Exercices sur la définition de dérivée avec limites – Calcul différentiel

Département de mathématiques – Cégep de Saint-Laurent
201-735 – Hiver 2018 – Professeur : Yannick Delbecque
http://prof.delbecque.org – prof@delbecque.org – Bureau C286 – 514-747-6521 poste 7289

Rappel

1. $\lim_{x\to a} Cf(x) = C\lim_{x\to a} f(x)$
2. $\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
3. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$
4. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

Question 1
Montrer que l'équation de la droite qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(a+\Delta x), f(a+\Delta x)$ du graphe d'une fonction f est

$$y = f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x-a).$$

Faire une esquisse représentant la situation.

Question 2
Déterminer le TVI $\frac{dy}{dx}$ des fonctions suivantes au point donné à l'aide de la définition de dérivée en terme de limites (sans utiliser les formules de dérivation).

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

a) $y = x^2$ quand $x = 2$.
b) $y = x^2 - 1$ quand $x = 2$.
c) $y = x^3$ quand $x = 2$.
d) $y = 3x$ quand $x = 2$.
e) $y = 2$ quand $x = 2$.
f) $y = \frac{1}{x}$ quand $x = 2$.
g) $y = \frac{3}{x^2}$ quand $x = 2$.
h) $y = x^2$ quand $x = a$.
i) $y = x^3$ quand $x = a$.
j) $y = \frac{1}{x}$ quand $x = a$.

Question 3
Déterminer dy à l'aide de la définition différentielle.

a) si $y = x^4$
b) si $y = \frac{1}{x^2}$
c) si $y = \frac{x^2}{x+1}$
d) si $y = 1 - x^2$
e) si $y = x^2 + x + 1$
f) si $y = \sqrt{x-1}$

Question 4
En utilisant les résultats de la question précédente, déterminer l'erreur absolue sur y pour $x = 2$ et $x = 10$ si l'erreur en x est 0.1. Pour laquelle des deux valeurs de x l'erreur en y est-elle la plus grande ?

a) si $y = x^4$
b) si $y = \frac{1}{x^2}$
c) si $y = \frac{x^2}{x+1}$
d) si $y = 1 - x^2$
e) si $y = x^2 + x + 1$
f) si $y = \sqrt{x-1}$

Question 5
Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant les deux formes de la définition en terme de limites.

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = x^3$
c) $g(x) = \sqrt{x+3}$
d) $h(x) = \dfrac{x+3}{x+5}$
e) $f(x) = 2x^2 - x.$
f) $y = \sqrt{x^2+1}.$
g) $g(x) = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{1}{3x^2}.$

Question 6
Démontrer que $\left(2x+1\right)' = 2$ à l'aide de la définition de dérivée et des propriétés des limites.

Question 7
Démontrer que si f est dérivable pour n'importe quelle valeur de x, alors $\left(2f(x)+1\right)' = 2f'(x)$ à l'aide de la définition de dérivée et des propriétés des limites.

Question 8
Démontrer que $\left((x+1)^2\right)' = 2(x+1)$ à l'aide de la définition de dérivée et des propriétés des limites.

Question 9 (10 points)
Démontrer à l'aide de la définition de la dérivée et des propriétés des limites que

$$\left(f(x) + Cx\right)' = f'(x) + C$$

pour une constante C quelconque et en supposant que la dérivée $f'(x)$ existe.

Question 10
Démontrer que si f est dérivable pour n'importe quelle valeur de x, alors $\left(f(x)^2\right)' = 2f(x)f'(x)$ à l'aide de la définition de dérivée et des propriétés des limites. (Difficile car il faut des trucs algébrique ! Le truc est dans la preuve de la dérive des fonctions composées (avec les limites !))

Question 11
Montrer que $f(x) = |2x-3|$ n'est pas dérivable en $x = 3/2$.

Question 12
Montrer que $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ n'est pas dérivable en $x = 0$.

Solutions

Question 1

On peut faire la démonstration de différentes manières. Montrons que que la droite définie par l'équation donnée passe par les deux points donnés. En $(a, f(a))$, on a que

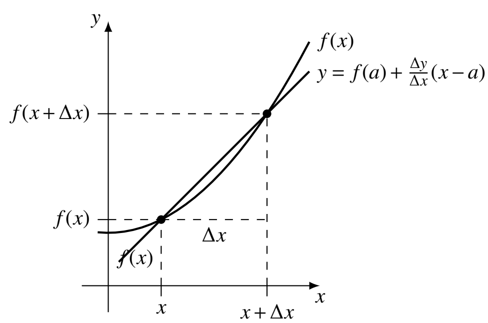
$$\begin{aligned} y &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x-a) \\ f(a) &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(a-a) \\ f(a) &= f(a) \end{aligned}$$

L'équation de la droite est donc satisfaite en ce point.

Au point $(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$, on a que

$$\begin{aligned} y &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x-a) \\ f(a+\Delta x) &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}((a+\Delta x)-a) \\ f(a+\Delta x) &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x \\ f(a+\Delta x) &= f(a) + \Delta y \\ f(a+\Delta x) &= f(a) + (f(a+\Delta x) - f(a)) \\ f(a+\Delta x) &= f(a+\Delta x) \end{aligned}$$

L'équation de la droite est donc aussi satisfaite pour l'autre point. Ainsi, comme la droite passe par les deux points donnés, c'est bien l'équation de la droite cherchée.



Question 2

a) 4
b) 4
c) 12
d) 3
e) 0, $y = 2$
f) $-\frac{1}{4}$
g) $-\frac{3}{4}$
h) $2a$
i) $3a^2$
j) $-\frac{1}{a^2}$

Question 3

a) $dy = 4x^3\,dx$
b) $dy = -\frac{2}{x^3}\,dx$
c) $dy = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\,dx$
d) $dy = -2x\,dx$
e) $dy = 2x+1\,dx$
f) $dy = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,dx$

Question 4

a) $|dy| = 3.2$; $|dy| = 400$
b) $|dy| = 0.025$; $|dy| = 0.0002$
c) $|dy| \approx 0.089$; $|dy| \approx 0.0991$
d) $|dy| = 0.4$; $|dy| = 2$
e) $|dy| = 0.5$; $|dy| = 2.1$
f) $|dy| = 0.05$; $|dy| \approx 0.1667$

Question 5

a) $f'(x) = 2x$

Forme 1 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x \\ &= 2x \end{aligned}$$

Forme 2 :

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x-a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a}{x-a} \\ &= \lim_{x \to a} x + a \\ &= a + a \\ &= 2a \end{aligned}$$

Donc $f(x) = 2x$.

b) $f'(x) = 3x^2$

c) $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$

d) $h'(x) = \dfrac{2}{(x+5)^2}$

e) $f'(x) = 4x - 1$

f) $y' = 2x$

g) $g'(x) = \frac{-2}{3x^2} + \frac{2}{3x^3}$

Question 6

$$\begin{aligned} \left(2x+1\right)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2(x+\Delta x)+1) - (2x+1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x + 2\Delta x + 1) - 2x - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Question 7

$$\begin{aligned} \left(2f(x)+1\right)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2f(x+\Delta x)+1) - (2f(x)+1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2f(x+\Delta x)+1) - 2f(x) - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2f(x+\Delta x) - 2f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 2\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= 2\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= 2f'(x) \end{aligned}$$

Question 8

$$\begin{aligned} \left((x+1)^2\right)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{((x+\Delta x)+1)^2 - (x+1)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2(x+\Delta x) + 1) - (x^2 + 2x + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2x + 2\Delta x + 1 - x^2 - 2x - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x+2)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2(x+1) + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 2(x+1) + \Delta x \\ &= 2(x+1) \end{aligned}$$

Question 9

$$\begin{aligned}
(f(x)+Cx)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)+C(x+\Delta x)-(f(x)+Cx)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)+C(x+\Delta x)-Cx}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{C(x+\Delta x)-Cx}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C(x+\Delta x)-Cx}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}C\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}C\\
&= f'(x)+C.
\end{aligned}$$

Question 10

$$\begin{aligned}
\left((f(x))^2\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x))^2-(f(x))^2}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x))^2-(f(x))^2}{\Delta x}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x+\Delta x)-f(x)}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x))^2-(f(x))^2}{f(x+\Delta x)-f(x)}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x))^2-(f(x))^2}{f(x+\Delta x)-f(x)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{(y+\Delta y)^2-y^2}{\Delta y}f'(x) \text{ En posant } y=f(x)\\
&= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{y^2+2y\Delta y+\Delta y^2-y^2}{\Delta y}f'(x)\\
&= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{2y\Delta y+\Delta y^2}{\Delta y}f'(x)\\
&= \lim_{\Delta y\to 0}(2y+\Delta y)f'(x)\\
&= 2yf'(x)\\
&= 2f(x)f'(x)
\end{aligned}$$

Note : en posant $y=f(x)$, $f(x+\Delta x)-f(x)$ est Δy. Comme f est dérivable, elle est aussi continue. Alors $\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)-f(x)=0$. On peut donc dire que $\Delta y\to 0$. Enfin, $f(x+\Delta x)=y+\Delta y$.

Question 11

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|2(\frac{3}{2}+\Delta x)-3|-|2\frac{3}{2}-3|}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|-0}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0^+}1\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|2(\frac{3}{2}+\Delta x)-3|-|2\frac{3}{2}-3|}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|-0}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0^-}-1\\
&= -1
\end{aligned}$$

Comme les limites à droites et à gauche n'existent pas, la limite $\Delta x\to 0$ n'existe pas et la fonction f n'est pas dérivable en $x=0$.

Question 12

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0^\pm}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0^\pm}\frac{\sqrt[3]{(0+\Delta x)^2}-\sqrt[3]{0}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0^\pm}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0^\pm}\frac{\Delta x^{2/3}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0^\pm}\frac{1}{\Delta x^{1/3}}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0^\pm}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}\\
&= \frac{1}{0^\pm}\\
&= \pm\infty
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\nexists$, la fonction f n'est donc pas dérivable en $x=0$.