Problèmes d'optimisation

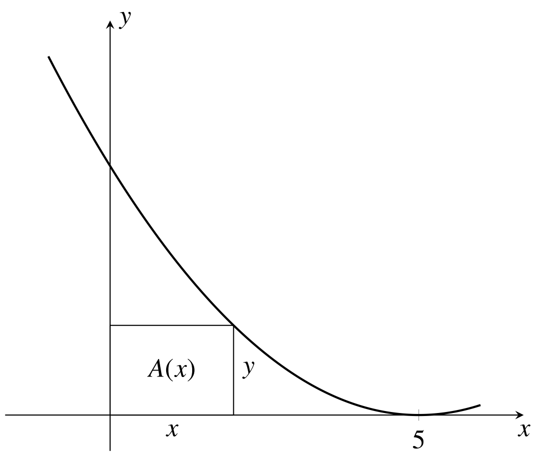
Question 1
Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale dont le périmètre est de 36 m.

Question 2
Trouver deux nombres x et y tels que $2x + 5y$ est minimum et $xy = 10$.

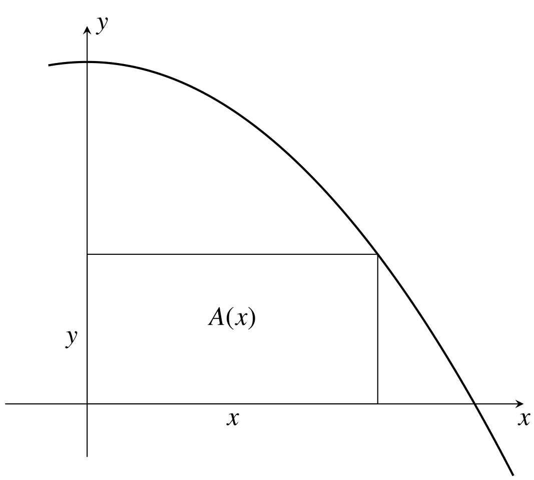
Question 3
Trouver deux nombres x et y tels que $x + y$ est minimum et $xy = 3$.

Question 4
Déterminer le plus grand produit possible de deux nombres x et y tels que $2x + 3y = 1$.

Question 5
Déterminer la valeur de x où un rectangle inscrit entre la courbe d'équation $y = (x - 5)^2$ et les axes de coordonnées a une aire maximum.



Question 6
Déterminer la valeur de x où un rectangle inscrit entre la courbe d'équation $y = 4 - x^2$ et la partie positive des axes de coordonnées a une aire maximum.



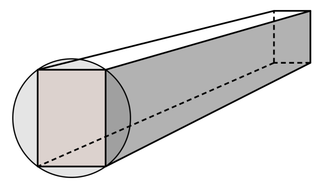
Question 7
Quelles sont les dimensions (rayon et hauteur) d'un cylindre d'aire minimale et de volume 1024π ?

Question 8
Suite à une étude, on détermine que la probabilité de guérison P d'une maladie grave dépend de la dose administrée x (en grammes) d'un médicament par la fonction

$$P(x) = \frac{3\sqrt{x}}{4(x+1)}.$$

Quelle quantité de ce médicament donne à un patient la plus grande probabilité de guérir ?

Question 9
On sait que la résistance d'une poutre est proportionnelle au produit de sa base et du carré de sa hauteur. Quelle sont les dimensions de la poutre la plus résistante que l'on peut tailler d'un tronc d'arbre de 30 cm de diamètre ?



Question 10
On veut imprimer sur une feuille de papier dont l'aire est de $2\,\text{m}^2$ en laissant des marges de 10 cm en haut et en bas et de 8 cm sur les côtés. Quelles seront les dimensions de cette feuille pour que la surface imprimée soit maximale ?

Question 11
Une entreprise a déterminé que le nombre x d'unités vendues chaque jour dépend du prix de vente p par la fonction

$$x(p) = 1000 - p.$$

Le coût de production de x unités est de

$$C(x) = 3000 + 20x.$$

a) Exprimer le revenu $R(x)$ de l'entreprise en fonction du nombre d'unités vendues x.

b) Exprimer le profit $P(x)$ de l'entreprise en fonction du nombre d'unités vendues x.

c) Si la capacité maximale de production de l'entreprise est de 1000 unités par jour. Combien d'unités doit-elle produire pour maximiser son profit ?

d) Quel est le profit maximal de l'entreprise ?

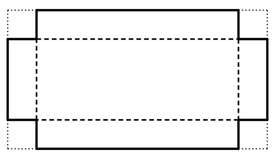
e) À quel prix doit-elle vendre chaque unité pour maximiser son profit ?

Question 12
On veut couper une corde de 200 cm en deux. L'une des deux parties servira à former un carré et l'autre, à former un cercle.

a) À quelle longueur doit-on couper la corde pour que la somme des surfaces des figures soit maximale ?

b) À quelle longueur doit-on couper la corde pour que la somme des surfaces des figures soit minimale ?

Question 13
On peut fabriquer une boîte sans couvercle en enlevant un carré de chaque coin d'une feuille de carton rectangulaire de dimensions 24 cm par 45 cm, puis en repliant chaque côté. Quelle devrait être la mesure du côté de ce carré pour que la boîte ait un volume maximal ?

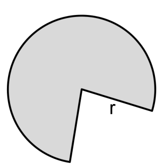


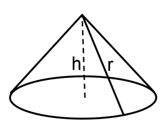
Question 14
Une compagnie fabriquant des petits pingouins de plastique estime que le coût (en \$) pour fabriquer x pingouins de plastique est donné par

$$C(x) = 6300 + 10x + \frac{x^2}{28}$$

En divisant ce coût par x, on obtient le coût unitaire de production. Combien de pingouins de plastique la compagnie doit-elle produire pour minimiser ce coût unitaire ?

Question 15
On forme un cône en supprimant un secteur d'un disque de rayon égal à 20 cm. Quelle hauteur a le cône de volume maximal ainsi formé ?





Question 16
Une entreprise vend un produit 100 \$ l'unité. Le coût total (en \$) de production quotidienne de x unités est de

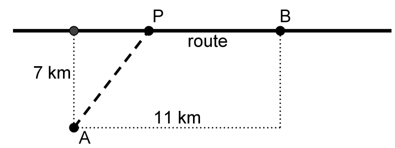
$$C(x) = 100000 + 50x + \frac{x^2}{400}.$$

a) Combien d'unités doit-elle produire chaque jour pour éviter les pertes ?

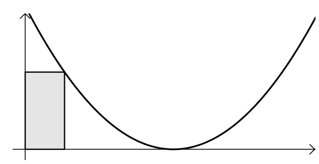
b) Si l'usine a une capacité de production de 7000 unités par jour et qu'elle vend toutes les unités qu'elle produit, combien d'unités doit-elle produire par jour afin de maximiser son profit.

c) Si l'entreprise décide d'investir pour augmenter sa capacité de production (agrandissement, machinerie, employés. . .), à quel niveau (en unités par jour) devrait-elle le faire ?

Question 17
On veut passer un fil électrique entre le point A et le point B. La réalisation de ce projet implique un coût 800 \$/km le long d'une route existante et de 1200 \$/km autrement. Trouver la position du point P pour que le coût soit minimal.



Question 18
Trouver les dimensions du rectangle d'aire maximale que l'on peut inscrire entre l'axe des x, l'axe des y et la courbe d'équation $(x - 9)^2$.



Question 19
Trouver le point de la courbe de $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ le plus près du point $(-1, 0)$.

Question 20
Le propriétaire d'un immeuble de 30 logements a déterminé que si le loyer est de 600 \$, tous ses logements sont occupés et que chaque augmentation de 25 \$ entraînera la perte d'un locataire. Quel doit être le prix du loyer pour que le propriétaire ait un revenu de location maximal ?

Question 21
Dans le contexte du problème précédant, considérons que chaque logement entraîne des dépenses de 40 \$ par mois s'il est inoccupé et de 90 \$ par mois s'il est occupé. Quel doit être le prix du loyer pour que le propriétaire maximise son profit ?

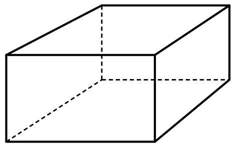
Question 22
Une compagnie lance sur le marché un nouveau modèle de cure-dents révolutionnaires. Une étude de marché révèle que le profit mensuel P de la compagnie dépend du prix de vente fixé x par la fonction

$$P(x) = -400x^3 - 380x^2 + 5600x.$$

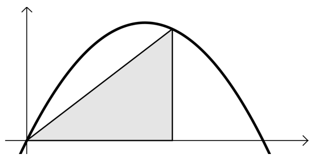
Quel prix maximise ce profit ?

Question 23
Trouver les dimensions du rectangle de périmètre maximal que l'on peut inscrire dans un cercle dont le rayon est de 10 m.

Question 24
On veut fabriquer une boîte à base carrée, avec un couvercle. Les matériaux utilisés coûtent 0,03 \$ par cm^2 pour le fond, 0,05 \$ par cm^2 pour le couvercle et 0,02 \$ pour les côtés. Si la boîte doit coûter 24 \$, quelles doivent être ses dimensions pour que son volume soit maximal ?



Question 25
Trouver les dimensions du triangle rectangle d'aire maximale que l'on peut inscrire sous la courbe de $y = 12x - x^2$?



Question 26
Soit la fonction

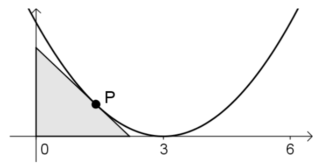
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Trouver le point P sur la courbe de cette fonction qui minimise la pente d'une droite passant par ce point P et le point $(0, 1)$.

Question 27
Trouver le point P de la courbe d'équation

$$f(x) = (x-3)^2$$

tel que le triangle rectangle délimité par l'axe des x, l'axe des y et la droite tangente à la courbe au point P soit d'aire maximale.



Solutions

Question 1

9 m par 9 m.

Question 2

Somme : $S = 2x+5y$ et produit $10 = xy$. On veut optimiser S. On a que $y = \frac{10}{x}$, et donc $S(x) = x + \frac{50}{x}$. En dérivant, on trouve que $S'(x) = 2 - \frac{50}{x^2}$.

Valeurs critiques : $S'(x) = 0 \iff x = \pm 5$.

La dérivée seconde est

$$S''(x) = \frac{100}{x^3}.$$

Avec le test de la dérivée seconde, on trouve que S a un minimum en $x = 5$ (car $S''(5) > 0$ et un maximum en $x = -5$ (car $S''(-5) < 0$).

Les nombres cherchés sont donc $x = 5$ et $y = \frac{10}{5} = 2$.

Question 3

Optimiser $S(x) = x + \frac{3}{x}$. $S'(x) = -\frac{3}{x^2} + 1$. Valeurs critiques : $x = \pm\sqrt{3}$. Avec le test de la dérivée seconde, on trouve un minimum en $x = \sqrt{3}$ et un maximum en $x = -\sqrt{3}$. Les nombres cherchés sont donc $x = \sqrt{3}$ et $y = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Question 4

On doit maximiser le produit xy. Comme $2x + 3y = 1$, on a que $y = \dfrac{1-2x}{3}$, on a que le produit est

$$P(x) = xy = x\left(\frac{1-2x}{3}\right) = \left(\frac{x-2x^2}{3}\right).$$

On optimise $P(x)$:

$$P'(x) = \frac{1}{3} - \frac{4x}{3}.$$

$$P'(x) = 0 \iff \frac{1}{3} - \frac{4x}{3} = 0 \iff x = \frac{1}{4}.$$

On vérifie que c'est bien un maximum à l'aide de la dérivée seconde :

$$P''(x) = -\frac{4}{3} < 0,$$

on a bien un maximum en $x = \frac{1}{4}$. Le produit maximum est donc

$$P\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}.$$

Question 5

On commence par exprimer la valeur $A(x)$ à maximiser en fonction de x. Comme l'aire du rectangle est xy et que $y = (x-5)^2$, on a

$$A(x) = xy = x(x-5)^2.$$

À la valeur maximum de la fonction $A(x)$, la pente à la fonction $A(x)$ doit être nulle.

$$\begin{aligned}
A'(x) &= \left(x(x-5)^2\right)' \\
&= \left(x(x^2-10x+25)\right)' \\
&= \left(x^3-10x^2+25x\right)' \\
&= 3x^2-20x+25 \\
&= (3x-5)(x-5)
\end{aligned}$$

On trouve les zéros de $A'(x)$:

$$(3x-5)(x-5) = 0 \iff x = 5 \text{ ou } x = 5/3.$$

Comme la solution $x = 0$ correspond au sommet de la parabole d'équation $y = (x-5)^2$, cette solution correspond à un rectangle d'aire nulle qui n'est évidemment pas l'aire maximum. L'aire maximum est dont atteinte en $x = 5/3$.

Question 6

On commence par exprimer la valeur $A(x)$ à maximiser en fonction de x. Comme l'aire du rectangle est xy et que $y = 4 - x^2$, on a

$$A(x) = xy = x(4-x^2).$$

À la valeur maximum de la fonction $A(x)$, la pente à la fonction $A(x)$ doit être nulle.

$$\begin{aligned}
A'(x) &= \left(x(4-x^2)\right)' \\
&= \left(4x-x^3\right)' \\
&= 4-3x^2 \\
&= (2-\sqrt{3}x)(2+\sqrt{3}x)
\end{aligned}$$

Les zéros de $A'(x)$ sont $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ Comme on a prix $x \geq 0$, l'aire maximum est dont atteinte en $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Question 7

$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, contrainte : $V = \pi r^2 h = 1024\pi$, donc

$$\begin{aligned}
A(r) &= 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1024\pi}{\pi r^2}\right) \\
&= 2\pi r^2 + \frac{2048\pi}{r}
\end{aligned}$$

On optimise $A(r)$:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2048\pi}{r^2}$$

$$A'(r) = 0 \iff 4\pi r - \frac{2048\pi}{r^2} = 0 \iff r = 8.$$

On utilise le test de la dérivée seconde :

$$A''(r) = 4\pi + \frac{(2)2048\pi}{r^3}$$

$$A''(8) = 4\pi + \frac{(2)2048\pi}{8^3} = 12\pi > 0$$

On a bien un minimum.

Si le rayon est 8, la hauteur est de 16 (utiliser la contrainte).

Question 8

1 g, pour une probabilité de $3/8$.

Question 9

Si base = x et hauteur = h, alors la résistance est donnée par

$$R = Kxh^2$$

où K est la constante de proportionnalité.

Par Pythagore, comme la diagonale de la poutre coïncide avec le diamètre, on doit avoir

$$x^2 + h^2 = 30^2,$$

donc, en isolant h

$$h = \sqrt{30^2 - x^2}.$$

En substituant dans R, on trouve que

$$R = Kx(30^2 - x^2) = 30^2Kx - Kx^3.$$

La dérivée est

$$\frac{dR}{dx} = 30^2K - 3Kx^2.$$

La dérivée s'annule si

$$x = 10\sqrt{3}.$$

On vérifie que l'on a bien un maximum : la dérivée seconde est

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -6Kx.$$

Comme la dérivée seconde trouvée est négative si x est positif, on a bien un maximum par le test de la dérivée seconde.

La poutre de plus grande résistance est donc celle de base $10\sqrt{3}$ cm et de hauteur $10\sqrt{6}$ cm.

Question 10

$\sqrt{\frac{8}{5}}$ m par $\sqrt{\frac{5}{2}}$ m.

Question 11

a) $R(x) = 1000x - x^2$

b) $P(x) = -x^2 + 980x - 3000$

c) 490 unités.

d) 237 100 $ par jour.

e) 510 $.

Question 12

a) Il est préférable de ne pas couper la corde et de ne faire que le cercle.

b) 112 cm pour faire le carré et 88 cm pour le cercle.

Question 13

$V(x) = x(45-2x)(24-2x)$. $V'(x) = 12x^2 - 276x + 1080 = 12(x-5)(x-18)$. $V''(x) = 24x - 276 = 12(2x-23)$.

$V'(x) = 0$ ssi $x = 5$ ou $x = 18$.

$V''(5) < 0$ et $V''(18) > 0$, donc le max cherché est en $x = 18$. Il faut enlever un carré de 18 cm de côté.

Question 14

420 pingouins.

Question 15

$\dfrac{20}{\sqrt{3}}$ cm

Question 16

a) Au moins 2 255 unités.

b) 7 000 unités.

c) À 10 000 unités par jour.

Question 17

On doit rejoindre la route à 3,06 km de la ville B.

Question 18

Base de 3 unités, hauteur de 36 unités.

Question 19

$\left(\frac{1}{2}, \frac{9\sqrt{2}}{4}\right)$.

Question 20

$R(x) = (600 + 25x)(30 - x)$ où x est le nombre de logements inoccupés. Loyer optimal : 675 $

Question 21

700 $

Question 22

À 1,87 $, pour un profit maximal de 6527,53 $.

Question 23

$\sqrt{50}$ m par $\sqrt{50}$ m.

Question 24

Base de $\sqrt{50}$ cm par $\sqrt{50}$ cm, hauteur de $50/\sqrt{2}$ cm.

Question 25

Base de 8 unités, hauteur de 32 unités.

Question 26

$P = \left(\frac{9}{4}, \frac{2}{3}\right)$

Question 27

$P = (1, 4)$ Indice : la base et la hauteur du triangle correspondent aux intersections avec les axes de la droite tangente au point P