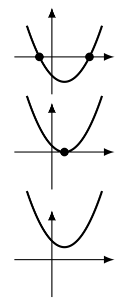
Orientation

- $a > 0$
- $a < 0$
- $a = 0$ fonction linéaire !



Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

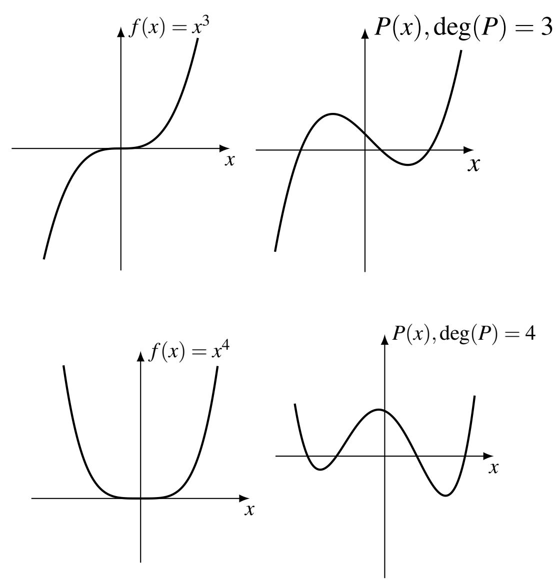
- $\Delta > 0$
- $\Delta = 0$
- $\Delta < 0$



Si on connait trois points différents sur une parabole (en comptant le sommet pour deux), on peut déterminer tous les paramètres (et donc une fonction unique).

## Fonctions polynomiales quelconques

Forme générale : $f(x) = P(x)$, où $P(x)$ est un polynôme. Domaine : $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.



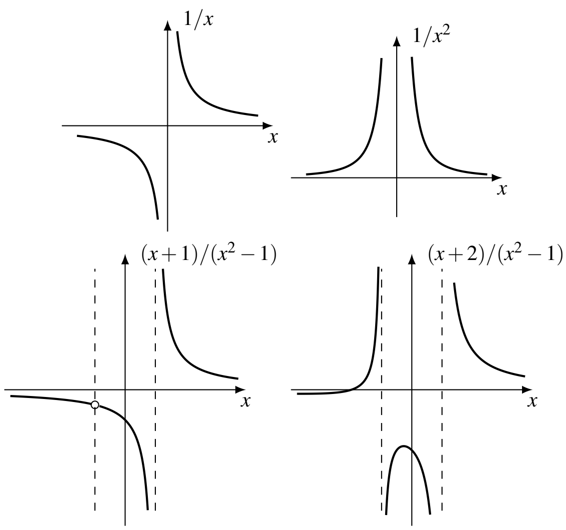

Zéros et extrémums.

- $f(x)$ peut avoir jusqu'à $\deg(P)$ zéros.
- $f(x)$ peut avoir jusqu'à $\deg(P) - 1$ extremums.

# Fonctions rationnelles

Forme générale : $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes. $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$, asymptote ou discontinuité non essentielle à chaque $x \notin \text{dom}(f)$.

Les zéros de $f(x)$ sont les zéros de $P(x)$ qui sont dans $\text{dom}(f)$.

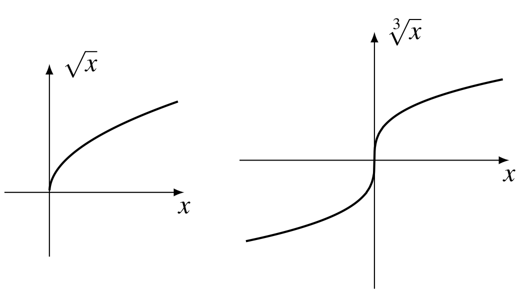



## Fonctions algébriques

Fonctions que l'on peut définir à l'aide des opérations $+, -, \times$ et $\div$, ainsi que des exposants fractionnaires. Toutes les fonctions rationnelles sont algébriques. Ce sont les fonctions que l'on obtient en isolant $y$ dans des équations polynomiales de la forme $P(x,y) = 0$.

Pour déterminer le domaine d'une fonction algébrique, il faut utiliser les deux faits suivants :

- $\frac{A}{B}$ est défini ssi $B \neq 0$
- $\sqrt[n]{A}$ est toujours défini si $n$ est impair, ou est défini ssi $A \geq 0$ si $n$ est pair.

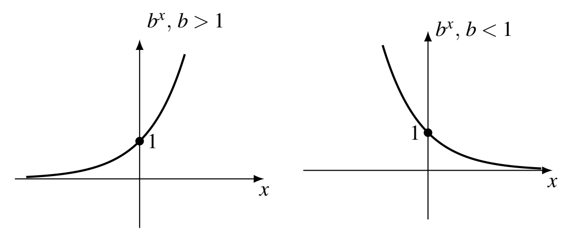



# Fonctions transcendantes

Une fonction transcendante est une fonction qui n'est pas algébrique.

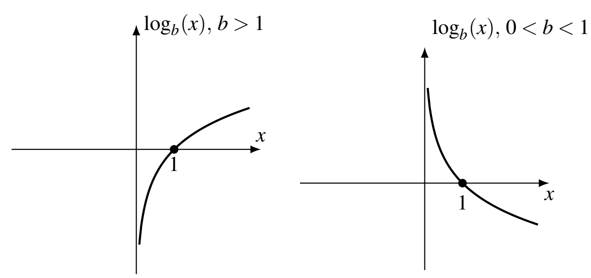
## Fonctions exponentielles

Forme générale : $f(x) = Ab^x + k$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$



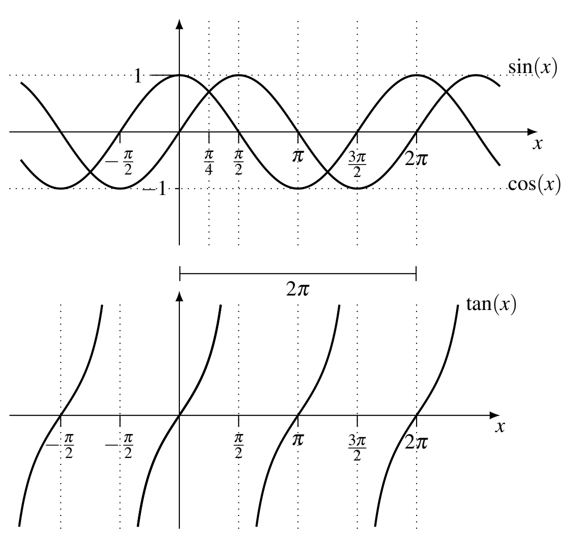

## Fonctions logarithmiques

Forme générale : $f(x) = A\log_b(x-a) + C$ $(b > 0, b \neq 1)$,
$\text{dom}(f) = \{x \mid x - a > 0\}$




## Fonctions trigonométriques

$$f(x) = \sin(x),\ \text{dom}(\sin) = \mathbb{R} \qquad g(x) = \cos(x),\ \text{dom}(\cos) = \mathbb{R}$$
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \text{dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\tfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

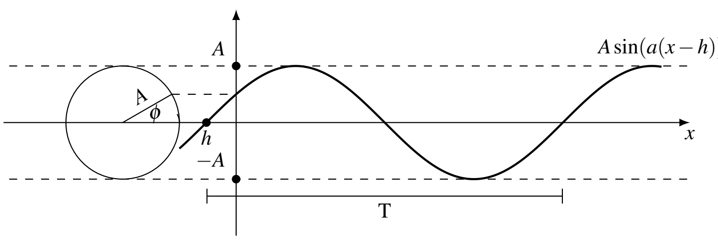


### Fonctions sinusoïdales

Forme générale :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= A\sin(\omega(x-h))+k && \text{Déphasage temporel}\\
&= A\sin(\omega x+\phi)+k && \text{Déphasage angulaire}\\
\mathrm{dom}(\sin) &= \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

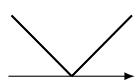
| | |
|---|---|
| Amplitude : $A$ | Déphasage (temps) : $h = -\dfrac{\phi}{\omega}$ |
| Vitesse angulaire $\omega$ | |
| Période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ | Déphasage (angle) : $\phi = -\omega h$ |




# Fonctions définies par morceaux

### Valeur absolue

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



# Propriétés de fonctions

Périodique (période $T$) $f(x+T) = f(x)$ (ex : $\sin(x)$)

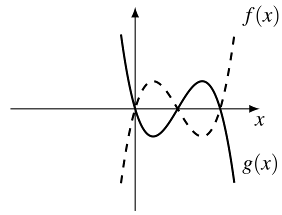
Paire $f(-x) = f(x)$ (ex : $x^2$, $\cos(x)$)

Impaire $f(-x) = -f(x)$ (ex : $x^3$, $\sin(x)$)

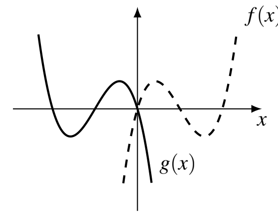
# Transformation du graphe d'une fonction

### Symétries

Symétrie par rapport à l'axe des $x$ $g(x) = -f(x)$



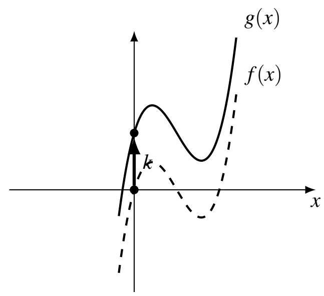

Symétrie par rapport à l'axe des $y$ $g(x) = f(-x)$




### Translation verticales et horizontales

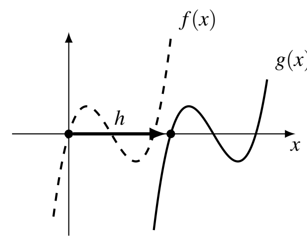
Translation verticale de $k$ :

$$g(x) = f(x) + k$$




Translation horizontale de $h$ :

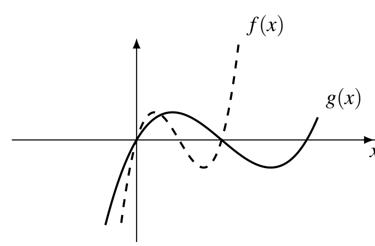
$$g(x) = f(x-h).$$




### Changements d'échelles

Facteur $b$ horizontal :

$$g(x) = f\left(\frac{x}{b}\right)$$




Facteur $a$ vertical :

$$g(x) = af(x).$$