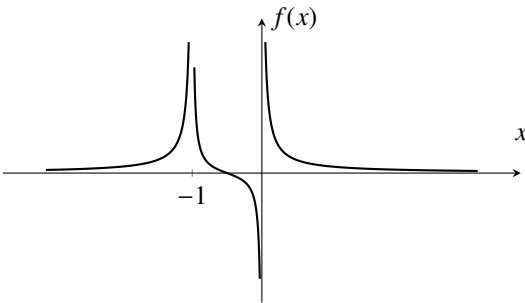


Intuition limites et asymptotes

Question 1

Évaluer les limites suivantes en se basant sur le graphique de la fonction f .



- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ | e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ | g) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ | h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ |

Arithmétique de l'infini

Question 2

Évaluer les limites suivantes.

- | | |
|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 + 4x - 7$ | c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + x + 10$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x+5}$ | d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^3 + 2x - 1}$ |

Question 3

Évaluer les limites suivantes.

- | | |
|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x-2}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 + 7x - 13}{x^2 - 3x - 10}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x+2}{x^2 + x^4}$ | d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x+1}$ |

Question 4

Évaluer les limites suivantes.

- | | |
|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{3x^2 + 4x - 7}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$ | g) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{3x^2 + 4x - 7}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x^2 + 4x - 7}$ | h) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{3x^2 + 4x - 7}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 1}$ | i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{3x^2 + 4x - 7}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x^2 + 4x - 7}$ | j) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$ |

Question 5

Évaluer les limites suivantes.

- | | |
|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{3x-25}{x-7}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{3/2}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$ | g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{x-2}}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{x-3}$ | h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2}{x-2}}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{\frac{x+3}{x+2}}$ | i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow -4} \sqrt[4]{4+x}$ | j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x^2}$ |

Question 6

Le prix fixé pour un bien influence directement la quantité de ce bien que les consommateurs sont prêts à acheter (plus le prix est bas, normalement, plus on achète). Supposons qu'on puisse trouver le prix P d'un bien donné en fonction de la quantité Q de ce bien que les consommateurs sont prêts à acheter par la fonction

$$P = \frac{1475}{Q+100}$$

- Exprimer la quantité que les consommateurs sont prêts à acheter en fonction du prix du bien.
- Combien de biens les consommateurs achèteront si le prix est fixé à 2,50\$?
- Évaluer $\lim_{P \rightarrow 0^+} Q(P)$
- Expliquer dans le contexte la réponse obtenue en (c).
- Évaluer $\lim_{P \rightarrow \infty} Q(P)$
- Dans le contexte, est-il plausible d'obtenir une telle réponse ?
- Déterminer le prix au-delà duquel les consommateurs ne sont plus intéressés à acheter le produit.

Question 7

Dans une certaine ville, une rumeur se propage de sorte que la proportion P de la population de la ville étant au courant de la rumeur s'exprime en fonction du nombre t de jours écoulés depuis le début de la rumeur par la fonction $P = 1 - 2^{-0,27t}$.

- Quel serait un domaine raisonnable pour cette fonction ?
- Au départ, selon cette fonction, quelle proportion de la population connaît la rumeur ?
- Qu'en est-il après une semaine ?
- Y aura-t-il un moment où le village en entier connaîtra la rumeur ?
- Comment peut-on interpréter le résultat de $\lim_{t \rightarrow \infty} P$?

Formes indéterminées « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\infty - \infty$ » Asymptotes

Question 8

Évaluer les limites.

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4}{x-4}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x - 1)$
 b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+6}{2x-1}$ e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 3x - 4}{x^3 - 6}$
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 6}{6x^2 + 4x + 10}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{2x + 3}$

Question 9

Évaluer les limites.

- a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{(x-2)^2} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{-3}{x^2 - 4} - \frac{2}{x+2} \right)$

Question 10

Une citerne contient 2500 l d'eau pure. On y verse une solution saline à un rythme tel que la concentration C en sel (en g/l) dans la citerne après t minutes est donnée par

$$C(t) = \frac{15t}{250+t}.$$

- a) Quel est la concentration de sel après 10 minutes ?
 b) Après combien de temps sera-t-elle de 5 g/l
 c) Évaluer $\lim_{x \rightarrow \infty} C(t)$ et interpréter le résultat dans le contexte donné.

Question 11

Évaluer les limites suivantes.

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{9x^4 - 6x^3 + 1}$ g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{4x^2 - 1}}{1 - 3x}$
 b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + x^3 + x - 7}{3x^4 + 5x^2 - 1}$ h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3}{3x^2 + 4x} \right)^4$
 c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 1}{x^3 + 2x}$ i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^5 - 4x^2} - \sqrt{9x^6 + 3}}{5x^7 - 2x^4 + 1}$
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3x - x^2}{3 + x^6}$ j) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{5}{x^2 - 7x + 12} - \frac{1}{x^2 - 9} \right)$
 e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x}$ k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x+4} - \frac{5}{x^2 - 16} \right)$
 f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{x^2 + 1}$

Question 12

Trouver toutes les asymptotes horizontales et verticales de chacune des fonctions.

- a) $y = \frac{2x+5}{x-3}$ e) $y = \frac{x+1}{x^2-1}$
 b) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ f) $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$
 c) $y = \frac{x^2+3}{x}$ g) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{(1-x)}$
 d) $f(x) = \frac{x-15}{x+3}$ h) $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

Question 13

Trouver toutes les asymptotes horizontales et verticales de la fonction suivante.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ \frac{3}{x^2 - 2x - 8} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{3x^2 - x}{x^2 + 2x + 6} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Question 14

Selon la loi de Coulomb, la force d'attraction F (en Newtons) entre deux charges de signes contraires est inversement proportionnelle au carré de la distance x qui les sépare, ce qui se traduit par $F(x) = \frac{k}{x^2}$ où k est une constante positive.

- a) Évaluer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ et interpréter dans le contexte.
 b) Évaluer $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ et interpréter dans le contexte.

Question 15

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2-8}{x+4} & \text{si } x < -2 \\ -x+6 & \text{si } -2 \leq x < 3, \\ \frac{3}{x-2} & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

- a) Trouver les asymptotes verticales de la fonction f .
 b) Trouver toutes les valeurs de x où la fonction f n'est pas continue.

Solutions

Question 1

- a) ∞
- b) ∞
- c) ∞
- d) $-\infty$
- e) ∞
- f) N'existe pas.
- g) 0
- h) 0

Question 2

- a) $3(\infty)^2 + 3(\infty) - 7 = \infty$
- b) $\frac{3}{\infty+5} = \frac{3}{\infty} = 0$
- c) $(-\infty)^3 + (-\infty) + 10 = -\infty - \infty + 10 = -\infty$
- d) ∞

Question 3

- a) $-\infty$
- b) ∞
- c) ∞
- d) \nexists car différent si $x \rightarrow -1^-$ et $x \rightarrow -1^+$

Question 4

- a) $\frac{1}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$
- b) $\frac{1}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^+} = \infty$
- c) $\frac{1}{3\infty^2 + 4\infty - 7} = \frac{1}{\infty} = 0$
- d) $\frac{1}{(-\infty)^2 + 1} = \frac{1}{\infty} = 0$
- e) $\frac{1}{\infty} = 0$
- f) $\frac{1}{3x^2 + 4x - 7} = \frac{1}{(3x+7)(x-1)}$, donc $\frac{1}{(3(1^+) + 7)(1^+ - 1)} = \frac{1}{0^+} = \infty$
- g) $\frac{1}{(3(1^-) + 7)(1^- - 1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$
- h) $\frac{1}{(3(1^+) + 7)(1^+ - 1)} = \frac{1}{0^+} = \infty$
- i) \nexists
- j) $-\infty$

Question 5

- a) $\frac{-4}{0^+} = \infty$
- b) $(x^3 - 3x^2 - x + 3) = (x-3)(x^2 - 1)$
 $\frac{10}{(0^+)(8)} = \infty$
- c) $\sqrt[3]{0} = 0$
- d) $\sqrt{0} = 0$
- e) $\sqrt[4]{0} = 0$
- f) $0^{3/2} = 0$
- g) $\sqrt{0^+} = 0$
- h) $\sqrt{0^-} = \nexists$
- i) Note : $\sqrt{x^2 + 1} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ et $|x| = -x$ quand $x \rightarrow -\infty$. La limite est donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -1$
- j) Note : $\sqrt{x^2 + 2x + 3} = |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}$ et $|x| = x$ quand $x \rightarrow \infty$. La limite est donc $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}}{x} = 0$

Question 6

- a) $Q = \frac{1475}{P} - 100$
- b) 490
- c) ∞
- d) Plus le prix est bas (presque gratuit), plus y aura de ventes.
- e) -100
- f) Non (nombre de ventes négatif).
- g) 14.75 \$

Question 7

- a) $[0, \infty[$
- b) 0 (personne)
- c) 73% de la population.
- d) Théoriquement pas.
- e) Plus le temps avance, plus la ruineur tend à être connue de tous.

Question 8

- a) FI $\frac{\infty}{\infty}$. En utilisant $\frac{x+4}{x-4} = \frac{x(1 + \frac{4}{x})}{x(1 - \frac{4}{x})}$ on trouve $\frac{(1 + \frac{4}{\infty})}{(1 - \frac{4}{\infty})} = 1$
- b) 3/2
- c) ∞
- d) $-\infty$
- e) 0
- f) -1/2

Question 9

- a) Pour lever l'indétermination, utiliser $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{3(x-2) - 2}{(x-2)^2} = \frac{3x-8}{(x-2)^2}$. La limite est $-\infty$
- b) Utiliser $\frac{-3}{x^2-4} - \frac{2}{x+2} = \frac{2x+1}{(x-2)(x+2)}$. La limite est ∞

Question 10

- a) 15/26 g/L ou 0,577 g/L.
- b) Après 125 minutes.
- c) Plus le temps avance, plus la concentration se stabilise près de 15 g/L.

Question 11

- a) ∞
- b) 2
- c) $-\infty$
- d) 0
- e) Utiliser $x - \sqrt{x} = x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. La valeur de la limite est ∞

- f) 0
- g) 0
- h) 16/81
- i) 0
- j) \nexists
- k) 0

Question 12

- a) AH en $y = 2$; AV en $x = 3$.
- b) AH en $y = 0$; AV en $x = -2$ et $x = 2$.
- c) Pas d'AH; AV en $x = 0$.
- d) AH en $y = 1$; AV en $x = -3$.
- e) AH en $y = 0$; AV en $x = 1$.
- f) AH en $y = 0$; pas d'AV
- g) AH en $y = 1$ et $y = -1$; AV en $x = 1$
- h) AH en $y = -3$ et $y = 3$; AV en $x = -1$ et $x = 3$ (note : f n'est pas définie sur $[-1, 3]$, pour vérifier les AV, il faut prendre les limites $x \rightarrow -1^-$ et $x \rightarrow 3^+$.)

Question 13

- A.H. en $y = 0$ et en $y = 3$; pas d'A.V.

Question 14

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \infty$. Plus les corps sont rapprochés, plus ils s'attirent.
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$. Plus les corps sont éloignés, moins ils s'attirent.

Question 15

- a) A.V. en $x = -4$.
- b) $x = -4, x = -2, x = 3$