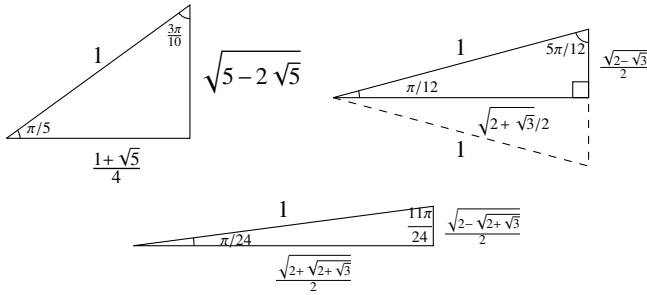


Examen formatif 4

Aucune documentation et aucune calculatrice autorisé. L'examen dure 2h20. Toute réponse doit être justifiée.

Vous pouvez utiliser les mesures des triangles suivants sans démonstration.



Question 1

Vrai ou faux ?

(Il n'est pas nécessaire de donner de démarche pour cette question.)

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \infty$
- Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ et $0 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$, on doit avoir que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
- $(b^{f(x)})' = (b^{f(x)})' f'(x)$
- $\arcsin(\sin(\pi/11)) = \pi/11$
- $(b^x)' = x b^{x-1}$
- La fonction $\ln(x)$ a une asymptote verticale en $x = 1$.

Question 2

Déterminer l'équation de la droite tangente au point $(\pi/3, f(\pi/3))$ du graphe de la fonction

$$f(x) = \sin(x)\cos(x).$$

Question 3

Évaluer les dérivées suivantes.

- $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(2) + \pi^x + e^\pi$
- $f(x) = \sin^3\left(\frac{x}{2}\right) + e^{x^2}$
- $f(x) = \sec(x^2 + 1) + \operatorname{arcsec}(x^2 + 1)$
- $f'(0)$ si $f(x) = \sin(x^2) + \sin^2(x) + 2^{\sin(x)}$
- $f'(25\pi/24)$ si $f(x) = \cotan(x)$.

Question 4

Sachant que la dérive de $\tan(x)$ est $\sec^2(x)$, utiliser l'identité $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$ pour déterminer la dérivée de $\sec(x)$.

Question 5

Déterminer pour quelle valeur de $x \in [0, 2\pi]$ la différence $\sin(x) - \cos(x)$ est maximale et déterminer cette différence.

Question 6

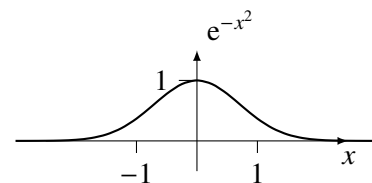
Faire le tableau de variation de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{e^x}.$$

Déterminer le domaine, les valeurs critiques, les minimums, les maximums, les points d'inflexion, les asymptotes, et esquisser la fonction. (Ind. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$)

Question 7

Voici le graphe de l'équation $y = e^{-x^2}$:



Déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale inscrit entre la courbe et l'axe des x et symétrique par rapport à l'axe des y (dont la base va de $-x$ à x).

Solutions

Question 1

- a) Vrai
b) Vrai
c) Faux
d) Vrai
e) Faux
f) Faux

Question 2

$f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. La pente est

$$a = f'(\pi/3) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

$f(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $y = ax + b$ donc $b = y - ax = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}$.
L'équation de la droite est

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}.$$

Question 3

a) $f'(x) = \frac{1}{1/x} \left(\frac{1}{x}\right)' + 0 + \pi^x \ln(\pi) + 0 =$
 $-x \frac{1}{x^2} + \pi^x \ln(\pi) = -\frac{1}{x} + \pi^x \ln(\pi)$

b) $\frac{3}{2} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2xe^{x^2}$

c) $2x \sec(x^2 + 1) \tan(x^2 + 1) + \frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)^2-1}}$

d) $f'(x) = 2x \cos(x^2) + 2 \sin(x) \cos(x) + 2^{\sin(x)} \cos(x)$
 $f'(0) =$
 $2(0) \cos(0^2) + 2 \sin(0) \cos(0) + 2^{\sin(0)} \cos(0) \ln(2) =$
 $0 + 2(0)(1) + 2^0(1) \ln(2) = \ln(2)$

e) $f'(x) = -\csc^2(x)$, et donc

$$f'(25\pi/24) = -\left(-\frac{1}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}}{2}}\right)^2 = \frac{4}{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Question 4

Dériver l'identité $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$:

$$2 \tan(x) \sec^2(x) = 2 \sec(x) (\sec(x))'.$$

En isolant $(\sec(x))'$, on obtient

$$(\sec(x))' = \frac{2 \tan(x) \sec^2(x)}{2 \sec(x)} = \sec(x) \tan(x).$$

Autre possibilité :

$$\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

$$\sec(x) = \sqrt{\tan^2(x) + 1}$$

$$(\sec(x))' = \left(\sqrt{\tan^2(x) + 1}\right)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\tan^2(x) + 1}} (2 \tan(x) \sec^2(x))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\tan^2(x) + 1}} (\tan(x) \sec^2(x))$$

$$= \frac{1}{\sec(x)} (\tan(x) \sec^2(x))$$

$$= \sec(x) \tan(x)$$

Question 5

$$f(x) = \sin(x) - \cos(x). f'(x) = \cos(x) + \sin(x)$$

$$f'(x) = 0 \text{ ssi}$$

$$\cos(x) + \sin(x) = 0$$

$$\cos(x) = -\sin(x)$$

$$-\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1$$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -1$$

$$\tan(x) = -1$$

$$x = 3\pi/4 \text{ ou } 7\pi/4$$

On vérifie pour laquelle de ces valeurs critiques on a un maximum. La dérivée seconde est

$$f''(x) = -\sin(x) + \cos(x).$$

En $x = 3\pi/4$ on a que $f''(3\pi/4) =$

$$-\sin(3\pi/4) + \cos(3\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-\sqrt{2}}{2} < 0. \text{ Comme la dérivée seconde est négative en } 3\pi/4, \text{ on a un maximum en } x = 3\pi/4.$$

En $x = 7\pi/4$ on a que $f''(7\pi/4) =$

$$-\sin(7\pi/4) + \cos(7\pi/4) = -\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0. \text{ Comme la dérivée seconde est positive en } 7\pi/4, \text{ on a un minimum en } x = 7\pi/4.$$

La différence la plus grande est donc quand $x = 3\pi/4$.

$$\text{Elle vaut } \sin(3\pi/4) - \cos(3\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

Question 6

Dérivées :

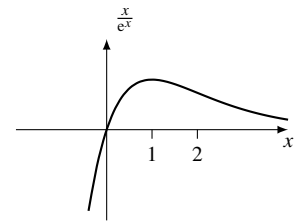
$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{(1-x)}{e^x}$$

$$f''(x) = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(-1-(1-x))}{e^{2x}} = \frac{(x-2)}{e^x}$$

Pas d'AV car $e^x > 0$.

AH : les limites nécessaires sont données.

x	∞	1	2	∞
$f'(x)$	+	0	-	+
$f''(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	↗ MAX	↘ INF	0



Question 7

$$A = 2xe^{-x^2}.$$

$$A' = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(1-2x^2).$$

$$A' = 0 \text{ si } (1-2x^2) = 0 \text{ ssi } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$A'' = 2e^{-x^2}(-2x) + e^{-x^2}(-4x) = -8xe^{-x^2}.$$

$$\text{En } x = \frac{1}{\sqrt{2}}, A'' = -\frac{8}{\sqrt{2}} < 0 \text{ et en } x = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$A'' = \frac{8}{\sqrt{2}} > 0. \text{ On a donc un maximum quand}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ L'aire maximum est donc } 2 \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}.$$