

## Examen formatif 2

### Question 1

Répondre aux questions suivantes. Il n'est pas nécessaire de justifier vos réponses.

- a) Vrai ou faux ? Si  $f(x)$  n'est pas continue en  $x = a$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ .
- b) Vrai ou faux ? Si en évaluant une limite on obtient la forme indéterminée «  $0/0$  », la limite n'existe pas.
- c) Vrai ou faux ? Si deux fonctions  $F(x)$  et  $G(x)$  sont identiques près de  $a$  (sauf peut-être en  $a$ ), alors

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} G(x),$$

si la limite du membre de droite existe.

- d) Donner un exemple de graphe de fonction où  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ , mais où  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \exists$  et  $a \in \text{dom}(f)$ .
- e) Donner un exemple de graphe de fonction où  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$  mais où  $f(a)$  est défini.
- f) Évaluer la limite :  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{4 - x^2}$

### Question 2

Donner l'esquisse d'une fonction  $f$  qui satisfait toutes les conditions suivantes (Il n'est pas nécessaire de justifier).

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 4 & -1 \notin \text{Dom}(f) & \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty & f(1) = 3 & \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2) \end{array}$$

### Question 3

Évaluer les limites suivantes, si elles existent. Indiquez quand vous utilisez la continuité.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^5 + 2x^4 + x + 2} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{x - 3} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + 25} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{16} - \frac{1}{x^2}}{(x+1)^2 - 25} \end{array}$$

### Question 4

Soit  $f$  la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{si } x < -1, \\ 0 & \text{si } x = -1, \\ x + 1 & \text{si } -1 < x \leq 2, \\ 3 & \text{si } 2 < x < 3, \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

- a) Déterminer si  $f$  est continue en  $x = -1$ .

- b) Déterminer si  $f$  est continue en  $x = 2$ .
- c) Est-ce que  $f$  est continue sur l'intervalle  $[-1, 2]$  ?

### Question 5

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes à l'aide des propriétés de la dérivée. Simplifier les résultats obtenus.

$$\text{a) } y = (3x - 1)^{12}(x^2 + 1)^{20} \qquad \text{b) } y = \frac{(2x - 3)^{10}}{(3x - 2)^{10}}$$

### Question 6

Calculez les dérivées suivantes. Il n'est pas nécessaire de simplifier les résultats, mais on ne doit pas laisser d'exposants fractionnaires ou négatifs.

$$\text{a) } f(x) = (1 + 2x)^2 \sqrt[3]{1 - x^2} \qquad \text{b) } f(x) = \frac{(3x - 2)^2}{(x - 1)\sqrt{x}}$$

### Question 7

Soit  $C$  l'hyperbole d'équation

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 3$$

Déterminer l'équation de la tangente à  $C$  au point  $(4, 3)$ .

### Question 8

Soit  $C$  la courbe définie par l'équation

$$(x^3 - 1)y^2 = 1.$$

- a) Déterminer la pente de la tangente en un point quelconque  $(x, y)$  sur la courbe au point à l'aide de la dérivation implicite.
- b) L'affirmation suivante est-elle vraie ? Expliquer votre réponse.  
 « Comme  $y'$  vaut  $6/7$  au point  $(2, 1)$ , la pente de la tangente à  $C$  au point  $(2, 1)$  est  $6/7$ . »

### Question 9

Prouver que si  $f'(x)$  existe, alors  $(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$ . Utilisez la définition de la dérivée et les propriétés des limites (sans utiliser les propriétés de la dérivée). (Indice : utilisez le conjugué)

### Question 10

Montrer que la fonction  $\sqrt{(x-1)^2}$  n'est pas dérivable en  $x = 1$ .

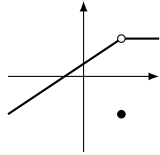
### Question 11

La surface d'une sphère est liée à son rayon par l'équation  $S = 4\pi r^2$ . Le rayon augmente à une vitesse constante de  $\frac{1}{2}$  cm/s, à quelle vitesse grandit la surface de la sphère au moment où son rayon est de 100 cm ? Donnez les unités dans votre calcul.

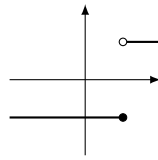
# Solutions

## Question 1

- a) Faux.
- b) Faux.
- c) Vrai.
- d) Par exemple :



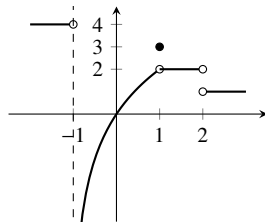
e) Par exemple :



f)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{0} = 0$

## Question 2

Il y a plusieurs solutions possibles. En voici une.



## Question 3

- a) C'est une forme « 0/0 ». Factoriser (x+2) au numérateur et au dénominateur. Numérateur  $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ . Dénominateur (en divisant) :  $x^5 + 2x^4 + x + 2 = (x+2)(x^4 + 1)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^5 + 2x^4 + x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x^4 + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)}{(x^4 + 1)} \\ &\stackrel{\text{cont}}{=} \frac{((-2)-2)}{((-2)^4 + 1)} \\ &= -\frac{4}{17} \end{aligned}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + 25} \stackrel{\text{cont}}{=} \frac{0}{50} = 0$

- c) C'est une forme « 0/0 ». Il faut donc simplifier le facteur (x-3) au numérateur et au dénominateur pour lever l'indétermination.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{x - 3} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 16} + 5}{\sqrt{x^2 + 16} + 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 16 - 25}{x - 3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 16} + 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 16} + 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 16} + 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 16} + 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2 + 16} + 5} \\ &\stackrel{\text{cont}}{=} \frac{3}{5} \end{aligned}$$

- d) Forme « 0/0 ». On veut simplifier le facteur commun (x-4).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{16} - \frac{1}{x^2}}{(x+1)^2 - 25} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\left(\frac{x^2 - 16}{16x^2}\right)}{((x+1)-5)((x+1)+5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\left(\frac{(x-4)(x+4)}{16x^2}\right)}{(x-4)(x+6)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{(x-4)(x+4)}{16x^2}\right) \frac{1}{(x-4)(x+6)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{(x+4)}{16x^2}\right) \frac{1}{(x+6)} \\ &\stackrel{\text{cont}}{=} \frac{1}{320} \end{aligned}$$

(ind. Simplifier le plus possible les fractions dans les calculs au lieu de multiplier les facteurs ensembles.)

## Question 4

- a) La fonction f n'est pas continue en  $x = -1$  : prendre la limite à gauche (attention, c'est un cas « 0/0 ») et à droite quand  $x \rightarrow -1$  pour montrer que  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  n'existe pas. La fonction n'est donc pas continue en  $x = -1$ .
- b) La fonction f est continue en  $x = 2$  : prendre la limite à gauche et à droite quand  $x \rightarrow 2$  pour montrer que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ . Comme on a aussi que  $f(2) = 3$ , la fonction est continue en  $x = 2$ .
- c) Non, car elle n'est pas continue en  $x = -1$  ; pour être continue sur  $[-1, 2]$ , f doit être continue en chaque  $x \in [-1, 2]$ .

## Question 5

a)  $y' = ((3x-1)^{12}(x^2+1)^{20})'$

$$\begin{aligned} &= ((3x-1)^{12})'(x^2+1)^{20} + (3x-1)^{12}((x^2+1)^{20})' \\ &= 12(3x-1)^{11}(3x-1)'(x^2+1)^{20} + (3x-1)^{12}(20)(x^2+1)^{19}(x^2+1)' \\ &= 12(3x-1)^{11}(3)(x^2+1)^{20} + (3x-1)^{12}(20)(x^2+1)^{19}(2x) \\ &= 36(3x-1)^{11}(x^2+1)^{20} + 40x(3x-1)^{12}(x^2+1)^{19} \\ &= (3x-1)^{11}(x^2+1)^{19}(36(x^2+1) + 40x(3x-1)) \\ &= (3x-1)^{11}(x^2+1)^{19}(36x^2 + 36 + 120x^2 - 40x) \\ &= (3x-1)^{11}(x^2+1)^{19}(156x^2 - 40x + 36) \end{aligned}$$

b)  $y' = \left(\frac{(2x-3)^{10}}{(3x-2)^{10}}\right)'$

$$\begin{aligned} &= \left(\left(\frac{2x-3}{3x-2}\right)^{10}\right)' \\ &= 10\left(\frac{2x-3}{3x-2}\right)^9 \left(\frac{2x-3}{3x-2}\right)' \\ &= 10\frac{(2x-3)^9}{(3x-2)^9} \left(\frac{2x-3}{3x-2}\right)' \\ &= 10\frac{(2x-3)^9}{(3x-2)^9} \frac{(2x-3)'(3x-2) - (2x-3)(3x-2)'}{(3x-2)^2} \\ &= 10\frac{(2x-3)^9(2(3x-2) - (2x-3)(3))}{(3x-2)^{11}} \\ &= 10\frac{(2x-3)^9(5)}{(3x-2)^{11}} \\ &= \frac{50(2x-3)^9}{(3x-2)^{11}} \end{aligned}$$

## Question 6

a)  $f'(x) = 4(1+2x)\sqrt[3]{1-x^2} - \frac{2x(1+2x)^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$

b)  $f'(x) = \frac{6(3x-2)(x-1)\sqrt{x} - (3x-2)^2\left(\sqrt{x} + \frac{(x-1)}{2\sqrt{x}}\right)}{x(x-1)^2}$

**Question 7**

On trouve la pente de la tangente au point (4,3) à l'aide de la dérivation implicite. On fait l'hypothèse que  $y = f(x)$ . En dérivant chaque membre de l'égalité

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 3$  par rapport à  $x$ , on obtient

$$\frac{x}{2} - \frac{2yy'}{9} = 0.$$

En isolant  $y'$ , on obtient que  $\frac{9x}{4y}$ . Au point (4,3), on a que  $y' = \frac{9(4)}{4(3)} = 3$ .

Comme la droite tangente est de pente 3 et passe par le point (4,3) (qui est bien sur l'hyperbole!), l'équation de la droite est

$$y = 3x - 9.$$

**Question 8**

a) On dérive chaque membre de l'équation  $(x^3 - 1)y^2 = 1$  pour obtenir

$$3x^2y^2 + 2(x^3 - 1)yy' = 0.$$

En isolant  $y'$ , on trouve que  $y' = -\frac{3x^2y}{2(x^3 - 1)}$ .

b) Même si on peut évaluer  $y'$  au point (2,1), la valeur obtenue n'est pas la pente de la tangente à  $C$  car le point (2,1) n'est pas sur la courbe  $C$ : en substituant dans l'équation qui définit  $C$ , on trouve

$$(2^3 - 1)1^2 \neq 1.$$

L'expression obtenue pour  $y'$  est valable uniquement pour les  $(x,y)$  qui satisfont l'équation définissant  $C$ .

**Question 9**

$$\begin{aligned} (\sqrt{f(x)})' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(x+\Delta x)} - \sqrt{f(x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \sqrt{f(x+\Delta x)} - \sqrt{f(x)} \right) \frac{1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \sqrt{f(x+\Delta x)} - \sqrt{f(x)} \right) \frac{\sqrt{f(x+\Delta x)} + \sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x+\Delta x)} + \sqrt{f(x)}} \frac{1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x+\Delta x) - f(x)) \frac{1}{\sqrt{f(x+\Delta x)} + \sqrt{f(x)}} \frac{1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{f(x+\Delta x)} + \sqrt{f(x)}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{f(x+\Delta x)} + \sqrt{f(x)}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x). \end{aligned}$$

**Question 10**

La dérivée de la fonction est (selon la définition) :

$$\left( \sqrt{(x-1)^2} \right)' = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(1-1)^2}}{x-1}$$

On montre que la limite du membre de droite n'existe pas en comparant les limites à droite et à gauche.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(1-1)^2}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(1-1)^2}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Comme les limites  $x \rightarrow 1^+$  et  $x \rightarrow 1^-$  ne sont pas les mêmes, la limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(1-1)^2}}{x-1}$$

n'existe pas. Ainsi la fonction  $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$  n'est pas dérivable en  $x = 1$ .

**Question 11**

Comme  $S = 4\pi r^2$ , on a que  $\frac{dS}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$ . Quand  $r = 100$  et  $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}$ , on obtient

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi(100 \text{ cm}) \left( \frac{1}{2} \text{ cm/s} \right) = 400\pi \text{ cm}^2/\text{s}.$$