Notes de cours

Calcul différentiel

Yannick Delbecque, Automne 2018

Chapitre 1

Révision

1.1 Questions notations et abréviations

1.1.1 Ensembles

Un **ensemble** est une collection d'éléments. Si x est un élément de de l'ensemble A, on écrit $x \in A$. Sinon, on écrit $x \notin A$. On ne tient pas compte des répétitions dans les ensembles : $\{1,2,3\}$ est le même ensemble que $\{1,2,3,3,3,3\}$!

On peut décrire un ensemble de plusieurs manières.

Compréhension Par un condition qui doit être satisfaite pour qu'un x soit élément de l'ensemble.

$$\{x \mid \text{ condition sur } x\}$$

Extension En donnant une liste des éléments de l'ensemble

$$\{-2,1,\pi,10\}$$

Un même ensemble peut être décrit de plusieurs manières :

$$A = \{0,2,4,6,8\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ est un nombre naturel pair plus petit que} 10\}$$

Les ensembles A et B sont identiques car ils contiennent les mêmes éléments. On écrit $A = B$ pour dire que deux ensembles sont **égaux**, c'est à dire qu'ils contiennent les mêmes éléments.

Cardinalité Un ensemble peut être **infini** comme l'ensemble des nombres pairs ou celui des nombres premiers, ou **fini** comme l'ensemble des facteurs entier du nombre 12. On appelle la taille d'un ensemble sa **cardinalité**.

Opérations de base sur les ensembles

Union

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Intersection

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Différence

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

Sous-ensemble Si chaque élément d'un ensemble A est aussi un élément d'un ensemble B, alors on dit que A est un **sous-ensemble** de B. On écrit alors

$$A \subseteq B.$$

Ne pas confondre $\in$ (« est élément de ») avec $\subseteq$ (« est sous-ensemble de ».

Ensembles souvent utilisés dans ce cours Dans ce cours, nous discuterons des ensembles de nombres suivants :

Les ensembles de nombres :

$\mathbb{N}$ Les nombres naturels

$\mathbb{Z}$ Les nombres entiers

$\mathbb{Q}$ Les nombres rationnels

$\mathbb{R}$ Les nombres réels

Ces ensembles importants seront décrits plus loin.

Nous utiliserons aussi les intervalles :

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (intervalle **fermé**)
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalle **ouvert**)
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

1.2 Logique et abréviations

« non-A » Négation de A. Diverses notations sont utilisées, par exemple $\neg A$

« si A, alors B » Notation : $A \implies B$. A est l'hypothèse, B est la conclusion. On dit aussi que A est une condition suffisante pour B et que B est une condition nécessaire pour A.

A si et seulement si B Notation : $A \iff B$ ou A ssi B. $A \iff B$ est équivalent à dire que $A \implies B$ et $B \implies A$.

« $\forall A$ » « Pour tout A. » On écrit par exemple

$$\forall n \in \mathbb{Z}.\, n \text{ est pair ou impair}$$

pour dire qu'un nombre entier quelconque est soit pair, soit impair.

« $\exists A$ » « Il existe A ». On écrit par exemple

$$\exists n \in \mathbb{Z}.\, n \text{ est un nombre premier}$$

pour dire qu'il y a (au moins) un nombre entier qui est premier.

Notons que, donné par écrit, l'énoncé d'une implication n'est pas toujours exactement la forme « si ... alors ... ». Par exemple :

> « Un nombre entier est divisible par 2 s'il se termine pas par 0,2,4,6 ou 8 »

est le même énoncé que

> « S'il se termine pas par 0,2,4,6 ou 8, un nombre entier est divisible par 2. »

En utilisant le symbole $\Longrightarrow$, cela revient à dire que

$$A \Longrightarrow B \text{ et } B \Longleftarrow A$$

sont équivalents.

La **contraposée** d'une implication $A \Longrightarrow B$ est l'implication $\text{non}-B \Longrightarrow \text{non}-A$. La contraposée est équivalente à l'implication originale.

Exemple 1.1. « Un nombre entier n'est pas divisible par 2 s'il ne se termine pas par 0,2,4,6 ou 8 »

est la contraposée de

> « Un nombre entier est divisible par 2 s'il se termine pas par 0,2,4,6 ou 8 »

Exemple 1.2. « Si un nombre est premier, alors il n'a pas de diviseurs autre que 1 et lui-même »

est la contraposée de

> « Si un nombre a d'autres diviseurs que 1 et lui-même alors il n'est pas premier.

Une **tautologie** est une affirmation qui est toujours vraie pour des raisons logiques. Par exemple :

$$A \Longrightarrow A$$

$$A \text{ et } B \Longrightarrow A$$

> « Si n est un nombre entier, alors n est pair ou n est impair »

Axiome Propriété qui est acceptée sans démonstration, considérée comme assez évidente pour être le fondement d'une théorie mathématique.

Théorème Résultat important, dont la validité est établie par une démonstration ou une preuve, et qui a une grande importance dans un domaine donné des mathématiques étant donné ses multiples conséquences. Abréviation en classe : « thm ».

Proposition Résultat important, dont la validité est établie par une démonstration ou une preuve. Abréviation en classe : « prop ».

Lemme Résultat servant à démontrer un ou plusieurs autres résultats.

Corrolaire Résultat qui est déduit facilement d'un résultat précédant, une conséquence immédiate d'un théorème ou d'une proposition.

Preuve (ou démonstration) Suite de déduction logiques dont la conclusion est un théorème, une proposition ou un lemme. Une preuve réponds à la question « pourquoi c'est vrai. « On indique habituellement la fin d'une preuve à l'aide de CQFD (« ce qu'il fallait démontrer »), QED (« *quod erat demonstrandum* », CQFD en latin) ou par un signe comme $\square$. Il existe plusieurs formes de preuve (directe, par induction, par contradiction) que nous verrons à l'œuvre au cours de la session.

Note importante : « démontrer » ne veut pas dire « donner un exemple ». Un cas particulier n'établit pas la vérité pour tous les cas. Cependant, un seul cas particulier peut réfuter une affirmation générale. On appelle un tel exemple un **contre exemple**.

Exemple 1.3. Le fait que

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

est un cas particulier qui ne démontre pas que

$$x^2 + y^2 = z^2$$

pour n'importe quel nombres x, y et z. Par exemple,

$$2^2 + 3^2 \neq 4^2.$$

Ce dernier exemple démontre cependant que

$$x^2 + y^2 = z^2$$

n'est pas toujours vrai !

Exemple 1.4. Démontrer à l'aide d'un contre-exemple qu'il n'est pas vrai que

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2$$

pour tout choix de nombres entier x, y et z.

On peut prendre le cas particulier $x = 2$ et $y = 3$.

$$(2 + 3)^2 = 25, \text{ mais } 2^2 + 3^2 = 13.$$

1.3 Ensembles de nombres

Nombres naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Un principe important qui est souvent considéré comme une partie essentielle de la définition des nombres naturels :

Proposition 1.1 (principe d'induction)**.** Si (1) une proposition impliquant une variable n représentant un nombre entier est vraie pour le nombre naturel $n = 0$ et (2) lorsqu'elle est vraie pour $n > 0$ et ses prédécesseurs, alors elle l'est aussi pour $n+1$, alors la proposition est vraie pour tout n.

Nombres entiers

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Quelques concepts liés aux nombres naturels et aux nombres entiers.

Définition 1.1. n est un nombre pair s'il existe un nombre $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k.$$

Définition 1.2. n est un nombre impair s'il existe un nombre naturel $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k + 1.$$

Théorème 1.1 (fondamental de l'arithmétique)**.** Tout nombre entier n peut se factoriser de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme un produit de facteur premiers.

Nombres rationnels

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$$

Théorème 1.2. Un nombre réel a peut s'écrire comme une fraction si et seulement si son développement décimal est périodique.

Nombres réels

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ a un développement décimal quelconque, possiblement infini}\}$$

Les nombres peuvent être combinés à l'aide des opérations de base : addition, soustraction, multiplication, division, exposants et racines. Quand une expression combine plusieurs opérations, on doit les effectuer dans l'ordre conventionnel déterminé par la « priorité des opérations ».

On suppose que les opérations de base ont les propriétés vu au secondaire (voir formulaire d'algèbre) : associativité, distributivité, commutativité, etc.

Théorème 1.3. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Lemme 1.1.

$$n \text{ pair } \iff n^2 \text{ pair.}$$

Démonstration. ($\Longrightarrow$) Si n est pair, alors n est le double d'un certain nombre k. On peut donc écrire que $n = 2k$. Dans ce cas,

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

ce qui montre que n^2 est bien le double d'un nombre entier.

($\Longleftarrow$) On démontre la contraposée : si n est impair, alors n^2 est aussi impair. Supposons que n est impair ; il peut donc s'écrire comme $n = 2k+1$ pour un certain nombre k. Dans ce cas,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

ce qui établi que n^2 est impair. □

du théorème. Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Nous allons montrer que cette hypothèse mène à un résultat absurde et qu'elle ne peut pas être vraie, donc que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Si $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, il existe deux entiers a et $b \neq 0$ tel que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Comme on peut toujours simplifier une faction, on peut simplifier $\frac{a}{b}$ pour obtenir une fraction simplifiée $\frac{m}{n}$. On a donc

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

où m et n n'ont aucuns facteurs communs.

En multipliant chaque membre de l'égalité $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ par n, on obtient

$$n\sqrt{2} = m.$$

En mettant au carré, on a que

$$n^2(2) = m^2$$

m^2 doit donc être pair. Par le lemme précédant, on a que m doit être pair lui aussi. m peut donc s'écrire comme $m = 2k$ pour un certain entier k. En remplaçant m par $2k$ dans l'égalité précédente

$$n\sqrt{2} = m,$$

on obtient que

$$n\sqrt{2} = 2k.$$

On met au carré pour obtenir

$$2n^2 = 4k.$$

En divisant par 2, on trouve

$$n^2 = 2k.$$

n^2 est donc pair, ce qui implique par le lemme précédant que n est pair lui aussi.

La fraction $\frac{m}{n}$ peut donc être simplifiée car le numérateur m et le dénominateurs n sont tous les deux pairs ! Cela contredit le fait que $\frac{m}{n}$ est une faction simplifiée. L'hypothèse « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel » est donc fausse et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

1.4 Algèbre

L'objectif principal de l'algèbre élémentaire est de déterminer une valeur inconnue dans une relation numérique. On peut poser ce genre de questions sous forme « écrite », par exemple

> (Problème vieux de quelques millénaires figurant sur la tablette cunéiforme AO 8862)
> J'ai multiplié longueur et largeur pour obtenir l'aire. J'ai additionné ce par quoi la longueur dépasse la largeur à l'aire et j'ai obtenu 183. La somme de la longueur et de la largeur est 27. Quelles sont la longueur, la largeur et l'aire ?

Les géomètres et mathématiciens ont développé au fil du temps différentes manière de représenter ce genre de problème afin de les résoudre plus facilement. La notation moderne, malgré le fait qu'elle exige plusieurs années d'entrainement, est de loin la plus efficace. Si x est la longueur et y la largeur, le problème se traduit en notation moderne comme

$$\begin{aligned} x - y + xy &= 183 \\ x + y &= 27 \end{aligned}$$

L'algébriste moderne applique ensuite quelques principes simples de manière astucieuse pour déterminer les valeurs inconnue. On peut même décrire la méthode de solution avec ces techniques : (1) exprimer y en fonction de x dans la seconde équation : $y = 27 - x$ (2) substituer la valeur trouvée dans la première équation $x - (27 - x) + x(27 - x) = 183$ (3) résoudre l'équation obtenue en regroupant : $-x^2 + 29x - 210 = 0$. On trouve deux solutions : $x = 14$ et $x = 15$, et donc les valeurs de y correspondantes : $y = 13$ et $y = 12$. L'aire correspondante est respectivement 182 et 180.

Si la solution de cet ancien problème vous semble complexe, en comparant avec une solution n'utilisant aucune des idées modernes comme des variables, la substitution, isoler, la formule quadratique, etc, la solution serait beaucoup plus complexe.

1.4.1 Principes généraux

Voici les principes les plus utilisés dans les raisonnements algébriques :

Une variable représentant un nombre inconnu d'un certain type (entier, rationnel, nombre réel) a les mêmes propriétés que les nombres du même type. On peut y appliquer les mêmes opérations.

(Transitivité de l'égalité) $A = B$ et $B = C$ alors $A = C$.

(Application d'une opération) Si $f(x)$ est une opération (fonction), on a que

$$A = B \implies f(A) = f(B).$$

Si f est une opération inversible, alors $A = B \iff f(A) = f(B)$.

Si $f^{-1}(x)$ est l'opération inverse de $f(x)$, alors

$$f(A) = B \iff A = f^{-1}(B).$$

(Substitution) si $A(x) = B(x)$ alors $A(C) = B(C)$, où C est une expression algébrique quelconque substituée à la place de la variable x.

Exemple 1.5. Par exemple, si on écrit

$$(x+2)^2 = (x+2)(x+2) = x(x+2)+2(x+2) = x^2+2x+2x+4 = x^2+4x+4.$$

On utilise (plusieurs fois) la *transitivité* pour conclure que

$$(x+2)^2 = x^2+4x+4.$$

Note : on écrit souvent verticalement une telle suite d'égalité quand elle est trop longue :

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= (x+2)(x+2)\\ &= x(x+2)+2(x+2)\\ &= x^2+2x+2x+4\\ &= x^2+4x+4.\end{aligned}$$

On utilise le principe de *substitution* quand on prend une identité algébrique simple pour en trouver une plus complexe.

Exemple 1.6. À partir de l'indentité générale pour les différences de carré

$$X^2 - Y^2 = (X-Y)(X+Y),$$

Cette identité est vraie peu importe les valeurs de X et Y. On peut déduite une nouvelle identité en substituant (par exemple) x^2 à X et $2x$ à Y :

$$(x^2)^2 - (2h)^2 = \big((x^2)-(2x)\big)\big((x^2)+(2x)\big),$$

Cette dernière égalité est donc déduite de la première à l'aide du principe de substitution.

En simplifiant l'identité obtenue, on obtient que

$$x^4 - 4h^2 = (x^2-2x)(x^2+2x)$$

L'application d'une même opération sur chaque membre d'une égalité est probablement le premier principe algébrique appris dans les cours d'algèbre élémentaire et est une généralisation du principe ayant donné son nom à l'algèbre.

Exemple 1.7. Si on a que $2x = 5$, on obtient que

$$\frac{2x}{2} = \frac{5}{2}$$

yy en applicant l'opération « diviser par deux » sur chaque membre de l'égalité initiale.

Comme « diviser par deux » est une opération inversible (dont l'inverse est « multiplier par deux », on peut écrire

$$2x = 5 \iff \frac{2x}{2} = \frac{5}{2}.$$

L'opération « mettre au carré » n'est pas inversible. Par exemple, si on met -2 au carré, on obtient 4. L'opération inverse est ambigüe : on pourra obtienir un carré de 4 à partir de 2 ou de -2.

Si on applique une opération non inversible, comme mettre au carré, on ne peut pas obtenir une équivalence entre les identités. Par exemple, l'implication

$$2x = 5 \implies 4x^2 = 25$$

est vraie, mais l'équivalence

$$2x = 5 \iff 4x^2 = 25$$

est fausse !

1.4.2 Propriétés algébriques utiles

Les identités algébriques suivantes sont très souvent utilisées.

$AB + AC = A(B + C)$ (mise en évidence simple)

$AC + AD + BC + BD = (A + B)(C + D)$ (mise en évidence double)

$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ (rationalisation)

$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ (différence de carrés)

$\left(\sqrt{A} \pm \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}\right) = A - B$ (conjugué)

$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ (différence de cubes)

$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (binôme carré parfait)

$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ (développement du binôme degré 3)

$(A + B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$ (développement du binôme degré 4)

1.4.3 Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal est un truc permettant de déterminer rapidement les coefficients du développement d'un binôme de degré quelconque : si on développe une expression de la forme $(A+B)^n$, les coefficients du développement sont donnée par la n-ième ligne du triangle de Pascal.

Triangle de Pascal

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
(A+B)^0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
(A+B)^1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
(A+B)^2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
(A+B)^3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
(A+B)^4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
(A+B)^5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
(A+B)^6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\vdots & & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Exemple 1.8. Le développement de $(x+2)^5$ a la forme suivante :

$$C_0x^5 + C_1x^42^1 + C_2x^32^2 + C_3x^22^3 + C_4x^12^4 + C_52^5$$

Les nombres C_0, C_1, ..., C_5 sont donnés par la ligne correspondant à $(A+B)^5$ du triangle de Pascal, soit

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1.$$

On a donc que

$$(x+2)^5 = x^5 + 5x^42 + 10x^32^2 + 10x^22^3 + 5x2^4 + 2^5$$

1.4.4 Autres principes fréquemment utilisés pour résoudre des équations

(EQ1) $ABC = 0 \implies A = 0$ ou $B = 0$ ou $C = 0$

(EQ2) $\dfrac{A}{B} = 0 \iff A = 0$ et $B \neq 0$

(EQ3) $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \iff AD = BC$ et $B, D \neq 0$

Le premier de ces principes permet de résoudre des équations sous forme factorisée. Par exemple, si on a l'équation

$$(x-2)(x+1) = 0$$

On a une expression de la forme $AB = 0$. Il faut donc que $A = 0$ ou que $B = 0$. Dans ce cas particulier, il faut donc que

$$x - 2 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0.$$

Cela implique que $x = 2$ ou $x = -1$.

Ce principe s'applique à un produit d'un nombre de facteur aussi grand que l'on veut : si un produit de facteurs est nul, un des facteurs doit être nul. Ainsi, les zéros de

$$(x-3)(x+\sqrt{33})(x-\log_2(3)) = 0$$

sont $x = 3$, $x = -\sqrt{33}$ et $x = \log_2(3)$.

La simplicité de la solution d'une équation factorisée est évidente si on la compare avec même équation non-factorisée :

$$x^3 - x^2\log_2(3) + \sqrt{33}x^2 - \sqrt{33}x\log_2(3) - 3x^2 + 3x\log_2(3) - 3\sqrt{33}x + 3\sqrt{33}\log_2(3) = 0.$$

C'est une des raisons principales pour lesquelles les techniques de factorisations de polynômes sont importante : elles permettent de prendre un équation polynômiale de degré élevé et de la transformer (en la factorisant) en plusieurs équations de degré moins élevée (donc plus faciles a résoudre).

Le second principe permet de résoudre facilement des expressions rationnelles factorisée :

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x-6} = 0$$

a comme solution les zéros de $(x-3)(x+1)$, soit $x = 3$ et $x = -1$. Seul le numérateur détermine les zéros d'une expression de la forme A/B. Cependant, le dénominateur ne peut pas s'annuler car il ne peut par y avoir de division par zéro. Ainsi, dans une équation comme

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x^2+2x+1} = 0$$

$x = 3$ et $x = -1$ sont les zéros du numérateur, mais $x = -1$ annule le dénominateur (ce qui cause une division par zéro !). La valeur $x = -1$ n'est donc par un zéro de l'équation.

1.4.5 Opérations inverses usuelles

En algèbre, on utilise souvent le « principe de la balance » : on peut faire la même opération de « chaque côté » d'une égalité. Les opérations inverses les plus souvent utilisée sont indiquées dans la liste suivante, avec les restrictions faisant en sorte que les opérations soient inversibles.

$A + C = B \iff A = B - C$

$CA = B \iff A = \frac{1}{C}B$ si $C \neq 0$.

$A^n = B \implies A = \pm\sqrt[n]{B}$ si n pair.

$A^n = B \iff A = \sqrt[n]{B}$ si n impair.

$b^A = B \iff \log_b(B) = A$ si $B > 0$.

$\sin(A) = B \iff A = \arcsin(B)$ si $-\frac{\pi}{2} \leq A \leq \frac{\pi}{2}$

$\cos(A) = B \iff A = \arccos(B)$ si $0 \leq A \leq \pi$

$\tan(A) = B \iff A = \arctan(B)$ si $-\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2}$

1.4.6 Factorisation

Comme nous l'avons dit précédemment, la factorisation est une stratégie importante pour simplifier une équation afin de la résoudre.

Exemple 1.9. Considérons l'équation

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

En factorisant le membre de gauche, on obtient

$$(x+1)(x-5) = 0.$$

Comme un produit de facteur est nul si un de ses facteur est nul, soit $(x+1) = 0$, soit $(x-5) = 0$. Les solutions sont donc $x = -1$ ou $x = 5$.

On voit dans cet exemple que chaque facteur de degré un, donc de la forme $x - a$, correspond à une solution de l'équation originale. Il y a en fait une correspondance entre les facteurs de degré 1 et les zéro : si $x = a$ est un zéro d'une équation polynômiale $P(x) = 0$, alors $(x - a)$ est un facteur de $P(x)$.

Le résultat suivant dit que chaque zéro d'un polynôme est lié à un « facteur coupable » lui correspondant et réciproquement.

Théorème 1.4 (Factorisation)**.** Si $P(x)$ est un polynôme quelconque, alors a est un zéro de $P(x)$ si et seulement si $(x - a)$ est un facteur de $P(x)$.

Autrement dit :

$$P(a) = 0 \iff P(x) = (x-a)Q(x).$$

Sous forme de slogan :

« zéro si et seulement si facteur (de degré 1). »

Exemple 1.10. Si $P(x) = x^2 - x - 2$, on a que

$$P(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0.$$

La valeur $a = 2$ est donc un zéro de $P(x)$. Le théorème de factorisation dit que $P(x)$ doit avoir $(x-2)$ (c'est à dire le facteur (x-le zéro)) comme facteur. Si on divise $P(x) = x^2 - x - 2$ par $(x-2)$, on trouve que

$$P(x) = (x-2)(x+1),$$

ce qui est est bien de la forme donnée par le théorème :

$$P(x) = (x-a)Q(x).$$

Exemple 1.11. La valeur $x = 1$ est un zéro de $x^3 - 1$. On sait donc par le théorème de factorisation que $x^3 - 1 = (x-1)Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme à déterminer. On peut toujours déterminer $Q(x)$ en divisant :

$$Q(x) = \frac{x^3 - 1}{(x-1)}.$$

En divisant, trouve que $Q(x) = x^2 + x + 1$, et donc

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Démonstration. ($\Longrightarrow$) Supposons que $P(a) = 0$. On peut diviser $P(x)$ par $(x-a)$ pour obtenir un expression de la forme

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R(x),$$

où $R(x)$ est le reste de la division et $Q(x)$ le quotient.

Le degré de $R(x)$ doit être zéro car on divise par le polynôme $(x-a)$ qui est de degré 1. (Le degré du reste est toujours strictement inférieur au degré du polynôme par lequel on divise.) Comme un polynôme de degré 0 est en fait une constante $R \in \mathbb{R}$, en divisant on a donc réécrit $P(x)$ comme suit :

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R$$

Si on évalue chaque membre de cette dernière égalité en a, on obtient

$$P(a) = (a-a)Q(a) + R$$

Par hypothèse, $P(a) = 0$. De plus, le facteur $a - a$ est toujours nul. On a donc

$$0 = 0 + R.$$

La seule valeur de R satisfaisant cette équation est zéro. On a donc établit que

$$P(x) = (x-a)Q(x) + 0 = (x-a)Q(x),$$

c'est à dire que $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$.

($\Longleftarrow$) Pour démontrer la réciproque, on fait l'hypothèque que $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$. Dans ce cas, on peut écrire $P(x)$ comme un produit de facteur de la forme

$$P(x) = (x-a)Q(x)$$

où $Q(x)$ est le quotient de la division de $P(x)$ par $(x-a)$.

On veut montrer que $P(a) = 0$. Il suffit d'évaluer la forme factorisée :

$$P(a) = (a-a)Q(a) = (0)Q(a) = 0.$$

$\square$

On peut conclure du théorème de factorisation que pour un polynôme $P(x)$,

$$P(x) \text{ n'a pas de zéro} \iff P(x) \text{ n'a pas de facteur de la forme } (x-a).$$

Théorème 1.5. Les polynômes réels irréductibles sont de l'une des deux formes suivantes :

- degré 1 de la forme $c(x-a)$ (a est nécessairement un zéro)
- degré 2 de la forme ax^2+bx+c, où $b^2-4ac<0$. (polynôme de degré deux sans zéros).

Théorème 1.6 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** Tout polynôme réel peut s'écrire comme un produit d'une constante réelle et de polynômes irréductibles, produit unique à l'ordre des facteurs près.

1.5 Fonction, graphe et domaine

Définition 1.3. Une **fonction** $f\colon A \to B$ allant d'un ensemble A à un autre ensemble B est une règle quelconque associant à des éléments a de l'ensemble A un unique élément b de l'ensemble B.

On dénote $f(a)$ l'élément de l'ensemble B associé à a.

Définition 1.4. Le **domaine** d'une fonction $f\colon A \to B$ est l'ensemble des éléments de A où $f(a)$ est défini. Notation :

$$\mathrm{dom}(f) = \{a \mid f(a) \text{ est défini}\}.$$

Les fonctions qui seront étudiée dans ce cours sont des **fonctions réelles** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On détermine le domaine d'une fonction réelle définie à l'aide des opérations dites « élémentaires » en utilisant les principes suivants.

$(\cancel{\div 0})$ Il ne peut y avoir de division par zéro.

$$\frac{A}{B} \text{ est défini} \iff B \neq 0$$

$\left(\cancel{\sqrt{<0}}\right)$ Il ne peut y avoir de racine paire de nombre négatifs.

$$\sqrt{A} \text{ est défini} \iff A \geq 0$$

$\left(\cancel{\log_b(\leq 0)}\right)$ Le logarithme d'un nombre négatif ou nul n'est pas défini (peu importe la base)

$$\log_b(A) \text{ est défini} \iff A > 0$$

On détermine le domaine d'une fonction définie par composition de plusieurs fonction élémentaires en vérifiant que chacune des opérations utilisée est définie.

1.5.1 Définition d'une fonction

On peut définir une fonction f de plusieurs manières.

On peut le faire en donnant explicitement une expression algébrique pour déterminer $f(x)$ à partir de la valeur de x, par exemple

$$f(x) = x^2.$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} x \mapsto x^2$$

On peut aussi définir une fonction *implicitement* à l'aide d'une égalité algébrique, par exemple :

$$y = x^2$$

$$x^2 - y = 0$$

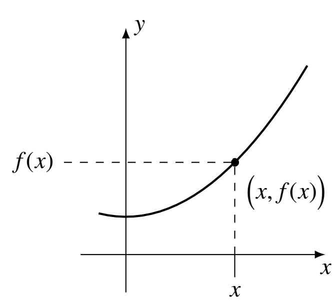
Dans ce cas, il faut spécifier quelle variable est déterminée en fonction de l'autre variable. La variable « entrée » est appelée **variable indépendante** et la « sortie » est appelé variable dépendante — elle dépend de la valeur de la variable indépendante.

Un définition implicite ne définit pas toujours une fonction : il arrive qu'une valeur donnée de la variable indépendante corresponde à plusieurs valeurs de la variable dépendante. Par exemple

$$y^2 = x$$

ne définie par une fonction si on considère y comme variable dépendante. En effet, pour $x = 1$, les valeurs $y = 1$ et $y = -1$ satisfont toutes deux l'équation donnée. Il n'y a donc pas une valeur unique de y associée à la valeur $x = 1$. Cette relation ne défini pas une fonction.

Graphe d'une relation ou d'une fonction Le graphe d'une fonction f est l'ensemble des « points » $(x, f(x))$. Dans le cas des fonctions réelles, ces points peuvent être placés dans le plan cartésien pour obtenir une représentation graphique de f. Par exemple, si $f(x) = x^2$, on obtient



On peut trouver un point sur le graphe d'une relation en donnant une valeur à une variable et en isolant pour trouver la valeur de l'autre variable.

Exemple 1.12. Trouvons un point sur le graphe de la relation

$$2x^2 + 3y^2 = 1.$$

Si on prend $x = 0$, on obtient

$$2(0)^2 + 3y^2 = 1.$$

En simplifiant

$$3y^2 = 1.$$

On isole y :

$$y^2 = \frac{1}{3}.$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Il y a donc deux points correspondant à $x = 0$ sur le graphe de la relation donnée :

$$\left(0, 1/\sqrt{3}\right) \text{ et } \left(0, -1/\sqrt{3}\right).$$

Chapitre 2

Taux de variation, différentielles et dérivées

2.1 Taux de variation moyen

Définition 2.1. Soit f une fonction réelle. Si x varie de a à b, on note par Δx la grandeur de cette variation :

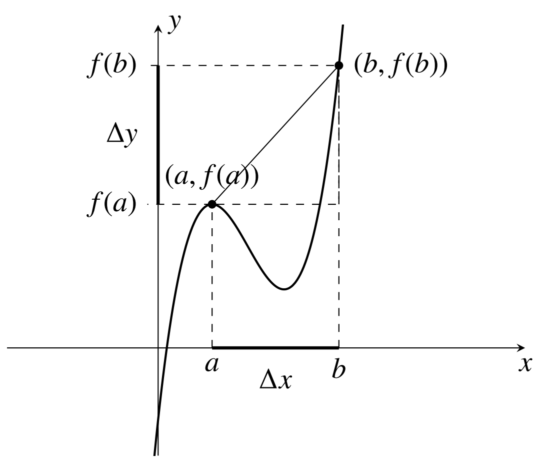
$$\Delta x = b - a$$

La variation en y d'une fonction $y = f(x)$ sur un intervalle $[a,b]$ est donnée par

$$\Delta y = f(b) - f(a).$$

Si on connait a et Δx plutôt que a et b, comme $b = a + \Delta x$, on peut calculer la variation en y comme ceci :

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$



Définition 2.2.

Le taux de variation moyen de$y = f(x)$ pour x allant de $x = a$ jusqu'à $b = a + \Delta x$

est défini par

$$\mathrm{TVM}_{[a,a+\Delta x]} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}.$$

Définition 2.3. Le **taux de variation moyen** (TVM) d'une fonction f sur un intervalle $[a,b]$ est défini par

$$\mathrm{TVM}_{[a,b]}(f) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Le TVM est le changement moyen de la valeur de la fonction f quand son argument passe de a à b (ou de a à $a+\Delta x$).

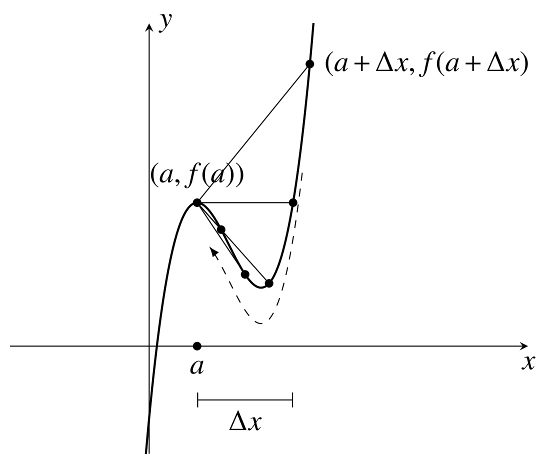
Dans le cas où la fonction donne une distance parcourue en fonction du temps (que nous dénoterons par $x(t)$, alors le TVM est la **vitesse moyenne** sur le parcours entre $t=a$ et $t=b$.

$$\text{Vitesse moyenne entre } t=a \text{ et } t=b \text{ est } \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

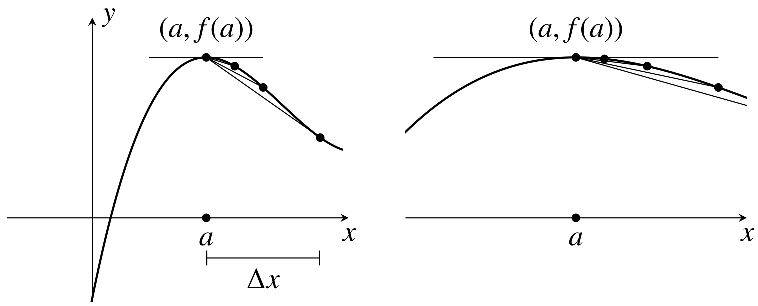
2.2 Taux de variation instantané

Le **taux de variation instantané** (TVI) de la fonction f en $x=a$ est le taux de variation obtenu à partir du taux de variation moyen quand Δx devient très petit (ont dit que Δx est « **infinitésimal**. »). Le taux de variation instantané représente le taux de changement de la fonction f à un point donné.

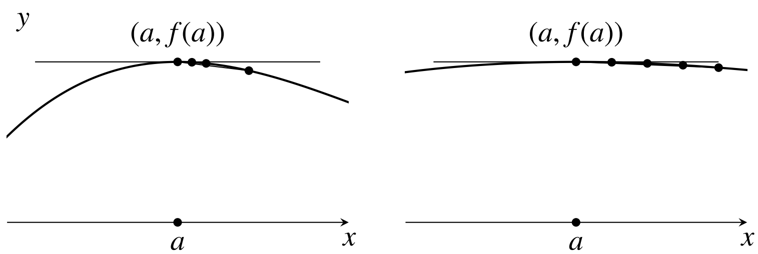
$$\mathrm{TVI}_a(f) = \frac{dy}{dx} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \text{où } \Delta x \text{ très petit}$$



En se rapprochant du point $(a, f(a))$, on voit que quand Δx devient de plus en plus petit, les sécantes se rapprochent de plus en plus de la tengente au graphe au point $(a, f(a))$.



Ultimement (c'est à dire quand Δx devient « infiniment petit »), les segments sécants et la courbe elle même se confondent.

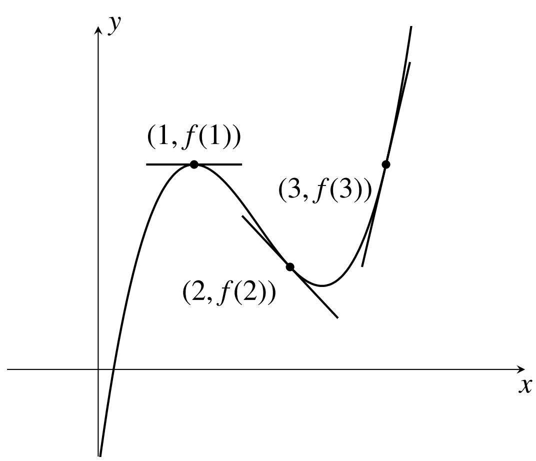


Définition 2.4. Le taux de variation instantané de la fonction $y = f(x)$ en $x = a$ est la pente de la tangente au point $(a, f(a))$ au graphe de $f(x)$ (si cette tangente existe).

Si $y = f(x)$, on note le taux de variation instantané en $x = a$ par

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \text{ ou } \mathrm{TVI}_a(f)$$

Il varie donc d'un point à l'autre du graphe d'une fonction, comme on peut le voir dans le graphe suivant.



On peut aussi remarquer dans ce dernier exemple que la pente de la tangente est liée à la croissance de la fonction : elle est positive là où la fonction est croissante, négative là où la fonction est décroissante. Elle est nulle (tangente horizontale) quand il y a un maximum (ou un minimum).

Un exemple qui permet de se faire une intuition de la signification de ce concepts est la vitesse : la vitesse moyenne dans un parcours est le rapport de la distance parcourue Δx sur le temps de parcours Δt. La vitesse instantanée est la vitesse à un instant donnée (celle des indicateurs de vitesse dans les voitures !).

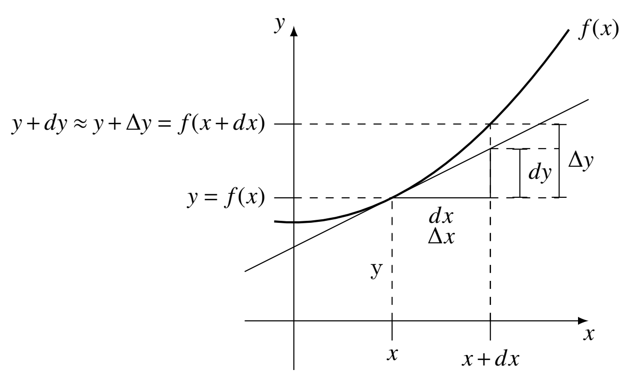
$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \qquad \text{Vitesse instantanée} = \frac{dx}{dt}$$

2.3 Différentielles

On vient de définir le taux de variation instantané en $x = a$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

comme étant la pente de la tangente au point $(a, f(a))$. Voyons comment on peut calculer ce taux pour une fonction $y = f(x)$.



Quand Δx est très petit, on peut approximer l'accroissement Δy sur le graphe de la fonction par l'accroissement dy sur la droite tangente. Comme la pente de la tangente est $\frac{dy}{dx}$, si Δx est petit on a que

$$\Delta y \approx dy,$$

c'est à dire que

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx \frac{dy}{dx} dx.$$

Définition 2.5. Si y est une fonction de x, $y = f(x)$, alors la différentielle en y est

$$dy \stackrel{\text{def}}{=} f(x + dx) - f(x)$$

quand dx est très petit.

Définition 2.6. Le taux de variation instantanné de la fonction $y = f(x)$ en $x = a$ est

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(a+dx)-f(a)}{dx}$$

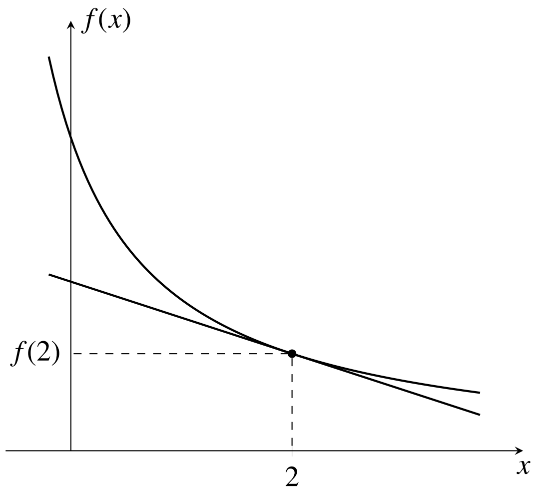
Pour calculer la pente de la tangente à partir de la définition de TVI, nous devons

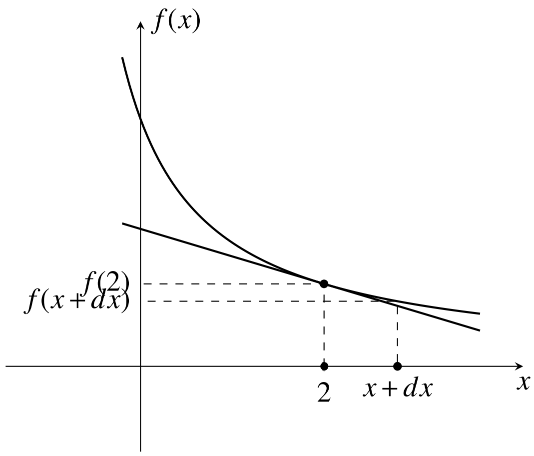
1. Écrire la définition de $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ et évaluer correctement $f(a+dx)$. Faire une esquisse peut aider à se souvenir de la définition !
2. Manipuler algébriquement l'expression obtenue jusqu'à ce qu'on réussisse à simplifier le dénominateur dx.
3. Négliger toutes les occurrences de dx restante dans l'expression obtenue avec la dernière simplification.

Exemple 2.1. Calculons la pente de la tangente à la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

en $x = 2$ et donnons l'équation de la droite tangente en $x = 2$.





$$\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(2+dx)-f(2)}{dx} \\
&= \frac{\frac{1}{(2+dx)+1}-\frac{1}{2+1}}{dx} \\
&= \frac{\frac{1}{3+dx}-\frac{1}{3}}{dx} \\
&= \frac{\frac{3}{3(3+dx)}-\frac{3+dx}{3(3+dx)}}{dx} \\
&= \frac{\frac{3-(3+dx)}{3(3+dx)}}{dx} \\
&= \frac{\frac{-dx}{3(3+dx)}}{dx} \\
&= \frac{-dx}{3(3+dx)dx} \\
&= \frac{-1}{3(3+dx)} \\
&\approx -\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

La droite tangente en $x=2$ est donc de pense $-\frac{1}{9}$. Son équation est de la forme

$$y=-\frac{x}{9}+b.$$

Pour déterminer b on prend un point sur la droite. On sait que la droite est tangente au point $(2, f(2)$, c'est à dire au point $(2, \frac{1}{3})$. On doit donc avoir

$$\frac{1}{3}=-\frac{2}{9}+b.$$

En isolant, on trouve que

$$b = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}.$$

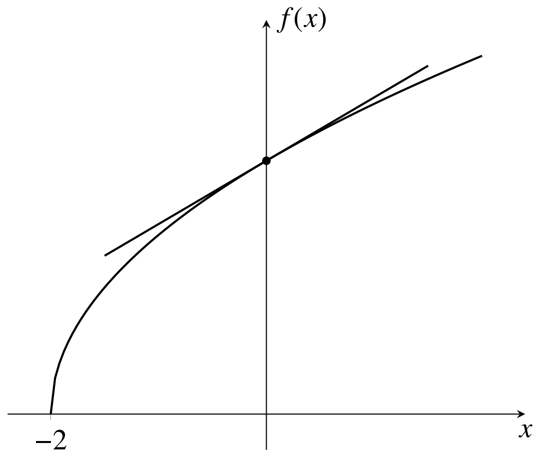
L'équation de la tangente est donc

$$y = -\frac{x}{9} + \frac{5}{9}.$$

Exemple 2.2. Calculons la pente de la tangente à la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

en $x = 0$ et donnons l'équation de la droite tangente en $x = 0$.



$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(0+dx)-f(0)}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{0+dx+2}-\sqrt{0+2}}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{dx+2}-\sqrt{2}}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{dx+2}-\sqrt{2}}{dx}\frac{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{(dx+2)-2}{dx}\frac{1}{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{dx}{dx}\frac{1}{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}} \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

La droite tangente en $x=0$ est donc de pente $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Son équation est de la forme

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}} + b.$$

Pour déterminer b on prend un point sur la droite. On sait que la droite est tangente au point $(0, f(0)$, c'est à dire au point $(0, \sqrt{2})$. On doit donc avoir

$$\sqrt{2} = 0 + b.$$

En isolant, on trouve que

$$b = \sqrt{2}.$$

L'équation de la tangente est donc

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2}.$$

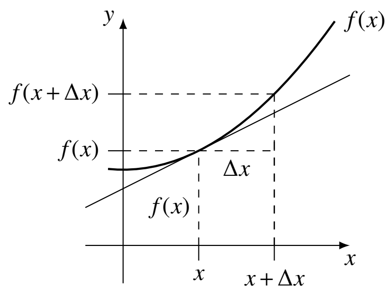
Pour déterminer la pente de la tangente à l'aide de la définition en terme de différentielles,

2.4 Dérivée

Comme la pente de la tangente au graphe d'une fonction f donne beaucoup d'information sur le comportement de la fonction et qu'elle varie d'un point à l'autre, il est utile de la considérer comme une nouvelle fonction *dérivée* de la fonction initiale. Cette fonction dérivée associe à chaque valeur de x dans le domaine de f la pente de la tangente au graphe de f au point $\big(x, f(x)\big)$.

Définition 2.7. La **fonction dérivée** f' d'une fonction $y = f(x)$ est définie par

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \mathrm{TVI}_x(f).$$



On détermine la fonction dérivée de la même manière que la dérivée en un point, mais en laissant la coordonnée en x indéterminée.

Exemple 2.3. Si $f(x) = x^3$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\
&= \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx} \\
&= \frac{(x^3 + 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3) - x^3}{dx} \\
&= \frac{3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3}{dx} \\
&= \frac{dx(3x^2 + 3xdx + dx^2}{dx} \\
&= 3x^2 + 3xdx + dx^2 \\
&\approx 3x^2
\end{aligned}$$

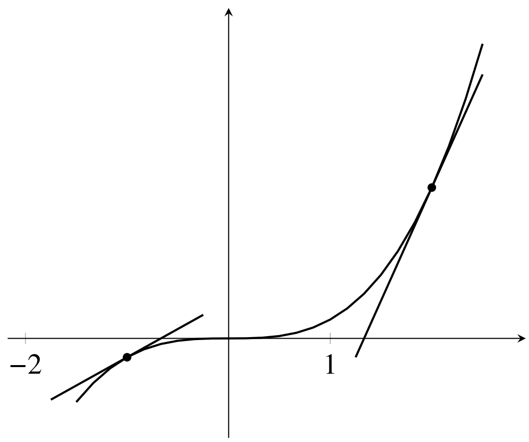
On a donc que la dérivée est $f'(x) = 3x^2$.

À l'aide de la fonction dérivée, on peut par exemple déterminer la pente de la tangente à f en un point quelconque $(x, f(x))$ du graphe de f en évaluant $f'(x)$. Par exemple, si $x = 2$, la pente de la tangente est

$$f'(2) = 3(2)^2 = 24.$$

Si $x = -1$, la pente de la tangente est

$$f'(-1) = 3(-1)^2 = 3.$$



On peut aussi chercher les valeurs de x où la pente a une valeur spécifique. Par exemple, sachant que $y' = 3x^2$ quand $y = x^3$, on peut trouver où la tangente est horizontale en posant que la dérivée (qui est la pente de la tangent) est nulle. Dans le dernier exemple, cela est le cas quand

$$y' = 0 \iff 3x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Exemple 2.4. Si $f(x) = \sqrt{x+1}$, la dérivée y' est

$$\begin{aligned}
f'(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{(x+dx)x+1} - \sqrt{x+1}}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{x+dx+1} - \sqrt{x+1}}{dx} \frac{\sqrt{x+dx+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+dx+1} - \sqrt{x+1}} \\
&= \frac{(x+dx+1)-(x+1)}{dx} \frac{1}{\sqrt{x+dx+1} + \sqrt{x+1}} \\
&= \frac{dx}{dx} \frac{1}{\sqrt{x+dx+1} + \sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+dx+1} + \sqrt{x+1}} \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}
\end{aligned}$$

La dérivée de $\sqrt{x+1}$ est donc $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

La fonction dérivée f' est la fonction qui associe à chaque valeur de x le taux de variation instantané de f en x, soit la pente de la tangente en $\big(x, f(x)\big)$:

$$f'(x) = \mathrm{TVI}_x(f) = \frac{dy}{dx}$$

Les notation $f'(x)$ et $\mathrm{TVI}_x(f)$ sont donc interchangeables. Cependant, la notation $f'(x)$ met l'accent sur le fait que la nouvelle fonction f' est déterminée à partir de la fonction originale f. Cette fonction est le plus souvent appelée simplement *la dérivée de* f.

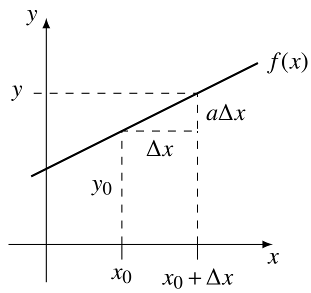
L'opération « ' » (dérivée) est en fait elle même une sorte de fonction, mais qui prend une fonction comme argument et qui donne une nouvelle fonction :

$$\text{dérivée}: \text{fonctions réelles} \to \text{fonctions réelles}.$$

La dérivée est une « fonction de fonction ».

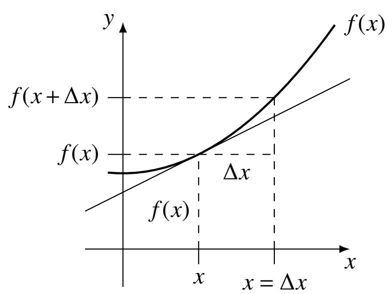
2.5 Droite tangente et approximation d'une fonction

Si une droite est de pente a, une augmentation de Δx de la valeur de x augmentera la valeur de y de $a\Delta x$.



On a donc que $y = y_0 + a\Delta x$.

On peut se servir de cette relation pour obtenir une approximation linéaire à l'aide de l'équation de la droite tangente.



Dans ce dernier graphique, la pente de la tangente au point $\big(x, f(x)\big)$ est, par définition, la valeur $f'(x)$ de la dérivée évaluée en x. En remplacent les paramètres de la relation $y = y_0 + a\Delta x$ par ceux de la droite tangente du dernier graphique, l'équation de la droite tangente en $(x, f(x))$ (où y est fonction de Δx) est

$$y = f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Si on considère que y sur la droite tangente est une bonne approximation de y sur le graphe de la fonction f, on peut faire l'approximation suivante de $f(x+\Delta x)$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Exemple 2.5. On a vu précédement que la dérivée de $f(x) = x^3$ est $f'(x) = 3x^2$.

Cela nous donne les approximations suivantes par des droites, respectivement valables pour des valeurs de x près de 2 et -1.

$$f(x) \approx f(2) + f'(2)(x-2) = 8 + 12(x-2) = 12x - 16$$

$$f(x) \approx f(-1) + f'(-1)(x-(-1)) = -1 + 3(x+1) = 3x + 2$$

2.6 Notations

La dérivée est un concept très important en mathématiques. Les concepts importants ont souvent été étudiés par plusieurs mathématiciens et parfois plusieurs notations sont inventées et utilisées.

Si $y = f(x) = x^2$, toutes ces notations désignent la même chose :

$$f'(x) = \mathrm{TVI}_x(f) = \frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = (x^2)'.$$

Notation différentielle avec $y = f(x) = x^2$:

$$dy = y'dx = f'(x)\,dx = 2x\,dx.$$

La dérivée a été étudiée de manière détaillée pour la première fois par Newton et Leibniz, de manière indépendantes et simultanée. Nous utilisons encore aujourd'hui les notations différentes inventées et utilisées par Newton ($\dot{y}$) et Leibniz ($\frac{dy}{dx}$), mais aussi celles introduites plus tard par d'autres mathématiciens ayant développé la théorie des dérivées, notamment celle d'Euler ($f'(x)$).

Voici les différentes notations pour la dérivée de $y = f(x) = x^2$.

Notations pour la dérivée					
$f'(x)$	y'	$\left(x^2\right)'$	$\dfrac{dy}{dx}$	$\dfrac{df(x)}{dx}$	$\dfrac{dx^2}{dx}$
$f'(a)$	$y'\vert_{x=a}$	$\left(x^2\right)'\Big\vert_{x=a}$	$\dfrac{dy}{dx}\Big\vert_{x=a}$	$\dfrac{df(x)}{dx}\Big\vert_{x=a}$	$\dfrac{dx^2}{dx}\Big\vert_{x=a}$

La notation « $\dfrac{dy}{dx}$ » est celle introduite par Leibniz. Les notations de Newton ne sont plus aussi utilisées que celles de Leibniz. Newton écrivait $\dot{x}$ là où Leibniz écrivait $\frac{dx}{dy}$.

On peut penser à la notation $\dfrac{dy}{dx}$ comme une forme de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ avec Δx « infiniment petit ».

La notation « barre » veut dire « évalué en $x = \ldots$ ». Elle peut s'utiliser dans différents contextes autre que celui du calcul de dérivées. Par exemple, on peut écrire

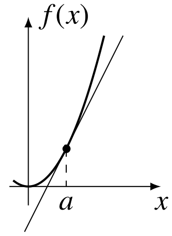
$$x^2\Big|_{x=3} = 9.$$

Cette notation est utilisée dans plusieurs contextes en calcul différentiel et intégral. Dans ce cours, elle servira le plus souvent à évaluer la dérivée en un point, comme dans la seconde ligne du tableau précédant.

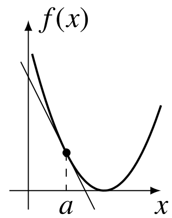
2.7 Graphique des fonctions dérivées

On peut faire le lien entre le graphe d'une fonction f et celui de sa dérivée f' à l'aide des observations suivantes, que nous motivons géométriquement pour le moment :

- Si $f'(a) > 0$, alors f est croissante en $x = a$.

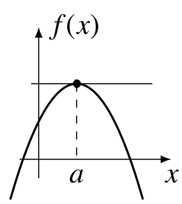


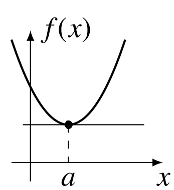
- Si $f'(a) < 0$, alors f est décroissante en $x = a$.

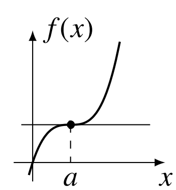


- Si $f'(a) = 0$, alors le graphe de $f(x)$ a un point où la tangente est horizontale (de pente zéro) : un minimum, un maximum ou un point « stationnaire ».

Maximum Minimum Stationnaire





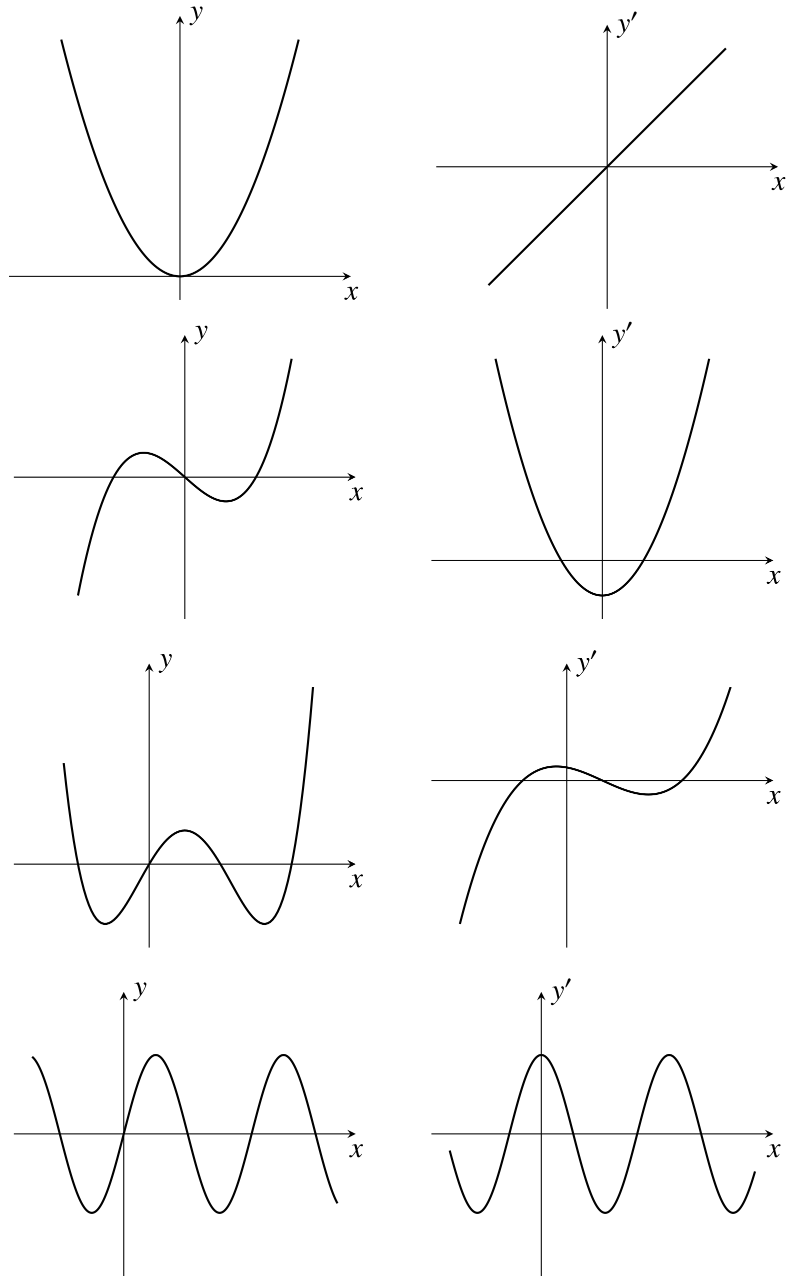


Comme à un sommet (minimum ou maximum) du graphe d'une fonction, la dérivée s'annule car la tangente est horizontale (donc de pente 0), on peut trouver les sommet d'une fonction en cherchant les valeurs a où

$$f'(a) = 0.$$

2.8 Exemples de fonctions avec leurs dérivées

Les fonctions sont à gauches, leurs dérivées à droite.



Chapitre 3

Propriétés de la dérivée

Le calcul de la fonction dérivée à l'aide de la définition donnée au chapitre précédent est laborieuse, même pour des fonctions définie par des expressions algébriques simples. Heureusement, il est possible « d'algébriser » le calcul de la dérivée. On démontrera dans ce chapitre un certain nombre de propriétés de la dérivée qui, prise ensemble, permettent de déterminer la dérivée d'une fonction en appliquant des « formules de dérivation « (ou « règles de dérivation ».

Ces propriétés ont été découvertes au fil du temps par plusieurs mathématiciens qui travaillaient sur différents problèmes allant du calcul d'aires délimitées par des courbes algébriques à la détermination de minimums et maximums liés à des problèmes de géométrie. C'est à Newton et Leibniz que l'on doit d'avoir su les présenter de manière systématique pour la première fois et d'avoir établit le lien entre le calcul d'aire et la dérivée.

Dans ce qui suit, nous chercherons à établir un certain nombre de propriétés algébriques de la dérivée qui peuvent servir à la détermination des fonctions dérivées sans utiliser la défition donnée au dernier chapitre, mais plutôt en la calculant directement à partir de l'expression algébrique définissant la fonction à dériver.

3.0.1 Preuves graphique

Pour simplifier, nous utiliserons parfois des preuves graphiques comme démonstration de certaines propriétés de la dérivée. Pour donner un avant-goût de ce genre d'argument, voici une preuve algébrique et une preuve graphique du fait que la dérivée de la fonction $y = x^2$ est $y' = 2x$.

Proposition 3.1.

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x$$

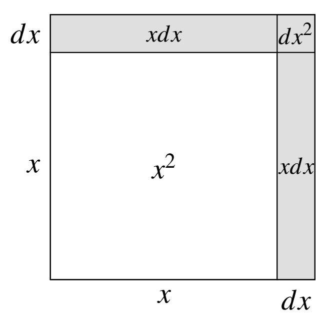
preuve algébrique.

$$
\begin{aligned}
\frac{d\left(x^2\right)}{dx} &= \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx}\\
&= \frac{(x^2+2xdx+dx^2)-x^2}{dx}\\
&= \frac{2xdx+dx^2}{dx}\\
&= \frac{dx(2x+dx)}{dx}\\
&= 2x+dx\\
&\approx 2x \qquad \text{car } dx^2 \text{ très petit quand } dx \text{ est petit}
\end{aligned}
$$

$\square$

On peut généralement obtenir géométriquement l'expression de dy à partir de relations géométriques. Cette manière de faire est fréquente en physique. Elle permet aussi de mieux comprendre pourquoi certaines quantités peuvent être négligées.

version géométrique. La différentielle dy est l'aire de la région en gris dans le graphique suivant : c'est l'écart entre un carré de côté x et un carré de côté $x+dx$. Quand dx est très petit, l'aide du petit carré dx^2 est négligée.



$\square$

Proposition 3.2. La dérivée de la fonction racine carrée est

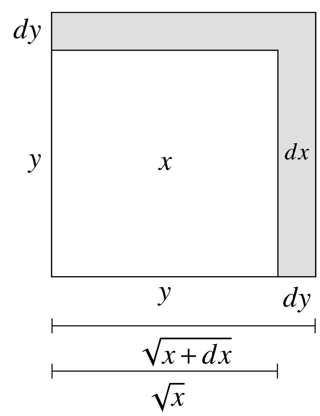
$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{dx} &= \frac{\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}}{dx}\frac{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{(x+dx)-x}{dx(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}} \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

car $\sqrt{x+dx} \approx \sqrt{x}$ si dx très petit.

Preuve graphique : si x est l'aire d'un carré, alors le côté est $y = \sqrt{x}$. Si l'aire du carré change de x à $x+dx$, alors la variation approximative dy du côté du carré est approximativement $dy = \sqrt{x+dx} - \sqrt{x}$.



D'après la figure, l'aire dx (en gris) peut s'écrire comme

$$dx = ydy + ydy + dy^2.$$

Si on néglige dy^2, on trouve

$$dx = 2ydy,$$

donc, en isolant,

$$dy = \frac{1}{2y}dx.$$

Enfin, comme $y = \sqrt{x}$, on doit avoir que

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx. \qquad \square$$

Proposition 3.3. Si $y = \frac{1}{x}$, alors

$$dy = -\frac{1}{x^2}dx.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x} \\
&= \frac{x-(x+dx)}{x(x+dx)} \\
&= \frac{-1}{x^2+xdx}dx \\
&\approx \frac{-1}{x^2}dx \qquad \text{car } x^2 + x\,dx \approx x^2.
\end{aligned}$$

□

3.1 Linéarité et dérivée de puissances

Pour alléger, à partir de ce point nous utiliserons souvent la notation « $(y)'$ pour désigner la dérivée de y. Par exemple, on écrit directement

$$\left(x^2\right)' = 2x$$

plutôt que

$$y = x^2 \qquad \frac{dy}{dx} = 2x.$$

Comme une fonction constante a comme graphe une droite de pente 0, la tangente à cette droite en n'importe quel point est aussi une droite de pente nulle.

Proposition 3.4 (Dérivée d'une constante)**.** Si $y = C$, où C est une constante réelle quelconque, alors

$$\frac{d}{dx}\left(C\right) = 0$$

Exemple 3.1.

$$(2)' = 0 \qquad (-3)' = 0 \qquad (0)' = 0 \qquad (\pi)' = 0$$

Démonstration. Comme $y = C$ peut importe la valeur de x, on a que

$$\frac{d}{dx}\left(C\right) = \frac{C-C}{dx} = 0$$

□

Proposition 3.5. Si $y = x$, alors

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

Démonstration.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(0+dx)-0}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1 \qquad \square$$

Proposition 3.6 (linéarité 1 – dérivée d'un multiple d'une fonction)**.** Si $y = Cu$, où $u = f(x)$ est une fonction de x, alors

$$\frac{d}{dx}\left(Cu\right) = C\frac{du}{dx}$$

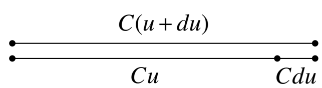
Exemple 3.2.

$$\left(3x^5\right)' = 3\left(x^5\right)' \qquad \left(\frac{x^3}{5}\right)' = \frac{1}{5}\left(x^3\right)' \qquad \left(10\sin(x)\right)' = 10\left(\sin(x)\right)'.$$

Démonstration. Preuve algébrique directe :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(Cu\right) &= \frac{C(u+du)-Cu}{dx}\\ &= \frac{Cu+Cdu-Cu}{dx}\\ &= \frac{Cdu}{dx}\\ &= C\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

Preuve graphique :



$\square$

Proposition 3.7 (Linéarité 2 : additivité)**.** Si u et v sont toutes deux des fonctions d'une même variable, alors

$$\frac{d\left(u+v\right)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

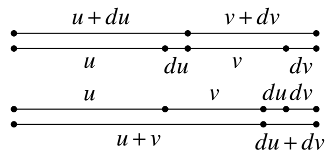
Démonstration.

$$\begin{aligned}\frac{d\left(u+v\right)}{dx} &= \frac{\left((u+du)+(v+dv)\right)-(u+v)}{dx}\\ &= \frac{du+dv}{dx}\\ &= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

Ainsi, on a que

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Preuve graphique :



$\square$

Note : les deux dernières propriétés considérées ensemble forment une propriété appelée *linéarité* de la dérivée. Les limites et plusieurs autres constructions mathématiques étudiées au collégial on cette propriété de « linéarité », qui est le sujet d'étude central du cours d'algèbre *linéaire*.

Exemple 3.3.

$$\left(-x^2+3x\right)' = \left(-x^2\right)' + \left(3x\right)' \qquad \left(x^2-3x\right)' = \left(x^2+(-3x)\right)' = \left(x^2\right)' + \left(-3x\right)'$$

Proposition 3.8 (Puissances)**.** Si $n \in \ltimes$, alors

$$\frac{d\left(x^n\right)}{dx} = nx^{n-1}.$$

Exemple 3.4.

$$\left(x^3\right)' = 3x^2 \qquad \left(x^{10}\right)' = 10x^9 \qquad \left(x^{743}\right)' = 743x^{742} \qquad (x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1.$$

Démonstration. Pour cette preuve, nous utiliserons le triangle de Pascal pour développer $(x+dx)^n$. Ce développement débute ainsi :

$$(x+dx)^n = x^n + nx^{n-1}\,dx + (\text{ termes où } dx \text{ apparait avec au un exposant} \geq 2).$$

Exemple 3.5. À l'aide des propriétés précédentes, on peut déterminer la dérivée d'une fonction polynômiale quelconque. Par exemple

$$\begin{aligned}
\left(3x^2-2x+4\right)' &= (3x^2)' - (2x)' + (4)' \\
&= 3(x^2)' - 3(x)' + (4)' \\
&= 3(x^2)' - 3(x)' + (4)' \\
&= 3(2x^1) - 3(1) + (0) \\
&= 6x - 3
\end{aligned}$$

□

Par la suite, nous ne donnerons pas autant de détails pour la dérivée des polynômes. La plupart du temps, nous donnerons directement le résultat.

3.2 Dérivée d'un produit et d'un quotient

Proposition 3.9 (Dérivée d'un produit, formule de Leibniz)**.** Si u et v sont toutes deux des fonctions de x, alors sous forme différentielle

$$d\left(uv\right) = vdu + udv.$$

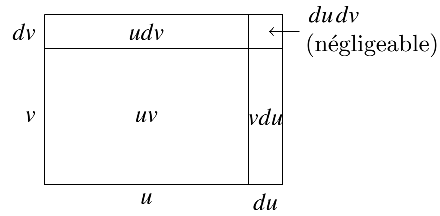
Le taux de variation instantané est donc

$$\frac{d\left(uv\right)}{dx} = \frac{vdu + udv}{dx}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(uv\right)}{dx} &= \frac{\left((u+du)(v+dv)\right) - (uv)}{dx} \\
&= \frac{\left(uv + vdu + udv + dudv\right) - uv}{dx} \\
&= \frac{vdu + udv + dudv}{dx} \\
&\approx \frac{vdu + udv}{dx} && \text{car } dudv \text{ est très petit quand } du \text{ et } dv \text{ sont petits} \\
&= v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}
\end{aligned}$$

Preuve graphique :



□

Proposition 3.10. Si f est une fonction dérivable en x, alors

(a) $\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(b) $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = \dfrac{-g'(x)}{(g(x))^2}$

(c) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Exemple 3.6. En utilisant la formule de Liebniz, on trouve que

$$\begin{aligned}
\big((x^4+1)(x^6+1)\big)' &= (x^4+1)'(x^6+1) + (x^4+1)(x^6+1)' \\
&= (4x^3)(x^6+1) + (x^4+1)(6x^5) \\
&= (4x^9 + 4x^3) + (6x^9 + 6x^5) \\
&= 10x^9 + 6x^5 + 4x^3
\end{aligned}$$

Proposition 3.11 (Dérivée d'un quotient)**.** Si u et v sont toutes deux des fonctions de x, alors, partout où $\frac{1}{v}$ est définie :

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Sous forme de taux de variation instantané

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Démonstration. Première preuve à l'aide de la formule de Liebniz :

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{u}{v}\right) &= d\left(u\frac{1}{v}\right) \\
&= \frac{1}{v}du + u\,d\left(\frac{1}{v}\right) \qquad \text{(Formule de Liebniz)} \\
&= \frac{du}{v} + u\,\frac{-1}{v^2}\,dv \\
&= \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2} \\
&= \frac{vdu}{v^2} - \frac{udv}{v^2} \\
&= \frac{vdu - udv}{v^2}
\end{aligned}$$

Deuxième preuve directement avec la définition $dy = f(x+dx) - f(x)$. La fonction à dériver est $f(x) = \frac{u}{v}$. Si x varie de dx, alors u et v varient respectivement de du et dv pour devenir $u + du$ et $v + dv$.

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{u+du}{v+dv} - \frac{u}{v} \\
&= \frac{v(u+du) - u(v+dv)}{v(v+dv)} \\
&= \frac{(vu + v\,du) - (uv + u\,dv)}{v^2 + vdv} \\
&= \frac{vu + v\,du - uv - u\,dv}{v^2 + vdv} \\
&= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2 + vdv} \\
&\approx \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}
\end{aligned}$$

□

Exemple 3.7. En utilisant la propriété 3.11 permettant de calculer la dérivée d'un quotient, on trouve que

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^4+1}{x^6++1}\right)' &= \frac{(x^4+1)'(x^6+1)-(x^4+1)(x^6+1)'}{(x^6+1)^2}\\ &= \frac{4x^3(x^6+1)-(x^4+1)(6x^5)}{(x^6+1)^2}\\ &= \frac{(4x^9+4x^3)-(6x^9+6x^5)}{(x^6+1)^2}\\ &= \frac{-2x^9+6x^5+4x^3}{(x^6+1)^2}\end{aligned}$$

Proposition 3.12 (Inverse d'une puissance)**.**

$$\frac{d(x^{-n})}{dx} = -nx^{-n-1}$$

Démonstration. On détermine $\left(x^{-n}\right)'$ de deux manière différentes en utilisent l'identité algébrique et à l'aide de la formule pour la dérivée d'un produit.

$$x^n x^{-n} = 1.$$

En calculant la dérivée de chaque membre de cette égalité, on trouve que

$$\left(x^n x^{-n}\right)' = (1)' = 0$$

parce que $(C)' = 0$ pour n'importe quelle constante.

On peut aussi utiliser la formule donnant la dérivée d'un produit :

$$\begin{aligned}\left(x^n x^{-n}\right)' &= x^{-n}\left(x^n\right)' + x^n\left(x^{-n}\right)'\\ &= x^{-n}\left(nx^{n-1}\right)dx + x^n\left(x^{-n}\right)'.\end{aligned}$$

Comme on calcule la différentielle d'une même expression de deux manières différentes, les deux résultats doivent être égaux. On doit donc avoir que

$$x^{-n}nx^{n-1}dx + x^n\left(x^{-n}\right)' = 0$$

On isole $d\left(x^{-n}\right)'$ dans cette dernière égalité :

$$\left(x^{-n}\right)' = -n\frac{x^{-n}x^{n-1}}{x^n}dx$$

On trouve enfin, en simplifiant l'expression obtenue :

$$\left(x^{-n}\right)' = -nx^{-n-1}dx,$$

ce qui est le résultat désiré. □

Démonstration. Preuve à l'aide de la formule de dérivation d'un quotient.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) &= \frac{(1)'x^n - (1)(x^n)'}{(x^n)^2} \\
&= \frac{(0)x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} \\
&= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} \\
&= -nx^{(n-1)-2n} \\
&= -nx^{-n-1}
\end{aligned}$$

□

Exemple 3.8. ++

On peut remarquer que les formules trouvées dans les trois dernières propositions sont toutes des cas particulier d'un schéma plus général :

$$d\left(x^r\right) = rx^{r-1}$$

pour r un exposant rationnel quelconque. On fera l'hypothèse suivante : cette formule est aussi valable pour n'importe quel exposant réel r.

Hypothèse 1. *La formule*

$$d\left(x^r\right) = rx^{r-1}$$

est valable pour tout nombre réel r*.*

3.2.1 Règle de chaine

Proposition 3.13. Si z est fonction de y fonction de x, alors le taux de variation total est le produit des taux de variations :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Démonstration.

$$\frac{dz}{\cancel{dy}}\frac{\cancel{dy}}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

□

Exemple 3.9. Soient $z = y^3$ et $y = \sqrt{x}$ deux fonctions. On aimerait connaitre le taux de variation de z par rapport à x. On utilise la règle de chaine. Noter que l'on veut le taux de variation en fonction de x. Il faut donc exprimer $\frac{dz}{dy}$ en fonction de

x en substituant $\sqrt{x}$ pour y.

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \\
&= (3y^2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= \left(3\left(\sqrt{x}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= (3x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= \frac{3x}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{3\sqrt{x}}{2}
\end{aligned}$$

3.3 Dérivation implicite

Il est possible de définir une fonction par une équation. Par exemple :

$$y = \frac{1}{x} \qquad y = x^2$$

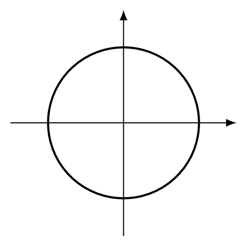
On pourrait aussi définir ces fonctions par les équations suivantes

$$xy = 1 \qquad x^2 - y = 0.$$

Dans une telle définition implicite, il faut cependant spécifier quelle variable est fonction de l'autre. Par habitude, nous prenons souvent y comme fonction de x.

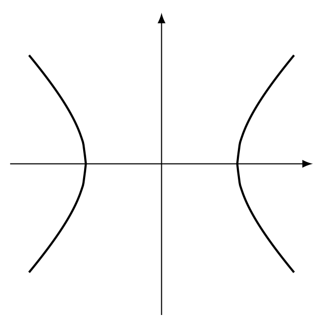
Nous savons cependant qu'une équation ne peut pas toujours être vue comme une définition implicite d'une fonction. Par exemple l'équation du cercle de rayon 1

$x^2 + y^2 = 1$



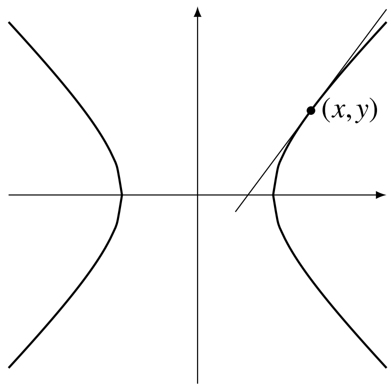
ou encore celle d'une hyperbole

$x^2 - y^2 = 1$



Même si ces équations établissent des relations entre les variables x et y sans que ces relations soient des fonctions, il est possible de déterminer la pente des tangentes à ces courbes à l'aide de la dérivée en supposant qu'il est possible *localement* de supposer que ces courbes sont le graphe d'une fonction définie implicitement.

Exemple 3.10. Prenons l'hyperbole définie par l'équation $x^2 - y^2 = 1$. On veut connaitre la pente de la tangente au point (x, y).



On suppose que « localement » y est une fonction de x, que l'on pourrait écrire comme $y = f(x)$.

Comme le point (x, y) est sur la courbe, on doit avoir que

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Si on considère chaque membre de cette égalité comme une fonction, on peut les dériver et ont obtient le même résultat :

$$\left(x^2 - y^2\right)' = \left(1\right)'.$$

$$2x - 2yy' = 0.$$

Notez le « y' » : c'est la « dérivée de l'intérieur » dans l'application de la règle de chaine. En effet, on pourrait écrire y^2 comme $(f(x))^2$ puisque $y = f(x)$. En dérivant sous cette forme avec la règle de chaine on obtient

$$\left((f(x))^2\right)' = 2f(x)f'(x).$$

Comme $2f(x)f'(x) = 2yy'$, on voit que la dérivée de y^2 *par rapport à* x est bien $2yy'$.

Enfin, on isole y' dans l'égalité $2x - 2yy' = 0$ pour obtenir une expression donnant la pente de la tangente en fonction des coordonnées x et y du point (x, y) :

$$y' = \frac{-2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

On peut utiliser ce résultat pour déterminer la pente de la tangente au point $(2, \sqrt{3})$. On vérifie que ce point est bien sur l'hyperbole :

$$2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1.$$

(Si le point n'était pas sur l'hyperbole, l'hypothèse de départ de ce calcul serait fausse et la conclusion $y' = \frac{x}{y}$ le serait aussi !)

La pente de la tangente au point donné est donc

$$y' = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

3.3.1 Taux liés

La règle de chaine permet l'étude de taux de variation de variables liées entre elle par une relations, comme dans la section précédente.

Exemple 3.11. Imaginons un cercle dont le rayon r varie dans le temps. Si le rayon varie, l'aide du cercle doit varier elle aussi car les deux quantités sont reliés par l'équation

$$A = \pi r^2.$$

On a donc une situation où l'aire A est fonction du rayon r, lui-même fonction du temps. Pour connaitre le taux de variation de l'aire en fonction du temps, on utilise la règle de chaine :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$$

Si le taux de variation du rayon $\frac{dr}{dt}$ est de $55\,{}^{\mathrm{cm}}/_{\mathrm{s}}$ et que le rayon du cercle est de $10\,\mathrm{cm}$, le taux de variation de l'aire est

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r|_{r=10\,\mathrm{cm}}(5\,{}^{\mathrm{cm}}/_{\mathrm{s}}) = 2\pi(10\,\mathrm{cm})(5\,{}^{\mathrm{cm}}/_{\mathrm{s}}) = 100\pi\,{}^{\mathrm{cm}^2}/_{\mathrm{s}} \approx 314.16\,{}^{\mathrm{cm}^2}/_{\mathrm{s}}.$$

Notons que pour le taux de variation du rayon $\frac{dr}{dt}$ est de $55\,{}^{\mathrm{cm}}/_{\mathrm{s}}$ et que le rayon du cercle est différent, par exemple de $100\,\mathrm{cm}$, le taux de variation de l'aire est

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r|_{r=100\,\mathrm{cm}}(5\,{}^{\mathrm{cm}}/_{\mathrm{s}}) = 2\pi(100\,\mathrm{cm})(5\,{}^{\mathrm{cm}}/_{\mathrm{s}}) = 1000\pi\,{}^{\mathrm{cm}^2}/_{\mathrm{s}} \approx 3141.59\,{}^{\mathrm{cm}^2}/_{\mathrm{s}}$$

On voit que le taux de variation de l'aire dépend du rayon du cercle. On explique cela géométriquement par le fait que pour un petit certle, un accroissement de son rayon de $5\,\mathrm{cm}$ aura un grand effet sur l'aire, alors que pour un grand cercle, un même accroissement du rayon aura peu d'effet sur l'aire.

3.4 Dérivée d'ordre supérieur

Le « taux de changements du taux de changement » est une autre quantitée importante pouvant nous donner de l'information sur le comportement d'une fonction. En dynamique, elle correspond à l'**accélération**, qui est le taux de changement de la vitesse, elle même le taux de changement de la position.

Comme le taux de changement d'une fonction un point de son graphe est donnée par la dérivée de la fonction, le taux de changement du taux de changement est donnée par la *dérivée de la dérivée*. On peut voir la dérivée d'une fonction comme une nouvelle fonction, que l'on peut dériver elle aussi.

Par exemple, si on prend $f(x) = x^3$, le taux de changement est donnée par $f'(x) = 3x2$. Le taux de changement de f' est donc donné par la **dérivée seconde** $f''(x) = 6x$.

Définition 3.1. On appelle **dérivée seconde** d'une fonction la dérivée de sa dérivée, que l'on dénote par

$$f''(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f'(x))'$$

On défini de manière similaire la **dérivée troisième** $f'''(x)$, la **dérivée quatrième** $f''''(x)$, etc.

On appelle ces dérivées les **dérivées d'ordre supérieur**.

Exemple 3.12. Calculer la dérivée troisième de $f(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} \\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
f''(x) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)x^{-3/2} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \\
f'''(x) &= \left(-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right)' = -\frac{1}{4}\left(x^{-3/2}\right)' = -\frac{1}{4}\left(\frac{-3}{2}\right)x^{-5/2} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}
\end{aligned}$$

Comme on peut répéter la dérivation autant de fois que l'on veut, l'accumulation de « ' » peut alourdir la notation. Il est plus pratique d'avoir une notation qui indique plus simplement le nombre de fois qu'une fonction est dérivée.

Définition 3.2.

$$
\begin{aligned}
\text{Dérivée première :}\quad & f^{(1)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f'(x) \\
\text{Dérivée seconde :}\quad & f^{(2)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f''(x) = (f'(x))' \\
\text{Dérivée troisième :}\quad & f^{(3)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f'''(x) = \left(f^{(2)}(x)\right)' \\
\text{Dérivée quatrième :}\quad & f^{(4)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f''''(x) = \left(f^{(3)}(x)\right)' \\
\text{Dérivée cinquième :}\quad & f^{(5)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(f^{(4)}(x)\right)' \\
& \vdots \\
\text{Dérivée } n\text{-ième :}\quad & f^{(n)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(f^{(n-1)}(x)\right)'
\end{aligned}
$$

La dérivée d'ordre quelconque $f^{(n)}$ est appelée **dérivée *n*-ième**.

Par convention, la « dérivée 0-ieme » est la fonction elle même.

$$f^{(0)}(x) = f(x).$$

Les dérivées d'ordre supérieur ont une notation dans toute les variantes de la notation pour la dérivée. Le tableau suivant offre un panorama de ces notations.

Notations pour la dérivée seconde						
$f''(x)$	$f^{(2)}(x)$	y''	$\left(x^2\right)''$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$	$\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$	$\dfrac{d^2x^2}{dx^2}$
$f''(a)$	$f^{(2)}(a)$	$y''\rvert_{x=a}$	$\left(x^2\right)''\Big\rvert_{x=a}$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big\rvert_{x=a}$	$\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}\Big\rvert_{x=a}$	$\dfrac{d^2x^2}{dx^2}\Big\rvert_{x=a}$

Chapitre 4

Limites et continuité

4.1 Définition du concept de limite

On écrit $x \to a$ pour signifier que « x est aussi près que l'on veut de a ». De même manière, on écrit que $f(x) \to L$ pour dire que « $f(x)$ aussi près que l'on veut de L en choisissant les bonnes valeurs de x.

Une manière d'interpréter la notation $x \to 2$ par exemple, est d'imaginer une suite quelconque de nombre qui s'approche de 2. On pourrait par exemple considérer

$$2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, \ldots$$

ou encore

$$1.9, , 1.99, 1.999, \ldots$$

et même

$$2.1, 1.9, 2, 01, 1.99, 2.001, 1.999, 2.0001, \ldots$$

Définition 4.1. La notation $\lim_{x \to a} f(x) = L$ signifie :

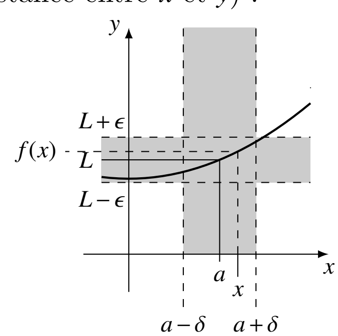
> « $f(x)$ peut être aussi près de L que l'on veut si $x \in \mathrm{dom}(f)$ est assez près de a, mais différent de a. »

On peut aussi dire : $f(x) \to L$ si $x \to a$ et $x \neq a$.

Note : la *manière* de se rapprocher de a ne change rien à la limite. Peu importe comment x se rapproche de a, si la limite existe, $f(x)$ se rapproche toujours de la limite L.

Version précise cette définition (où $d(x, y) = |y - x|$ est la distance entre x et y) :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \overset{\text{def}}{\iff} \forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. d(x, a) < \delta \implies d(f(x), L) < \epsilon$$



Enfin,la spécification d'une limite ne dépend pas du nom de la variable utilisée comme argument de fonction. On peut la changer comme on veut : les expressions $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{y\to a} f(y)$ et $\lim_{z\to a} f(z)$ désignent toutes la même quantité : la limite de la fonction quand son argument tend vers a.

4.1.1 Existence d'un limite

On dit que la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe quand il y a un L tel que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L;$$

on peut écrire $\lim_{x\to a} \; f(x)\exists$ pour dire que la limite existe sans spécifier la valeur de cette limite.

Une limite n'existe pas quand il n'y a pas de L tel que $f(x)$ puisse être aussi près de L que l'on veut si on prend des x assez près de a. Dans ce cas, on écrit $\lim_{x\to a} f(x)\nexists$.

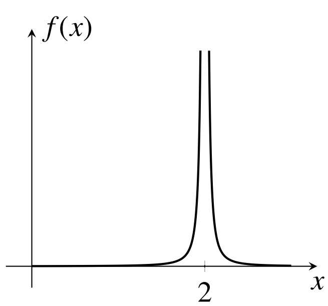
Voici trois exemples où une limite n'existe pas.

Si la valeur de la fonction devient indéfiniment grande ou petite. Dans ce cas, on écrit habituellement $\lim_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$.

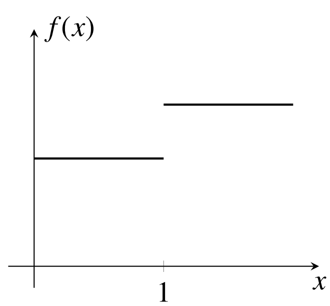
S'il y a un « saut » dans le graphe de la fonction faisant en sorte qu'en s'approchant d'un côté de a ou de l'autre, on trouverait des limites différentes.

Si la valeur de la fonction « oscille » entre différentes valeurs sans jamais s'approcher d'aucune valeur particulière.

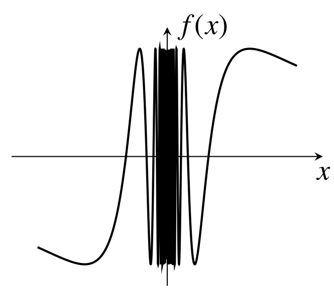
$\lim_{x\to 2} f(x)\nexists$



$\lim_{x\to 1} f(x)\nexists$



$\lim_{x\to 0} f(x)\nexists$



4.1.2 Déterminer « expérimentalement » la limite d'une fonction

La limite de certaines fonctions peut être déterminée en observant le comportement des valeurs $f(x)$ quand on choisis des x de plus en plus près de a.

Exemple 4.1. On veut déterminer la valeur de $\lim_{x\to 0} f(x)$ si $f(x) = 2x+1$. On prend des valeurs de x de plus en plus près de 0 (la colonne x du tableau suivant). Par chacune de ces valeurs, on calcule la valeur de $f(x)$.

x	$f(x)$
1.00000	3.00000
0.0312500	1.06250
0.00411523	1.00823
0.000976562	1.00195
0.000320000	1.00064
0.000128601	1.00026
0.0000594990	1.00012
0.0000305176	1.00006
0.0000169351	1.00003
0.0000100000	1.00002

On observe que quand $x \to 0$, $f(x) = 2x+1$ se rapproche de 1.

Notons que ce comportement ne dépend pas des nombres choisis : peut importe comment $x \to 0$, $f(x)$ se rapproche de 1. Dans le tableau suivant, on prend dès valeurs de x qui « oscillent » autour de la valeur centrale 0, mais de plus en plus près de 0. Les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus près de 1, même si elles ont parfois plus grande que 1, parfois plus petite que 1.

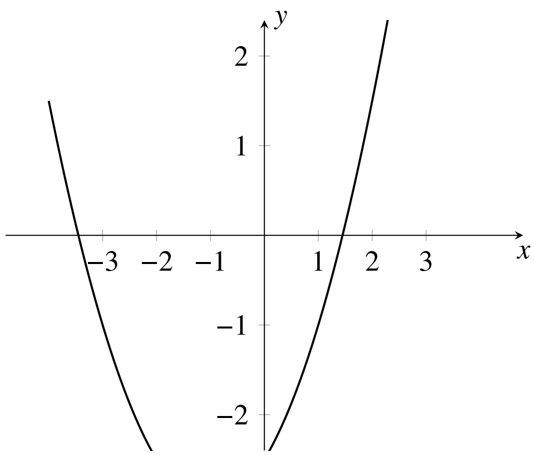
x	$f(x)$
0.0156250	1.03125
-0.00195312	0.996094
0.000578704	1.00116
-0.000244141	0.999512
0.000125000	1.00025
-0.0000723380	0.999855
0.0000455539	1.00009
-0.0000305176	0.999939
0.0000214335	1.00004
-0.0000156250	0.999969

Notons enfin que $f(0) = 1$, c'est à dire que la valeur de la fonction en $x = 1$ coïncide avec la valeur dont s'approche $f(x)$ quand $x \to 0$.

4.1.3 Évaluation d'une limite à l'aide d'un graphique

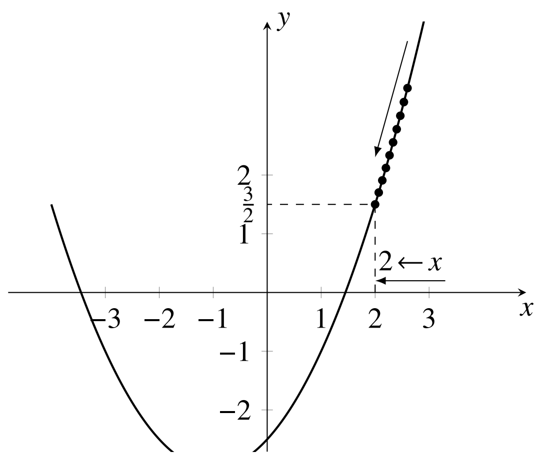
Si on connait le graphique d'une fonction, on peut souvent deviner les valeurs des limites.

Exemple 4.2. Le graphe de la fonction $f(x) = (x+1/2)^2 - 3$ est le suivant.



Ajoutons les points calculés dans le tableau suivant, en prenant une suite de valeurs de x telle que $x \to 2$.

x	$f(x)$
2.600	3.480
2.533	3.242
2.467	3.009
2.400	2.780
2.333	2.556
2.267	2.336
2.200	2.120
2.133	1.909
2.067	1.702

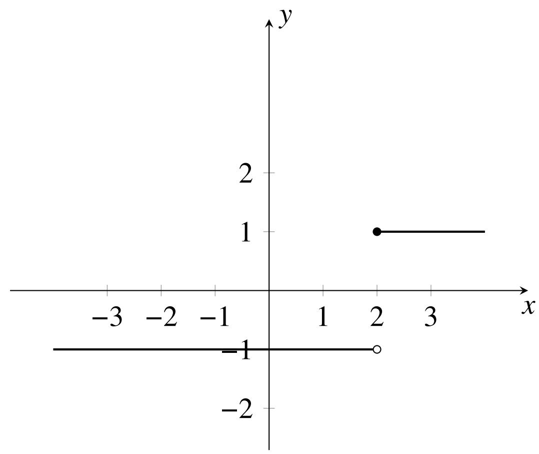


On voit sur le graphique que les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus proche de $3/2$. On a donc que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{3}{2}.$$

Cela est vrai peu importe comment la suite de valeurs de x s'approche de 2 : les valeurs de la fonction seront toujours de plus en plus près de $3/2$.

En étudiant le dernier exemple, on pourrait penser que la limite d'une fonction quand $x \to a$ est toujours $f(a)$, mais ce n'est pas le cas. Les fonction où la limite ne coïncide pas avec la valeur de la fonction sont dites **discontinues**. Tentez par exemple de faire comme dans le dernier exemple pour deviner la valeur de la limite avec la fonction suivante.



Si on prend une suite de valeurs de x telle que $x \to 2$ et que $x > 2$, les valeurs de $f(x)$ s'approchent de 1 qui est $f(2)$. Cependant, si on prend une suite de valeurs de x qui s'approche de 2 mais telles que $x < 2$, alors les valeurs de $f(x)$ s'approchent de -1, qui n'est pas $f(1)$. Ainsi, on voit qu'il n'est pas toujours vrai que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

4.1.4 Fonctions ayant les mêmes limites

Deux fonctions peuvent être globalement différentes, mais identiques dans certaines régions. Un principe très important pour évaluer algébriquement des limites (c'est à dire sans l'aide d'un tableau de valeurs ou d'un graphique), est de remplacer une fonction pour laquelle l'évaluation d'une limite est problématique par une autre pour laquelle la limite est plus facile à déterminer.

Nous faisons du même coup l'hypothèse que la valeur de la limite $\lim_{x \to a} f(x)$ ne dépend pas du comportement de la fonction loin de $x = a$, mais uniquement des valeurs de $f(x)$ assez proche de $x = a$.

Hypothèse 2. *Si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \neq a$ assez près de a, sauf peut-être en $x = a$, et si la limite du membre de droite existe, alors*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x).$$

4.2 Limites à gauche et limites à droite

Nous avons vu qu'une des situations faisant qu'une limite $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas est celle où faire s'approcher x de a par la gauche ou par la droite ne donne pas le même résultat. Pour étudier plus précisément ce type de situation, nous introduisons une version de la notion de limite où les valeurs de x sont contraintes à être « à gauche » ou « à droite » de a.

Les limites à gauche sont définies comme les limites en général, mais en limitant les valeurs possible de x « à gauche » de a.

On écrit $x \to a^-$ pour dire que x se rapproche de a par des valeurs plus petites que a. De même, on écrit $x \to a^+$ pour dire que x se rapproche de a par des valeurs plus grandes que a.

Définition 4.2.

Limites à droite : la notation $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ signifie :

> « $f(x)$ peut être aussi près de L que l'on veut si $x \in \mathrm{dom}(f)$ est assez près de a avec $x > a$. »

Limites à gauche : la notation $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ signifie :

> « $f(x)$ peut être aussi près de L que l'on veut si $x \in \mathrm{dom}(f)$ est assez près de a avec $x < a$. »

Le lien entre la limite et les limites à gauche et à droite est donné par le résultat suivant.

Hypothèse 3.

$$\textit{Si } \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L, \textit{ alors } \lim_{x\to a} f(x) = L.$$

$$\textit{Si } \lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x), \textit{ alors } \lim_{x\to a} f(x) \nexists.$$

La seconde de ces hypothèses est utile pour déterminer algébriquement si une limite existe.

Exemple 4.3. Soit la fonction f définie de la manière suivante.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ (x+1)^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Déterminons si la limite $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe.

D'une part, si $x \to 1$ par la droite, on a que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 = 1^2 = 1.$$

Notez que nous utilisons l'hypothèse **??** pour remplacer $f(x)$ par x^2 quand $x \geq 1$, car les deux fonctions sont égales sur l'intervalle $[1,\infty[$ et ont donc les mêmes limites sur cette région.

D'autre part, si $x \to 1$ par la gauche, on a que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1)^2 = (1+1)^2 = 4$$

En comparant les deux résultats, on voit que

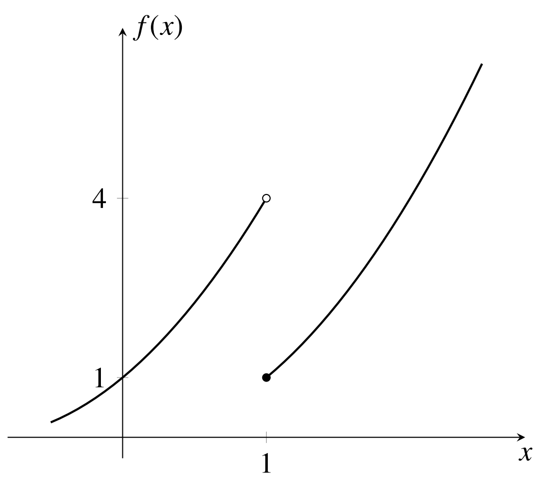
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x),$$

et donc, par l'hypothèse 3, la limite

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

n'existe pas.

Pour mieux comprendre l'argument algébrique, voici le graphe de la fonction f.



4.2.1 Composition de fonction

Quand on doit déterminer la limite d'une fonction composée, la limite de la composition est trouvée à l'aide du résultat suivant.

> **Proposition 4.1.** Si la limite $\lim_{x\to a} g(x)$ existe, on peut poser $b = \lim_{x\to a} g(x)$. On a

alors que

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = \lim_{x \to b} f(x).$$

Démonstration. Supposons que la limite $\lim_{x \to a} g(x)$ existe, et posons $b = \lim_{x \to a} g(x)$ et $y = g(x)$. Il faut montrer que

$$\lim_{y \to b} f(y) = \lim_{x \to a} f(g(x)).$$

Quand $x \to a$, $y = g(x) \to b$ par définition de b. Les limites $\lim_{y \to b} f(y)$ et $\lim_{x \to b} f(g(x))$ sont donc égales. Comme la variable utilisée comme argument de fonction dans une limite n'a pas d'importance,

$$\lim_{x \to b} f(g(x)) = \lim_{y \to b} f(y) = \lim_{x \to b} f(x).$$ □

Exemple 4.4.

$$\lim_{x \to 2} (x-1)^2 = \lim_{x \to 3} x^2$$

4.3 Limites et continuité

Le concept de *continuité* permet de mieux comprendre pourquoi certaines limites n'existent pas.

On dit qu'une fonction est continue en un point si son comportement près de ce point permet de prédire la valeur de la fonction à ce point. Plus rigoureusement, on défini la continuité de la manière suivante.

Définition 4.3. Une fonction f est continue au point a si et seulement si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

la limite existe et que $f(a)$ soit défini.

4.3.1 Continuité des fonctions définies par morceaux

Exemple 4.5. Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Comme la fonction f est définie par un polynôme si $x \neq 1$, f est continue pour toute valeur de $x \neq 1$. Est-ce que f est continue en $x = 1$?

Pour que f soit continue en $x = 1$, il faut que (1) $f(1)$ soit défini, (2) $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe et que

$$(3) \quad \lim_{x \to 1} f(x) = f(1).$$

Par définition, $f(1) = 3$.

On vérifie $\lim_{x\to 1} f(x)$ à l'aide des limites à droite et à gauche.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x = 2(1) = 2$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = (1)^2 = 1$$

Comme la limite à droite (2) n'est pas égale à la limite à gauche (1), $\lim_{x\to 1} f(x) \nexists$ et f ne peut pas être continue en $x = 1$.

Exemple 4.6. Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 2 \\ -10 & \text{si } x = 2 \\ 2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Comme la fonction f est définie par un polynôme si $x \neq 0, 1$, f est continue pour toute valeur de $x \neq 0, 1$. Est-ce que f est continue en en $x = 0$ et en $x = 1$?

En $x = 0$: $f(0) = 0^2 = 0$ est défini.

On vérifie si $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe à l'aide des limites à droite et à gauche.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = (0)^2 = 0$$

Comme la limite à droite est égale à la limite à gauche et on la même valeur 0, la limite $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Enfin, on a que

$$0 = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0;$$

la fonction est donc continue en $x = 0$.

En $x = 2$, on a que $f(2) = -10$ par définition.

On vérifie si $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe à l'aide des limites à droite et à gauche.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 2 = 2$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x = 2$$

Les deux limites existent et ont la valeur 2. On a donc que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 2$$

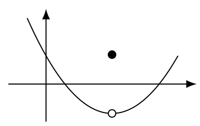
La fonction n'est cependant pas continue en $x = 2$ car $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$ alors que $f(2) = -10$. On a donc que

$$\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2).$$

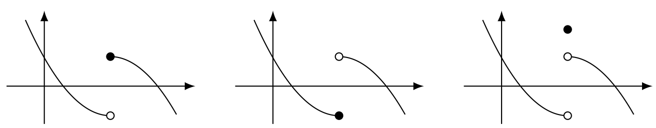
4.3.2 Différent types de discontinuités

On peut se servir de la définition de continuité (4.3) pour classifier les discontinuités : il y a quatre types de discontinuités :

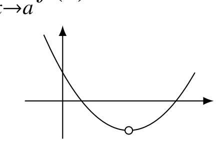
Type 1 $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ mais la limite existe et $f(a)$ est définie.



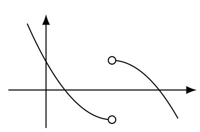
Type 2 $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas mais $f(a)$ est défini.



Type 3 $f(a)$ n'est pas définie mais $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.



Type 4 $f(a)$ n'est pas définie et $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.



Quand une fonction ait une discontinuité en $x = a$ qui ne peut pas être modifiée en fonction continue en a en modifiant la définition de $f(a)$ de manière à ce que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, la discontinuité est dite **essentielle**. Dans le cas contraire, on dit que la discontinuité est **non-essentielle**. Les discontinuités non-essentielles sont celles où la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, c'est à dire celle de type 1 et 3.

4.3.3 Continuité sur un intervalle

Définition 4.4. On dit qu'une fonction f est continue sur un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}$ si elle est continue pour chaque x dans I.

Dans ce cours, l'ensemble I sera le plus souvent un intervalle comme $[a,b]$, $]a,b[$, $]a,b]$ ou $[a,b[$. L'ensemble I peut aussi être le domaine de la fonction f ($I = \mathsf{dom}(f)$) ; si f est continue sur $\mathsf{dom}(f)$, on dit que « f est continue sur son domaine. »

4.4 Propriétés des limites

Hypothèse 4. *Propriétés axiomatiques des limites acceptés sans démonstration, mais motivées par l'intuition géométrique.*

(AL1) Si une limite existe, elle est unique.

(AL2) $\lim\limits_{x\to a} C = C$ *(C = constante)*

(AL3) $\lim\limits_{x\to a} x = a$

(AL4) $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$, *si les deux limites du membre de droite existent.*

(AL5) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$, *si les deux limites du membre de droite existent.*

Proposition 4.2. Les limites ont les propriétés suivantes, pouvant être déduites des propriétés axiomatiques.

(PL1) $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = C \lim\limits_{x\to a} f(x)$ si la limite du membre de droite existe.

(PL2) $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$.

(PL3) $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$, où $P(x)$ est un polynôme.

(PL4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, si les deux limites du membre de droite existent et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

(PL5) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ si $\sqrt[n]{a}$ est défini.

(PL6) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$ quand $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes et quand $Q(a) \neq 0$. (Les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaines)

Démonstration. (PL1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} Cf(x) &= \left(\lim_{x\to a} C\right)\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) && (AL3)\\ &= C\lim_{x\to a} f(x) && (AL1)\end{aligned}$$

(PL2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} x^n &= \lim_{x\to a} \overbrace{x\cdots x}^{n \text{ fois}} \\ &= \overbrace{\left(\lim_{x\to a} x\right)\cdots\left(\lim_{x\to a} x\right)}^{n \text{ fois}} \\ &= \overbrace{a\cdots a}^{n \text{ fois}} \\ &= a^n\end{aligned}$$

(PL3) Comme un polynôme est une somme de monômes consistants en puissances de x multipliés par des constantes, on utilise (PL1), (PL2) et (AL3) pour démontrer l'égalité voulue.

La démonstration des autres propositions est laissée en exercice ! □

4.4.1 Continuité des fonctions transcendantes

Hypothèse 5. *On suppose la continuité de certaines fonctions transcendantes.*

(AL6) $\lim_{x\to a} x^r = x^a$ *pour un nombre réel r quelconque.*

(AL7) $\lim_{x\to a} b^x = b^a$ *(la fonction exponentielle est continue)*

(AL8) $\lim_{x\to a} \log_b(x) = \log_b(a)$ *si* $\log_b(a)$ *est défini. (la fonction logarithme est continue)*

(AL9) $\lim_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$ *(la fonction sinus est continue)*

(AL10) $\lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$ *(la fonction cosinus est continue)*

(AL11) $\lim_{x\to a} \tan(x) = \tan(a)$ *(la fonction tangente est continue)*

Exemple 4.7. On peut déduire que $\cos(x)$ et $\tan(x)$ sont des fonctions continues sur leurs domaines à l'aide des autres propriétés des limites données jusqu'ici.

(PL7) $\lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$ (la fonction cosinus est continue)

(PL8) $\lim_{x\to a} \tan(x) = \tan(a)$ (la fonction tangente est continue)

On laisse en exercice ces démonstrations, que l'on peut faire en utilisant les identités suivantes :

$$\cos(x) = \sin(x+\pi/2) \qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

4.5 Continuité et composition de fonctions

Théorème 4.1. La fonction f est continue en b si et seulement si

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

pour toutes les fonctions g telle que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ existe.

Autrement dit, une fonction est continue en un point si et seulement si on peut « échanger la limite et la fonction » ou « la limite passe à travers la fonction. »

Exemple 4.8. Évaluons $\lim_{x\to 4} \sqrt{x-3}$ à l'aide du theorème 4.1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4} \sqrt{x-3} &= \sqrt{\lim_{x\to 4} x - 3}\\ &= \sqrt{4-3}\\ &= \sqrt{1}\\ &= 1\end{aligned}$$

Démonstration. Supposons que f est continue en $b = \lim\limits_{x\to a}$, c'est à dire que

$$\lim_{u\to b} f(u) = f(b).$$

Si g est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, on peut remplacer b par $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ et obtenir

$$\lim_{x\to b} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

Quand $x \to a$, $g(x) \to b$. On peut donc remplacer $\lim\limits_{u\to b} f(x)$, en posant $u = g(x)$ qui s'approche de b quand x tend vers a. C'est une manière particulière de tendre vers a, mais comme on suppose que $\lim\limits_{u\to b} f(u) = f(b)$ peu importe la manière que u s'approche de a, cette manière particulière ne change pas la limite qui est toujours $f(b)$. Ainsi

$$\lim_{u\to b} f(u) = \lim_{x\to a} f(g(x)).$$

En combinant les résultats, on obtient le résultat voulu :

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} f(g(x))\right).$$

La réciproque est plus simple à démontrer. On suppose que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} f(g(x))\right)$$

pour toute fonction g telle que $\lim_{x\to a} g(x)$ existe. On peut prendre le cas particulier $g(x) = x$, car la limite existe. L'hypothèse devient

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\Big(\lim_{x\to a} x\Big).$$

Comme $\lim_{x\to a} x = a$, on obtient que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

ce qui montre que f est continue en a. $\square$

Enfin, on peut établir que la composition de deux fonctions continues est elle aussi continue.

> **Proposition 4.3.** Si f et g sont deux fonctions continues, alors la composée $f \circ g$ est aussi continue et
>
> $$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\big(g(a)\big).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} [f \circ g](x) &= \lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) \\
&= f\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big) \quad \text{(par thm 4.1 et } f \text{ continue)} \\
&= f\,(g(a)) \quad \text{(car } g \text{ continue)} \\
&= [f \circ g](a)
\end{aligned}$$

Ainsi, la composée $f \circ g$ est continue car $\lim_{x\to a} [f \circ g](x) = [f \circ g](a)$. $\square$

En combinant les hypothèse (AL1) à (AL11) et les propriétés (PL1) à (PL8) et cette dernière proposition, on sait maintenant que toutes les fonctions obtenues en combinant des fonctions continues par composition, produits, quotients, puissantes, racines, etc, sont elles aussi continues.

4.5.1 Limites à gauche, limites à droites et composition

La propriété 4.1 s'applique aux limites à droites et à gauche dans certaines conditions.

Par exemple, $\lim_{x\to a^+} f(g(x)) = \lim_{x\to b^+} f(x)$ si $b = \lim_{x\to a^+} g(x)$.

On utilise habituellement les notations suivantes

$f(b^+)$ pour $\lim_{x\to a} f(g(x))$ quand $g(x) \to b^+$ quand $x \to a^+$.

$f(b^-)$ pour $\lim_{x\to a} f(g(x))$ quand $g(x) \to b^-$ quand $x \to a^+$.

Il faut donc pouvoir déterminer de quelle manière $g(x)$ approche de b quand x to a^+. On peut par exemple utiliser le résultat suivant et la factorisation :

Proposition 4.4.

$$\lim_{x\to a^+}(x-a) = 0^+$$

$$\lim_{x\to a^-}(x-a) = 0^-$$

Si on a une fonction rationnelle et qu'on veut déterminer si $f(x) \to 0^+$ ou si $f(x) \to 0^-$, on peut factoriser le numérateur et le dénominateur pour déterminer le signe de chaque facteur quand $x \to a$.

4.6 Comparaisons de limites

Hypothèse 6. *Si $f(x) \leq g(x)$ pour toutes valeurs de x assez près de a, on a que*

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$

quand ces deux limites existent.

On utilise souvent la conséquence suivante de la dernière hypothèse pour déterminer la valeur de certaines limites problématiques.

Théorème 4.2 (des gendarmes ou du Sandwich)**.** Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout les x assez près de a, on a que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L \implies \lim_{x\to a} g(x) = L$$

Démonstration. En utilisant l'hypothèse 6, on a que

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} h(x).$$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, l'inégalité précédente devient

$$L \leq \lim_{x\to a} g(x) \leq L.$$

Comme le seul nombre à la fois plus grand et plus petit que L est L lui-même, on doit avoir que

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

□

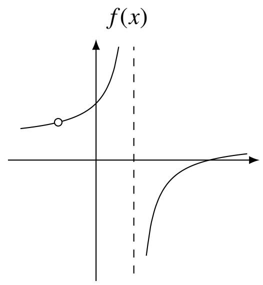
4.7 Indéterminations

Un cas d'**indétermination** « $\frac{0}{0}$ » est une situation où, en évaluant la limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

on trouve que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Dans cette situation, les propriétés des limites que nous avons vu jusqu'ici ne permettent pas de déterminer la valeur de la limite (d'où le terme *indétermination* ou *forme indéterminée*).

Exemple 4.9. Considérer la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$.



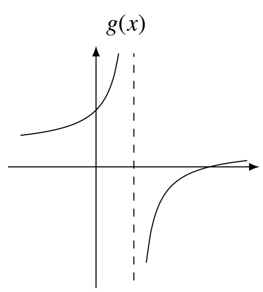
En factorisant le numérateur et le dénominateur de la fraction algébrique qui définie la fonction et en simplifiant, on trouve que

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-3}{x-1}.$$

La fonction f n'est pas définie en $x = -1$ et en $x = 1$, car ces deux valeurs entrainent des divisions par zéro. Cependant, l'expression $\frac{x-3}{x-1}$ peut s'évaluer quand $x = 1$. Si on défini

$$g(x) = \frac{x-3}{x-1},$$

on a une nouvelle fonction qui a les mêmes valeurs que f, sauf quand $x = 1$. Son graphe est le suivant :



On a donc la situation suivante : les propriétés des limites vue précédemment ne permettent pas d'évaluer

$$\lim_{x \to -1} f(x).$$

parce qu'il y a une discontinuité. La discontinuité de la fonction f est cependant non-essentielle. En simplifiant le facteur commun à $x^2 - 2x - 3$ et à $x^2 - 1$, on obtient une nouvelle fonction g. Comme les deux fonctions sont identiques sauf en $x = -1$, on peut remplacer f par g pour évaluer la limite

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} g(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x-3}{x-1} = \frac{(-1)-3}{(-1)-1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Ces indéterminations sont dues à une discontinuité de la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$. Si cette discontinuité est non-essentielle, on peut « lever l'indétermination » en utilisant l'hypothèse 2. On rappelle qu'intuitivement, cette hypothèse permet de remplacer dans une limite une fonction par un autre si les deux fonctions sont identiques près d'une valeur a. Cela permet de remplacer une fonction f discontinue en a par une fonction g continue en a qui a la même limite. Comme g est continue en a, la limite $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ s'évalue plus facilement que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

4.7.1 Techniques algébriques pour lever les indéterminations

Pour utiliser l'hypothèse 2, il faut être capable de trouver la bonne fonction de remplacement ! Dans les indétermination « $\frac{0}{0}$ », on peut trouver $g(x)$ en simplifiant un facteur commun au dénominateur et au numérateur — le « facteur coupable. »

Dans le cadre de ce cours, il y aura trois techniques algébriques pour trouver le facteur commun à simplifier pour lever une indétermination « $\frac{0}{0}$ » :

- factoriser (utiliser le théorème de factorisation ou une identité connue) ;
- multiplier par le conjugué s'il y a des racines.
- mettre au dénominateur commun s'il y a des fractions.

Ces trois techniques ne permettent pas de lever toutes les indéterminations, car dans certains cas, on peut obtenir une forme « 0/0 » sans que l'on puisse facilement trouver un facteur à simplifier. Par exemple, la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

est une indétermination « $\frac{0}{0}$ », mais comment trouver au numérateur un facteur x à simplifier avec le dénominateur ? Nous verrons plus loin que cette limite vaut 1. Cette limite est très importante en science (en physique en particulier) car elle permet d'approximer $\sin(x)$ par x quand on sait que x est près de 0.

Exemple 4.10. Dans cet exemple, on simplifie le facteur commun par factorisation polynomiale.

Premièrement, on vérifie que

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x^3 - 3x^2 - 10x + 24}$$

est donne bien une expression de la forme « 0/0 » quand $x = 4$. On a donc que $x = 4$ est un zéro des polynômes $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ et $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$. Par le théorème de factorisation, on sait que $(x-4)$ est un facteur de chacun de ces deux polynôme.

On trouve par division polynômiale que

$$x^3-3x^2-6x+8=(x-4)(x^2+x-2) \text{ et } x^3-3x^2-10x+24=(x-4)(x^2+x-6).$$

On utilise ces factorisation pour simplifier le facteur commun $x-4$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4}\frac{x^3-3x^2-6x+8}{x^3-3x^2-10x+24} &= \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x^2+x-2)}{(x-4)(x^2+x-6)} \\
&= \lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}(x^2+x-2)}{\cancel{(x-4)}(x^2+x-6)} \\
&= \lim_{x\to 4}\frac{x^2+x-2}{x^2+x-6} \\
&= \frac{4^2+4-2}{4^2+4-6} \\
&= \frac{9}{7}
\end{aligned}$$

Exemple 4.11. On vérifie pour commencer que l'on a bien une forme « 0/0 » :

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\frac{4-4}{\sqrt{4}-2}= « \frac{0}{0} ».$$

On utilise le conjugué de $\sqrt{x}-2$ pour éliminer la racine problématique : $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)=(x-4)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \\
&= \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} \\
&= \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{(x-4)}} \\
&= \lim_{x\to 4}\sqrt{x}+2 \\
&= \sqrt{4}+2 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Exemple 4.12. Dans cet exemple, on utilise la mise au dénominateur commun.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to4}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{4}}{x-4} &= \lim_{x\to4}\frac{\frac{4-x}{4x}}{x-4}\\
&= \lim_{x\to4}\frac{4-x}{4x}\frac{1}{x-4}\\
&= \lim_{x\to4}\frac{-(x-4)}{4x}\frac{1}{x-4}\\
&= \lim_{x\to4}\frac{-\cancel{(x-4)}}{4x}\frac{1}{\cancel{(x-4)}}\\
&= \lim_{x\to4}\frac{-1}{4x}\\
&= -\frac{1}{16}
\end{aligned}$$

4.8 Limites et continuité de fonctions définies par morceaux

Rappel Une fonction définie par morceaux est une fonction dont la règle de définition comporte plusieurs cas mutuellement exclusif.

Exemple 4.13. La fonction **valeur absolue** est une fonction définie par morceaux :

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Ainsi, si on évalue $|3|$, comme $3 \geq 0$, c'est la première ligne de la définition qui doit être utilisée. Cela donne que $|3|=3$.

Si on évalue plutôt $|-3|$, comme $-3 < 0$, c'est la seconde ligne de la définition qui doit être utilisée. Cela donne que $|-3| = -(-3) = 3$.

Pour évaluer une limite avec $x \to a$, ont vérifie dans quelle partie de la fonction on se trouve : est-ce que si x est assez près de a, x vérifie une des conditions ou se trouve plutôt à la « frontière » entre deux conditions ?

Exemple 4.14.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to2}|x| &= \lim_{x\to2}x \qquad \text{(hyp 2, car } |x| = x \text{ près de } x = 2)\\
&= 2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-3}|x| &= \lim_{x\to-3} -x \qquad (\text{car } |x| = -x \text{ près de } x=-3)\\
&= -(-3)\\
&= 3
\end{aligned}
$$

Pour évaluer

$$\lim_{x\to 0}|x|$$

nous devons séparer la limite en limite à droite et limite à gauche car 0 est une valeur « frontière ».

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}|x| &= \lim_{x\to 0} x \qquad (\text{car } |x| = x \text{ si } x \geq 0)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-}|x| &= \lim_{x\to 0} -x \qquad (\text{car } |x| = -x \text{ si } x < 0)\\
&= -0\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Comme les limites à gauche et à droite coïncident, on a que

$$\lim_{x\to 0}|x| = 0.$$

Chapitre 5

Limites et dérivées

5.1 Taux de variation instantané avec les limites

Définition 5.1. Le **taux de variation instantané** (TVI) de la fonction f en $x = a$ est défini par

$$\mathrm{TVI}_a(f) = \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{TVM}_{[a, a+\Delta x]}(f) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

On remplace donc l'idée d'un « dx infinitésimal » par $\Delta x \to 0$. Cette idée permet d'éviter les complications conceptuelles de l'idée d'infiniment petit. On parle d'une quantité « aussi petite que l'on veut » plutôt que d'une quantité infiniment petite.

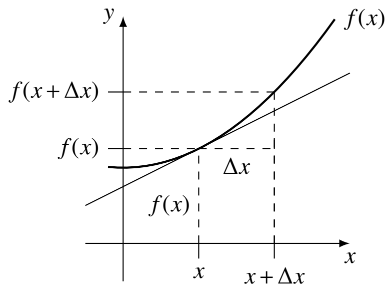
Note : quand on évalue un TVI à l'aide de cette définition, la limite impliquée sera toujours un cas d'indétermination « $\frac{0}{0}$ », car $\Delta y \to 0$ quand $\Delta x \to 0$. Il faut donc toujours utiliser une transformation algébrique permettant de simplifier un facteur Δx pour lever l'indétermination.

5.2 Dérivée

Comme la pente de la tangente à au graphe d'une fonction f est directement lié à sa croissance, il est utile de la considérer comme une nouvelle fonction *dérivée* de la fonction initiale. Cette fonction dérivée associe à chaque valeur de x dans le domaine de f la pente de la tangente au graphe de f au point $\big(x, f(x)\big)$.

Définition 5.2. La **fonction dérivée** f' d'une fonction f est définie par

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$



Exemple 5.1. Si $f(x) = x^3$, alors

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) - x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 \\
&= 3x^2 + 3x(0) + (0)^2 \\
&= 3x^2
\end{aligned}
$$

On a donc que $f'(x) = 3x^2$.

À l'aide de la dérivée, on peut par exemple déterminer la pente de la tangente à f en un point quelconque $(x, f(x))$ du graphe de f en évaluant $f'(x)$. Par exemple, si $x = 2$, la pente de la tangente est

$$f'(2) = 3(2)^2 = 24.$$

Si $x = -1$, la pente de la tangente est

$$f'(-1) = 3(-1)^2 = 3.$$

On peut aussi chercher les valeurs de x où la pente a une valeur spécifique. Par exemple, la tangente est horizontale quand sa pente est nulle. Cela est le cas quand

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Exemple 5.2. Si $f(x) = \sqrt{x+1}$, la dérivée de f est

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}}{\Delta x} \frac{\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x+1) - (x+1)}{\Delta x} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+0+1} + \sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}
\end{aligned}$$

Donc $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

La fonction dérivée f' est la fonction qui associe à chaque valeur de x le taux de variation instantané de f en x, soit la pente de la tangente en $\big(x, f(x)\big)$:

$$f'(x) = \mathrm{TVI}_x(f) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

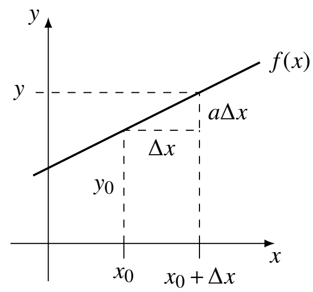
Les notation $f'(x)$ et $\mathrm{TVI}_x(f)$ sont donc interchangeables. Cependant, la notation $f'(x)$ met l'accent sur le fait que la nouvelle fonction f' est déterminée à partir de la fonction originale f. Cette fonction est le plus souvent appelée simplement *la dérivée de f*.

L'opération « ' » (dérivée) est en fait elle même une sorte de fonction, mais qui prend une fonction comme argument et qui retourne une nouvelle fonction :

$$\text{dérivée}\colon \text{fonctions réelles} \to \text{fonctions réelles}$$

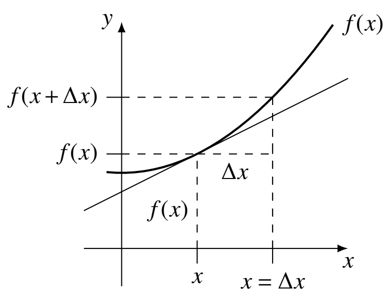
5.3 Droite tangente et approximation d'une fonction

Si une droite est de pente a, une augmentation de Δx de la valeur de x augmentera la valeur de y de $a\Delta x$.



On a donc que $y = y_0 + a\Delta x$.

On peut se servir de cette relation pour obtenir une approximation linéaire à l'aide de l'équation de la droite tangente.



Dans ce dernier graphique, la pente de la tangente au point $\big(x, f(x)\big)$ est, par définition, la valeur $f'(x)$ de la dérivée évaluée en x. En remplacent les paramètres de la relation $y = y_0 + a\Delta x$ par ceux de la droite tangente du dernier graphique, l'équation de la droite tangente en $(x, f(x))$ (où y est fonction de Δx) est

$$y = f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Si on considère que y sur la droite tangente est une bonne approximation de y sur le graphe de la fonction f, on peut faire l'approximation suivante de $f(x+\Delta x)$

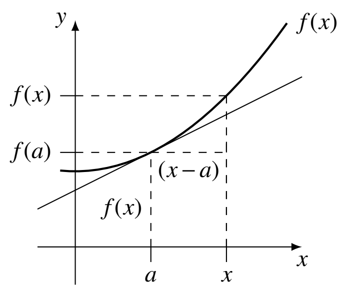
$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

5.3.1 Définition alternative de la dérivée

On peut aussi définir la dérivé de la manière suivante :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La comparaison du graphique suivant, qui illustre les principaux éléments de la définition précédente, avec le graphique illustrant la définition originale permet de voir leur équivalence géométrique : dans les deux cas, on détermine la dérivée à l'aide de pente de sécantes approximant la pente de la tangente.



Exemple 5.3. Si $f(x) = \sqrt{x+1}$, la dérivée $f(a)$ peut être calculée par

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{a+1}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{a+1}}{x-a} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{a+1}} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(x+1)-(a+1)}{x-a} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{a+1}} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{a+1}} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{a+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a+1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a+1}}
\end{aligned}
$$

En utilisant cette forme de la définition de la dérivée, l'équation de la droite tangente s'écrit plutôt :

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

La droit tangente peut servir d'approximation à la fonction pour des valeurs de x proche de a :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a).$$

Cette approximation sera généralisée en calcul intégral. On appelle cette généralisation *série de Taylor* et on y consacrera près d'un quart de la session !

Notons enfin que l'on peut aussi écrire la définition de la dérivée de la manière suivante, en utilisant x_0 au lieu de a.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

La notation x_0, x_1, x_2 est souvent utilisée pour désigner des valeurs particulières de x.

5.4 Différentiabilité

Définition 5.3. Une fonction f est différentiable en $x = a$ si la limite servant à définir $f'(x)$ existe, c'est à dire quand

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ existe}$$

Exemple 5.4. La fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ n'est pas différentiable en $x = 0$.

En effet,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \end{aligned}$$

Cette dernière limite est une limite « $\frac{0}{0}$ ». On ne peut pas directement simplifier $|x|$ et x. Il faut simplifier différemment selon le signe de x. Si x est positif, $|x| = x$ et donc

$$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1.$$

Si x est négatif, $|x| = -x$ et donc

$$\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1.$$

On peut donc compléter le calcul de $f'(0)$ en prenant les limites à droite et à gauche.

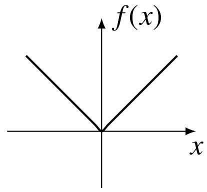
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$$

Comme les limites à droites et à gauche ne sont pas égales, on a que

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \nexists.$$

On a donc montré que $f'(0)$ n'existe pas, car la limite présente dans la définition n'existe pas.



Une conséquence importante de la différentiabilité : si une fonction admet une tangente en un point de son graphe, la fonction est continue en ce point.

Théorème 5.1. Si f est différentiable en $x = a$, alors f est continue en $x = a$.

Démonstration. On suppose que f est différentiable en $x = a$ et on cherche à montrer que f est continue en $x = a$, c'est à dire que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Si f est différentiable en $x = a$, par définition, il existe une valeur L telle que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L.$$

Si on considère la limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a),$$

en utilisant la propriété donnant la limite d'un produit, on doit avoir que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x\to a}(x-a)\\ &= L(0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Si on simplifie le facteur $x-a$ dans la limite, on a que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = \lim_{x\to a} f(x) - f(a),$$

et avec le résultat précédent, on a donc que

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0.$$

$$\lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} f(a) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) - f(a),$$

et donc

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

c'est à dire que f est continue en $x = a$. □

La contraposée du dernier théorème sera utile pour l'analyse de fonctions.

Corollaire 5.1. Si une fonction n'est pas continue en $x = a$, alors elle n'est pas différentiable en $x = a$.

Comme une fonction qui n'est pas définie en un point de peut être continue en ce point, une fonction n'est jamais différentiable hors de son domaine.

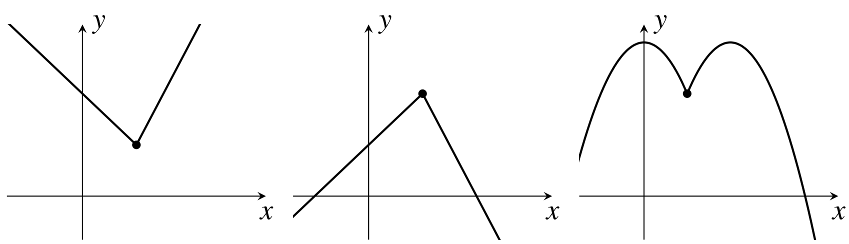
5.4.1 Types de non-différentiabilité

Comme la différentiabilité n'est rien d'autre que l'existence d'une limite et qu'il y a différent scénarios où une limite n'existe pas, il y a aussi différents scénarios où une fonction n'est pas dérivable (en un point).

Un **point anguleux** est un point où

$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

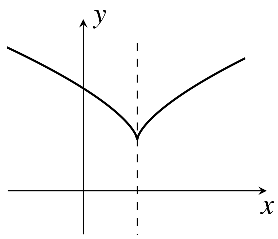
mais où les limites à droite et à gauche existent toutes deux. Dans une telle situation, il y a « deux tangentes », une à droite et une à gauche. Voici quelques exemples de points anguleux.

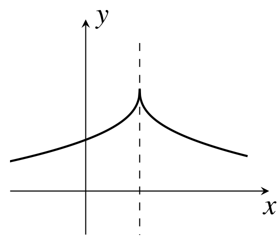


Un **point de rebroussement** est un point où

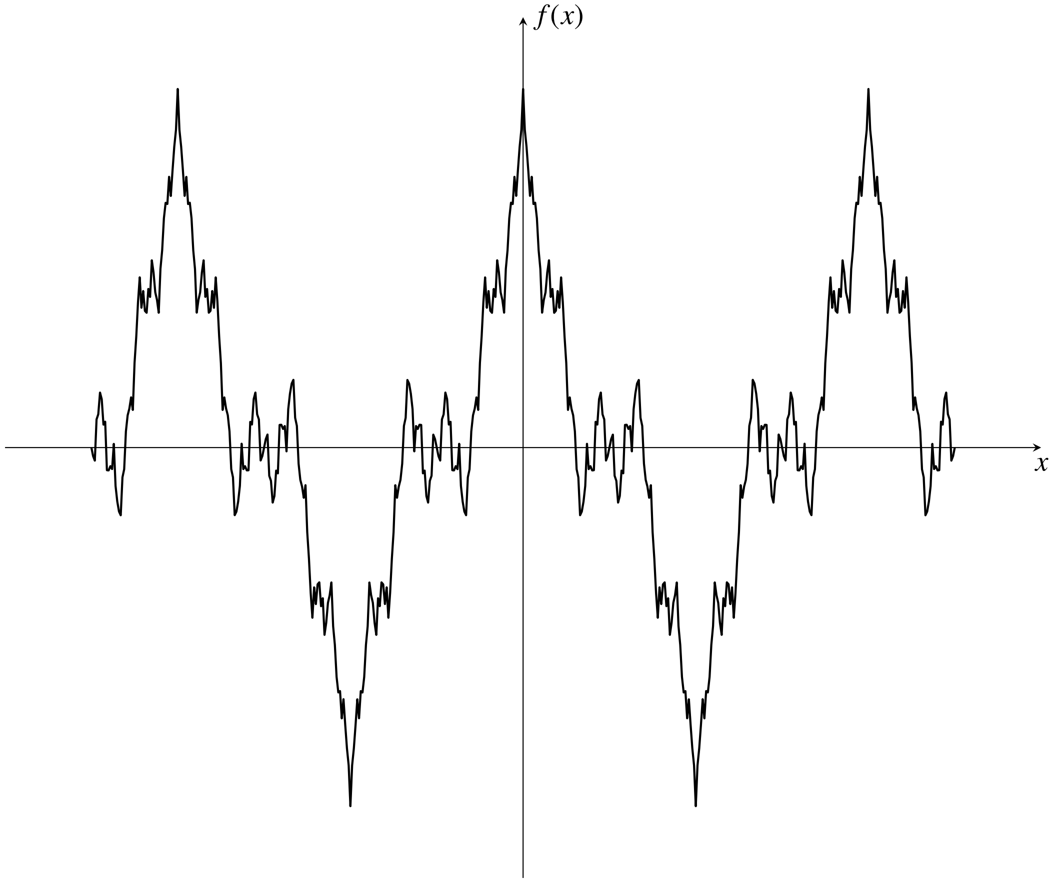
$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x\to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty,$$

c'est-à-dire où la limite à droit ou la limite à gauche est infinie. Cela donc graphiquement un point où il y a une tangente verticale « de pente infinie ».





Enfin, un point de non-dérivabilité peut être du au fait que la limite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ n'existe pas à cause d'oscillations qui ne se stabilisent pas. Un exemple connnu est la fonction de Weirestrass, qui a la propriété d'être dérivable en aucune valeur de son domaine !



,

Chapitre 6

Analyse de fonctions

6.1 Limites et asymptotes

Définition 6.1. On écrit que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

si $f(x)$ est aussi grande que l'on veut quand x est assez près de a.

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

si $f(x)$ est aussi petit que l'on veut quand x est assez près de a.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut quand x est assez grand.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut quand x est assez petit.

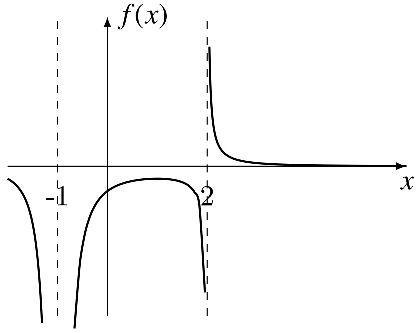
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$$

si $f(x)$ est aussi grand (ou petit) que l'on veut quand x est assez grand.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$$

si $f(x)$ est aussi grand (ou petit) que l'on veut quand x est assez petit.

Exemple 6.1. Considérons la fonction ayant le graphe suivant.



Pour cette fonction,

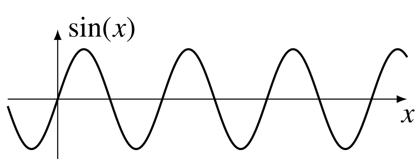
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \nexists$
- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to -} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$

Remarque 6.1. Dans l'exemple précédent, on a écrit $\lim\limits_{x\to -} f(x) = -\infty$ car la fonction tend vers $-\infty$ peu importe comment $x \to -1$. Cependant, comme cette limite n'a pas de valeur car ∞ n'est pas un nombre réel ! mais un symbole indiquant le comportement d'une fonction. On pourrait aussi écrire que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) \nexists$.

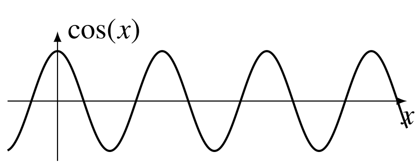
Certaines limites à l'infini n'existent pas, car les valeurs de la fonction ne s'approchent pas d'une valeur déterminée quand x devient de plus en plus grand (ou de plus en plus petit). Les fonctions trigonométriques sont un exemple : leur périodicité entraine que les limites à l'infini ne convergent pas.

Exemple 6.2.

- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \sin(x) \nexists$



- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \cos(x) \nexists$



Exemple 6.3.

- $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim_{x\to\infty} x + x^2 = \infty + \infty = \ \infty$

6.1.1 Arithmétique de l'infini

De manière générale, on peut utiliser « l'arithmétique de l'infini » (aussi appelé « algèbre de l'infini ») pour déterminer le comportement d'une fonction qui tend vers ∞ ou $-\infty$, ou quand $x \to \pm\infty$.

Définition 6.2 (Arithmétique de l'infini)**.**

$$\begin{aligned}
&\infty + \infty = \infty \\
&\infty \cdot \infty = \infty \\
&\infty \pm k = \infty \\
&\pm k \cdot \infty = \pm\infty \\
&\infty^\infty = \infty \\
&\infty^k = \infty
\end{aligned}$$

$$(-\infty)^k = \begin{cases} \infty & \text{si } k \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\infty} = \infty$$

$$\sqrt[n]{-\infty} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ impair} \\ \nexists & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

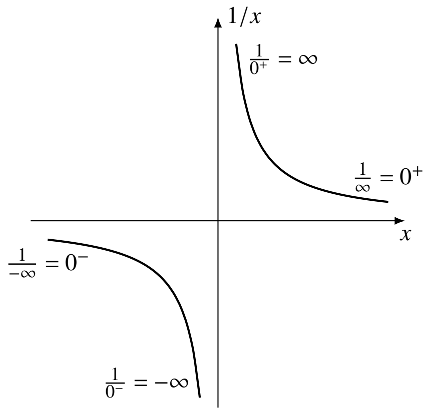
Il faut cependant garder en tête que ces règles de manipulation du symbole « ∞ » ne sont que des manières d'étudier le comportement de certaines limites ; « ∞ » n'est pas un nouveau nombre, même si ces règles peuvent donner cette impression. Ce symbole n'est qu'une manière commode de raisonner rapidement sur des limites où des valeurs sont aussi grande ou petite que l'on veut. En fait, on pourrait complètement se passer de l'arithmétique de l'infini et raisonner qu'avec des limites.

Exemple 6.4. Déterminons quelques limites à l'aide de l'arithmétique de l'infini.

- $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+5} = \sqrt{\infty^2+5} = \sqrt{\infty+5} = \sqrt{\infty} = \infty.$
- $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^3+1} = \sqrt{(-\infty)^3+1} = \sqrt{-\infty+1} = \sqrt{-\infty}\nexists.$
- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3+1}{4} = \dfrac{\infty^3+1}{4} = \dfrac{\infty+1}{4} = \dfrac{\infty}{4} = \infty.$

Limites impliquant $1/\infty$, $1/0^+$ et $1/0^-$

On peut ajouter les règles suivantes à l'arithmétique de l'infini. Elles sont déduite du comportement de la fonction $f(x) = 1/x$.



Note : comme $\dfrac{1}{\infty} = 0$, on a que $\dfrac{k}{\infty} = k\frac{1}{\infty} = k \cdot 0 = 0$ pour n'importe quelle constante k.

Exemple 6.5.

$$\lim_{x\to\infty} 2 + \frac{3}{x^3} = 2 + \frac{3}{\infty^3} = 2 + 3\frac{1}{\infty} = 0$$

Exemple 6.6.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(1/x)} = \frac{\infty}{0^+} = \infty.$$

On peut voir que $\infty/0^+ = \infty$ de la manière suivante :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(1/x)} = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{x}{1}\right) = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty.$$

Ou encore, avec l'arithmétique de l'infini :

$$\frac{\infty}{1/\infty} = \infty\frac{\infty}{1} = \infty^2 = \infty.$$

On doit garder en tête que les formes $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$ sont indéterminés – voir la section suivante.

Proposition 6.1. Si k est une constante positive, alors

$k \cdot 0^+ = 0^+$	$a^+ - a = 0^+$	$(0^+)^n = 0^+$ (n pair ou impair)
		$(0^-)^n = 0^+$ (n pair)
$-k \cdot 0^+ = 0^-$	$a^- - a = 0^-$	$(0^-)^n = 0^-$ (n impair)

6.1.2 Formes indéterminées

Nous avons déjà étudié les indéterminations de la forme « $\frac{0}{0}$. » Si on ajoute les limites quand $x \to \pm\infty$ et celles qui tendent vers $\pm\infty$.

Forme « $\dfrac{0}{0}$ »

Nous avons déjà étudié cette forme, mais nous pouvons analyser ce qui se passe dans une telle limite à l'aide des limites à l'infini, comparons les trois situations suivantes :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}$$

Forme « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

Pour comprendre pourquoi il y a indétermination quand l'évaluation directe donne un résultat de la forme « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », comparons les trois situations suivantes :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}$$

En évaluant directement, on obtient une expression de la forme « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » pour chacune des trois limites.

Si on simplifie avant d'évaluer, on obtient cependant trois résultats très différents :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2} &= \lim_{x\to\infty} x = \infty \\
\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2} &= \lim_{x\to\infty} 1 = 1 \\
\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0
\end{aligned}$$

On peut interpréter intuitivement ces résultats de la manière suivante : dans une forme « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », le numérateur et le dénominateur sont deux fonctions qui tendent vers l'infini. Si le dénominateur « va plus vite » à l'infini que le numérateur, le dénominateur l'emporte et le rapport tend vers 0. Si le numérateur « va plus vite » à l'infini que le dénominateur, le numérateur l'emporte et le rapport tend vers l'infini. Si les deux vont vers l'infini à la même vitesse, le rapport tend vers une constante.

Dans une telle forme d'indétermination, il faut mettre en évidence la plus grande puissance de x au numérateur et au dénominateur. On peut ensuite simplifier, ce qui revient à comparer les « vitesses » du dénominateur et du numérateur.

Forme « $\infty - \infty$ »

Comme dans la section précédente, une telle forme est indéterminée car la limite à évaluer peu donner des résultats différents selon la « vitesse » a laquelle les termes vont à l'infini. Considérons les trois limites suivantes :

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - x^2 \qquad \lim_{x\to\infty} x^2 - x^2 \qquad \lim_{x\to\infty} x^2 - x^3.$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - x^2 = \lim_{x\to\infty} x^3(1 - 1/x) = \infty(1-0) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} x^2 - x^2 = \lim_{x\to\infty} 0 = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} x^2 - x^3 = \lim_{x\to\infty} x^3(1/x - 1) = -\infty(0-1) = -\infty$$

On ne peut donc pas déterminer la valeur d'une limite uniquement sachant qu'elle est de la forme « $\infty - \infty$ ». Il faut transformer algébriquement la fonction pour pouvoir évaluer la limite.

Exemple 6.7.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = \frac{1}{(0^+)^2} - \frac{1}{(0^+)^3} = \infty - \infty$$

Pour lever l'indétermination, on met au dénominateur commun.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x^3} \\
&= \frac{(0)-1}{(0^+)^3} \\
&= \frac{-1}{0^+} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Noter que la mise au dénominateur commun est la clef pour évaluer cette limite.

Autres formes indéterminées Les formes

$$0 \cdot \infty \qquad 1^\infty \qquad \infty^0 \qquad 0^0$$

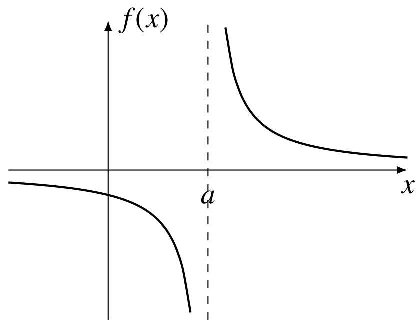
sont toutes indéterminée. Elles seront étudiées de manière détaillée avec l'introduction de la *Règle de l'Hospital* permettant de lever ce type d'indétermination plus facilement. La stratégie consiste à transformer les fonctions dont les limites donnent une de ces formes indéterminées en fonctions où les formes indéterminées sont « $\frac{0}{0}$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

6.2 Limites et asymptotes

6.2.1 Asymptotes verticales

Définition 6.3. Une fonction réelle f a comme **asymptote verticale** la droite $x = a$ si

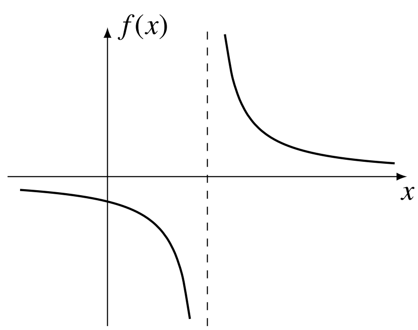
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$



De manière générale, une fonction de la forme $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ peut avoir une asymptote verticale quand $g(x) = 0$, c'est-à-dire pour les valeurs de x où il y a une division par zéro. Il n'y a pas toujours une asymptote verticale quand il y a division par zéro, mais c'est l'endroit où les chercher !

Exemple 6.8. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ a une asymptote verticale en $x = 2$ car

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$



Une fonction peut avoir plusieurs asymptotes verticales.

Exemple 6.9. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$ a une asymptote verticale en $x = 2$

et en $x=3$ car

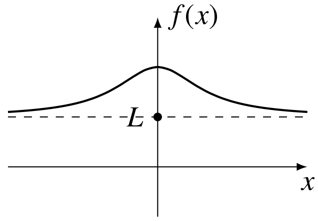
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{(0^+)(-1)} = \frac{1}{(0^-)} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{(1)(0^+)} = \frac{1}{(0^+)} = \infty.$$

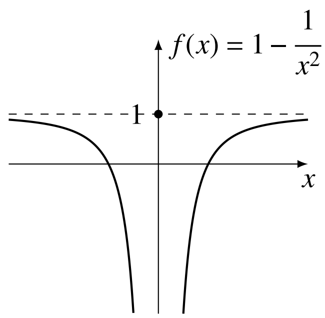
6.2.2 Asymptotes horizontales

Définition 6.4. Une fonction réelle f a comme **asymptote horizontale** la droite $y=L$ si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \text{ ou } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$



Exemple 6.10. Soit $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.



Déterminons algébriquement si f une asymptote horizontale.

$$\lim_{x\to\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{\infty^2} = 1 - 0 = 1$$

La droite $y=1$ est donc une asymptote horizontale de la fonction f.

Exemple 6.11. Déterminons si $f(x) = \dfrac{x^2-3x-4}{3x^2+2}$ a une asymptote horizontale.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x-4}{3x^2+2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}} \\
&= \frac{1-\frac{3}{\infty}-\frac{4}{\infty^2}}{3+\frac{2}{\infty^2}} \\
&= \frac{1-0-0}{3+0} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

La droite $y = 1/3$ est donc une asymptote horizontale de la fonction f.

Il y a généralement des asymptotes horizontale dans un quotient de fonction quand les deux fonctions sont « de même force » ou du même ordre quand $x \to \pm\infty$, ce qui fait en sorte que la limite du quotient ait une valeur $k \in \mathbb{R}$.

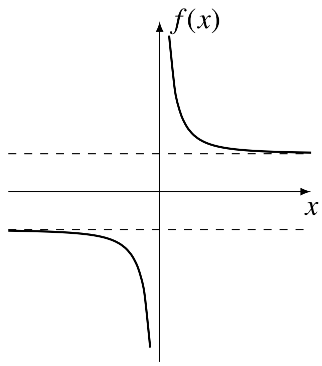
Note : f peut avoir deux asymptotes horizontales différentes, une quand $x \to \infty$ et une autre quand $x \to -\infty$.

Exemple 6.12. La fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ a deux asymptotes horizontales différentes.

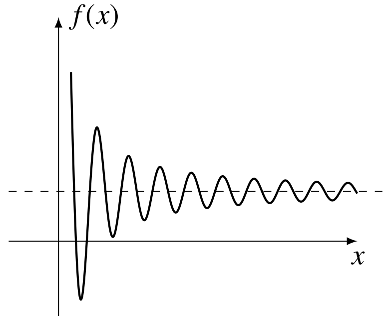
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\\
&= \sqrt{1+\frac{1}{\infty^2}}\\
&= \sqrt{1+0}\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\\
&= -\sqrt{1+\frac{1}{(-\infty)^2}}\\
&= -\sqrt{1+0}\\
&= -1
\end{aligned}$$

Les droites $y=1$ et $y=-1$ sont donc toutes deux des asymptotes horizontales de la fonction f. Voici le graphe de f.



Remarque 6.2. Une erreur fréquente est de penser qu'une asymptote est une droite de laquelle se rapproche une fonction *sans jamais la croiser*. Cette conception est erronée. Par exemple, pour la fonction suivante



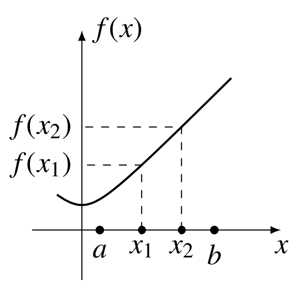
la droite $y = 1$ est une asymptote horizontale, même si la fonction croise une infinité de fois l'asymptote !

Pour information, la fonction dans cet exemple est $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} + 1$.

6.3 Croissance et extrémums

Définition 6.5. La fonction f est **croissante** sur $[a,b]$ si pour tout x_1 et x_2 dans l'intervalle $[a,b]$,

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

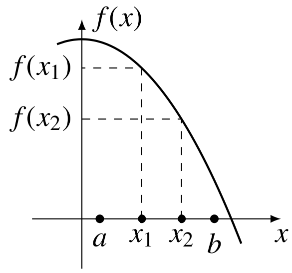


$f(x)$ est strictement croissante sur $[a,b]$ si pour tout x_1 et x_2 dans $[a,b]$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

La fonction f est **décroissante** sur un intervalle fermé $[a,b]$ si pour tout x_1 et x_2 dans l'intervalle $[a,b]$,

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$



$f(x)$ est strictement croissante sur $[a,b]$ si pour tout x_1 et x_2 dans $[a,b]$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Exemple 6.13. Pour illustrer l'utilisation de cette définition pour vérifier qu'une fonction est croissante sur une intervalle, montrons que $f(x) = x^2$ est croissante sur $[0,\infty[$.

Prenons deux nombres réels $x_1 < x_2$. On doit montrer que $f(x_1) \leq f(x_2)$, c'est à dire que $x_1^2 \leq x_2^2$.

$$x_1^2 \leq x_2^2 \iff x_2^2 - x_1^2 \geq 0 \iff (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \geq 0$$

Or, $x_1 < x_2$ implique que $x_2 - x_1 > 0$. De plus, comme $x_1, x_2 \geq 0$, (car ils sont dans l'intervalle $[0,\infty[$), on a aussi que $x_2 + x_1 \geq 0$.

Le résultat suivant

Définition 6.6. Une fonction réelle f a un **maximum global** en $x = a$ si $f(a) \geq f(x)$ pour tout x dans le domaine de f.

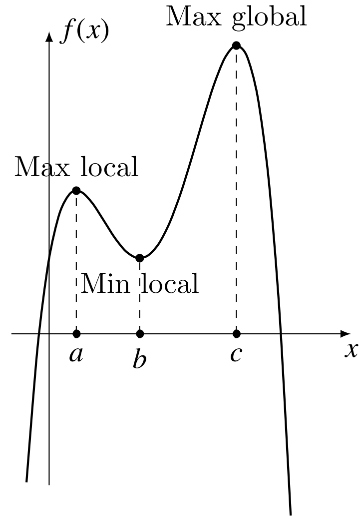
Une fonction réelle f a un **minimum global** en $x = a$ si $f(a) \leq f(x)$ pour tout x dans le domaine de f.

Définition 6.7. Une fonction réelle f a un **maximum local** en $x = a$ si $f(a) \geq f(x)$ pour tout x assez près de a (c'est à dire dans un intervalle ouvert $]c,d[$ contenant a).

Une fonction réelle f a un **minimum local** en $x = a$ si $f(a) \leq f(x)$ pour tout x

assez près de a (c'est à dire dans un intervalle ouvert $]c,d[$ contenant a).

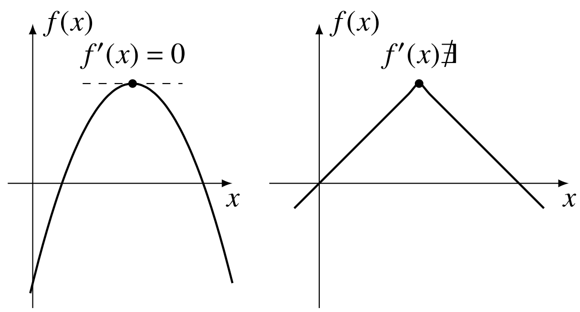
Exemple 6.14. La fonction suivante a un maximum global (qui est aussi un maximum local) en $x = c$ et un max local (qui n'est pas global) en $x = a$. Elle a aussi un minimum local en $x = b$, mais aucun minimum global.



Définition 6.8. Une valeur critique c de la fonction f est un nombre c dans le domaine de f tel que

$$f'(c) = 0 \text{ ou } f'(c)\nexists.$$

Théorème 6.2. (Fermat généralisé) Si $f(x)$ a un minimum ou un maximum local en $x = c$, alors c est une valeur critique de f.



Rappel 6.1.

$$AB = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

$$\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \text{ et } B \neq 0.$$

Exemple 6.15. Déterminons les maximums et les minimums locaux de la fonction

$$f(x) = \frac{(x-1)}{x^2-1}.$$

On détermine les valeurs critiques de f.

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)-(x-1)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2+2x-1}{(x^2-1)^2} = \frac{-(x-1)^2}{(x^2-1)^2}$$

On trouve les zéro de f' :

$$f'(x) = 0 \iff \frac{-(x-1)^2}{(x^2-1)^2} = 0 \iff -(x-1)^2 = 0 \iff x = 1.$$

Mais si $x = 1$, le dénominateur s'annule : $(x^2-1) = 0$. La fonction f' n'a donc pas de zéros.

On trouve les valeurs de x où f' n'est pas définie.

$$f'(x)\nexists \iff \frac{-(x-1)^2}{(x^2-1)^2}\nexists \iff x^2-1 = 0 \iff x = 1.$$

La seule valeur critique de f est $x = 1$.

Exemple 6.16. Déterminons les maximums et les minimums globaux de la fonction

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x + 1.$$

On commence par trouver les valeurs critiques de f.

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -1.$$

$f'(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, il n'y a donc pas de point critique où $f'(x)\nexists$.

On fait un tableau de signe pour $f'(x)$ pour déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de $f(x)$. Notons que $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, ce qui facilite la détermination du signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-1		3		∞
$(x+1)$		-	0	$+$	$+$	$+$	
$(x-3)$		-	-	-	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	∞

La dérivée peut s'annuler à un point qui n'est ni un maximum, ni un minimum. On appelle un tel point un **point stationnaire**.

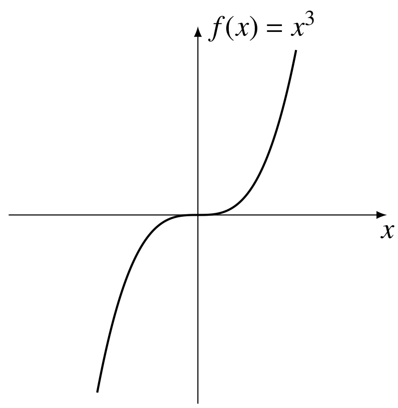
Exemple 6.17. Déterminons maximums et minimums de $f(x) = x^3$.

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Il n'y a aucun point où $f'(x)\nexists$.

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x) = 3x^2$	∞	$+$	0	$+$	∞
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	STA	$\nearrow$	∞

$f(x)$ a un point stationnaire en $x = 0$.



A

Exemple 6.18. On analyse la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-1}.$$

Le domaine de la fonction est $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$.

On a que

$$f'(x) = \frac{(2x-1)-2(x-1)}{(2x-1)^2} = \frac{1}{(2x-1)^2}.$$

Ainsi il est impossible que $f'(x) = 0$ puisque le numérateur est 1. Mais il y a une division par 0 quand $x = 1/2$. Donc la dérivé n'existe pas si $x = 1/2$; cette valeur est une valeur critique.

On a aussi que $\frac{1}{(2x-1)^2} \geq 0$.

Il y a une asymptote verticale en $x = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \to (\frac{1}{2})^+} \frac{x-2}{2x-1} = \frac{-3/2}{0^+} = -\infty$$

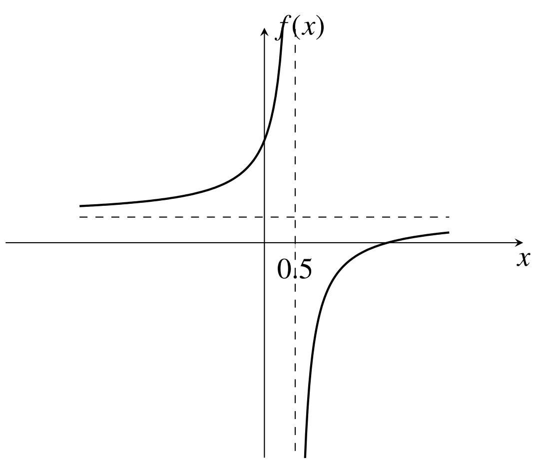
$$\lim_{x \to (\frac{1}{2})^-} \frac{x-2}{2x-1} = \frac{-3/2}{0^-} = +\infty$$

Il y a une asymptote horizontale en $x = 1/2$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{2x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x(1-2/x)}{x(2-1/x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{(1-2/x)}{(2-1/x)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-2}{2x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x(1-2/x)}{x(2-1/x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(1-2/x)}{(2-1/x)} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		$1/2$		∞
$\frac{1}{(2x-1)^2}$		$+$	$\nexists$	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\nexists$:AV	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$



Il est aussi possible que $f'(x) = \pm\infty$.

Exemple 6.19. Analysons la croissance et la décroissance de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

La dérivée de f est $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \text{ n'a pas de solution.}$$

Il y a une seule valeur de x où $f'(x)\nexists$: en $x = 0$.

La seule valeur critique est donc $x = 0$.

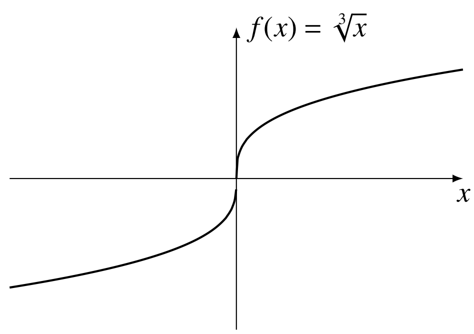
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0^+)^2}} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0^-)^2}} = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0^+)^2}} = \infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0^-)^2}} = \infty$$

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$	∞	$+$	∞	$+$	∞
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	T.V.	$\nearrow$	∞



Chapitre 7

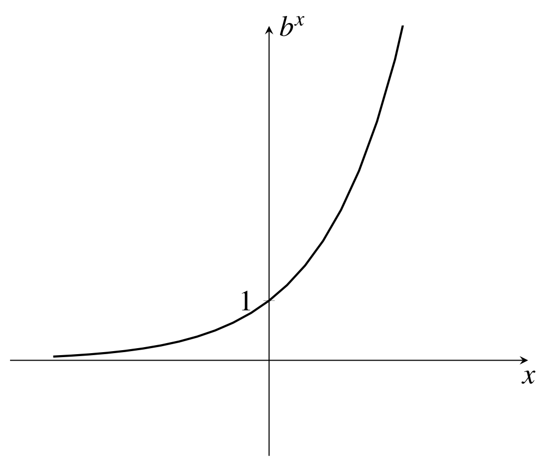
Fonctions exponentielle et logarithme et leurs dérivées

7.1 Fonctions exponentielles et logarithmiques

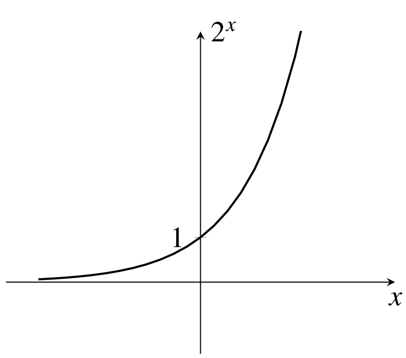
Définition 7.1. La **fonction exponentielle à base** b est définie par

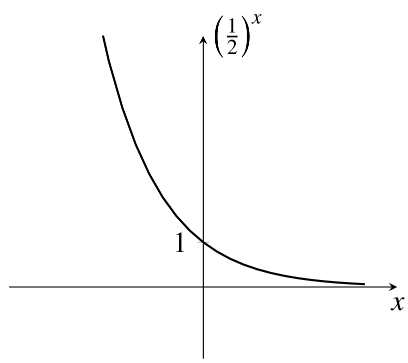
$$f(x) = b^x,$$

où $b > 0$, $b \neq 1$.



C'est une fonction croissante si $b > 1$ et décroissante si $b < 1$.





Proposition 7.1. Une fonction exponentielle de la forme b^x est toujours strictement positive :

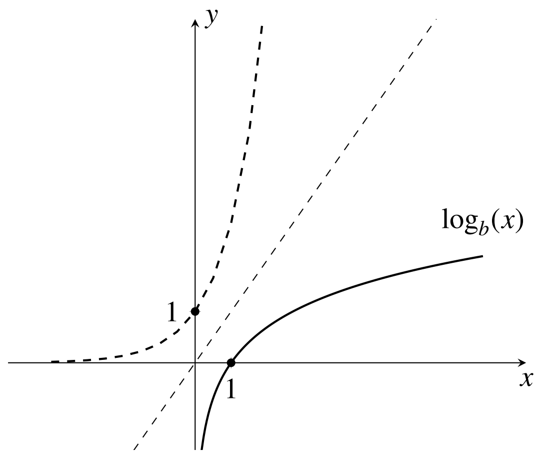
$$b^x > 0 \text{ pour tout } x.$$

Définition 7.2. La fonction logarithme à base b est la fonction inverse de l'exponentielle à base b ; elle est définie par

$$\log_b(x) = y \iff b^y = x.$$

La fonction logarithme est définie uniquement pour $x > 0$.

Le graphe de la fonction logarithmique à base b est la réflexion par la droite $y = x$ du graphe de la fonction b^x. On note que le point $(0,1)$ du graphe de la fonction exponentielle devient un zéro du graphe de la fonction logarithme : le point $(1,0)$. De plus, l'asymtote horizontale de e^x devient une une asymptote verticale de $\ln(x)$.



Proposition 7.2. La fonction logarithme de la forme $\log_b(x)$ est positive si $x > 1$ et négative si $0 < x < 1$.

7.1.1 Limites et fonctions exponentielles et logarithmiques

Proposition 7.3. Les fonctions exponentielles et logarithmiques sont continues partout où elles sont définie.

Si $1 < b$, alors

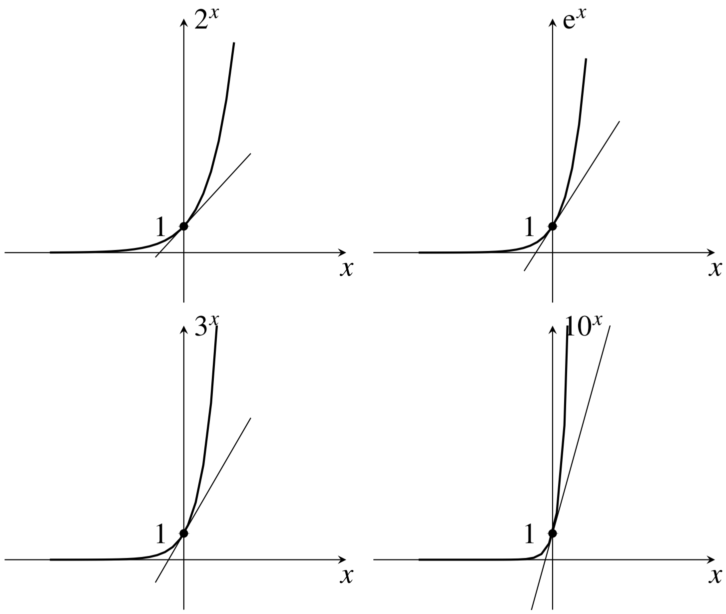
$$\lim_{x\to\infty} b^\infty = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} b^x = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \log_b(x) = \log_b(\infty) = \infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_b(x) = \log_b(0^+) = -\infty$$

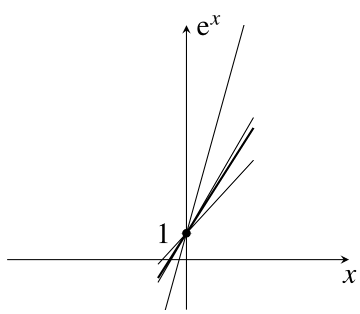
$$\lim_{x\to 0^-} \log_b(x) = \log_b(0^-)\nexists \qquad \lim_{x\to 0} \log_b(x)\nexists$$

7.2 La constante d'Euler

Si on change la base d'une fonction exponentielle, la pente de la tangente en $x = 0$ varie.

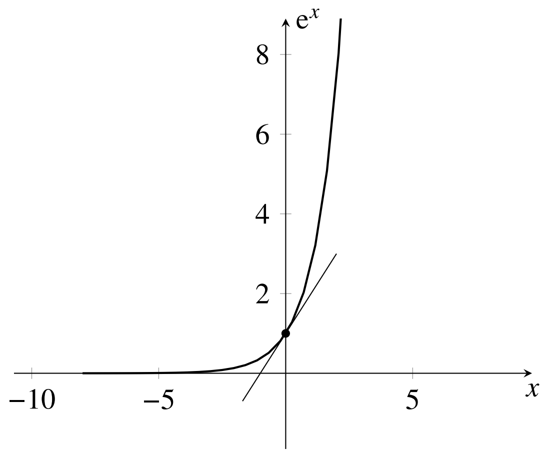


Pour comparer les trois tangentes, voici un graphique où elles sont superposées.



Définition 7.3. La **constante d'Euler** e est la base la fonction exponentielle $f(x) = \mathrm{e}^x$ telle que la pente au point $(0,1)$ du graphe de f soit 1.

Autrement dit, la constante d'Euler est telle que $(\mathrm{e}^x)'\big|_{x=0} = 1$.



Note 7.1. Plusieurs ouvrages utilisent la notation « $\exp(x)$ pour dénoter e^x. Les deux notations sont équivalentes :

$$\exp(x) = e^x.$$

7.2.1 Autres définitions équivalentes

Les résultats qui suivent pourraient être pris comme définition de e^x. Nous ne démontrerons pas dans ces notes l'équivalence entre ces différentes définitions de e^x mais nous croyons qu'elles illustrent bien la richesse de cette fonction.

À l'aide d'une limite :

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Cette définition a pour conséquence que la constante d'Euler e peut être calculée à l'aide de la limite suivante :

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

On peut constater à quelle « vitesse » cette suite converge :

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$\approx$
1	2	2.00000000000000
2	$\frac{9}{4}$	2.25000000000000
3	$\frac{64}{27}$	2.37037037037037
4	$\frac{625}{256}$	2.44140625000000
5	$\frac{7776}{3125}$	2.48832000000000
6	$\frac{117649}{46656}$	2.52162637174211
7	$\frac{2097152}{823543}$	2.54649969704071
8	$\frac{43046721}{16777216}$	2.56578451395035
9	$\frac{1000000000}{387420489}$	2.58117479171320
10	$\frac{25937424601}{10000000000}$	2.59374246010000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	$\vdots$	2.70481382942153
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1000	$\vdots$	2.71692393223589
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
∞	e	e

À l'aide d'une *série de Taylor* (vue en calcul intégral) :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

En posant $x = 1$, on obtient :

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

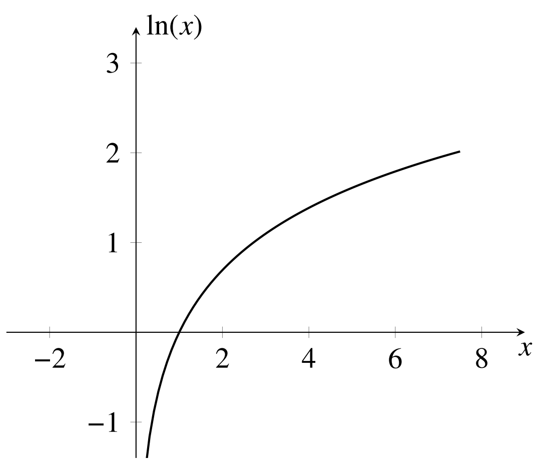
Le tableau de convergence suivant montre que cette série donne beaucoup plus rapidement des approximation précises.

n	$1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots$	$\approx$
0	1	1.00000000000000
1	2	2.00000000000000
2	$\frac{5}{2}$	2.50000000000000
3	$\frac{8}{3}$	2.66666666666667
4	$\frac{65}{24}$	2.70833333333333
5	$\frac{163}{60}$	2.71666666666667
6	$\frac{1957}{720}$	2.71805555555556
7	$\frac{685}{252}$	2.71825396825397
8	$\frac{109601}{40320}$	2.71827876984127
9	$\frac{98641}{36288}$	2.71828152557319
10	$\frac{9864101}{3628800}$	2.71828180114638
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	$\vdots$	2.71828182845905
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1000	$\vdots$	2.71828182845905
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
∞	e	e

7.3 Logarithme naturel

Définition 7.4. Le **logarithme naturel** est la fonction inverse de l'exponentielle à base e.

$$e^x = y \iff \ln(y) = x$$

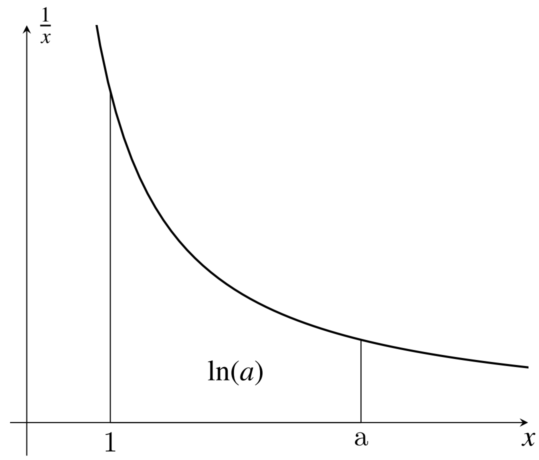


Proposition 7.4. Le logarithme naturel est une fonction logarithme qui a toutes les propriétés des logarithmes, notamment les propriétés suivantes :

$$\ln(e) = 1 \qquad \ln(e^x) = x \qquad e^{\ln(x)} = x.$$

7.3.1 Définition alternative de logarithme naturel

La première définition historique de $\ln(a)$, est l'aire entre le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et l'axe des x comprise entre $x = 1$ et $x = a$.



La fonction $\ln(x)$ a été définie de cette manière car elle permet de transformer les produits en somme par la propriété

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B).$$

Cette propriété est très utile pour simplifier le calcul de produits : au lieu de calculer le produit de AB,on calcule la somme de $\ln(A)$ et $\ln(B)$, ce qui est beaucoup plus facile, surtout si on a sous la main une table de logarithme comme celle calculée par Nepier.

Exemple 7.1. Supposons que l'on veut calculer le produit de 81237.21 par 74923.38 avec l'algorithme usuel de multiplication. En consultant une table de logarithmes Neperiens, on trouve

$$\ln(81237.21) \approx 11.30513 \qquad \ln(74923.38) \approx 11.22422.$$

En additionnant :

$$\ln(81237.21) + \ln(74923.38) \approx 11.30513 + 11.22422 = 22.52935.$$

On retourne dans la table de logarithme pour déterminer quel nombre a 22.52935 comme logarithme. On trouve

$$6086566703.45156.$$

Multiplier les nombres donne

$$6086566354.96980$$

L'erreur relative est infime : moins de 0.0000006 % !

Pour bien comprendre à quel point cette technique facilite les calculs, tenter de multiplier les nombres sans calculatrice, ensuite tenter le même calcul en additionnant les logarithmes.

Comment Napier a-t-il pu calculer la première table de logarithmes ? Il a utilisé différents trucs, mais particulièrement l'identité

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots$$

elle même déduite d'une identité connue bien avant Napier

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

Remarquez que si on dérive de chaque côté cette dernière égalité, on obtient celle pour $\ln(x-1)$!

Note 7.2. Avant la création les logarithmes, on utilisait la même idée pour simplifier les calculs (transformer les produits en sommes), mais en utilisant des identités trigonométriques telles que

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{2}$$

qui permet de transformer le produit (à gauche) en deux sommes, une différent et une division par 2 (à droite), en supposant que l'on dispose de tables des valeurs de sinus et cosinus !

7.4 Dérivé des fonctions exponentielles

Proposition 7.5. La dérivée de la fonction $y = e^x$ est donnée par

$$(e^x)' = e^x.$$

Démonstration. (À l'aide de différentielles)

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} \\
&= \frac{e^x e^{dx} - e^x}{dx} \\
&= e^x \frac{e^{dx} - 1}{dx} \\
&= e^x \frac{e^{dx} - e^0}{dx}. \\
&= e^x \frac{dy}{dx} \; x = 0.
\end{aligned}$$

Comme on suppose que la pente de la tangente à la courbe $y = e^x$ en $x = 0$ est 1 et que cette pente est par définition

$$\frac{e^{dx} - e^0}{dx},$$

on a que quand dx devient petit,

$$\frac{dy}{dx} = e^x. \qquad \square$$

Démonstration. (preuve avec la définition de dérivée à l'aide de limites) Soit $f(x) = e^x$. On a alors que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x e^\Delta x - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \left(e^\Delta x - 1\right)}{\Delta x} \\
&= e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^\Delta x - 1}{\Delta x} \\
&= e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x} \\
&= e^x f'(0)
\end{aligned}$$

Comme e est la base telle que $f'(0) = 1$, on doit avoir que $(e^x)' = e^x$. $\square$

Proposition 7.6.

$$(b^x)' = b^x \ln(b)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
(b^x)' &= \left(e^{\ln(b^x)}\right)' \\
&= \left(e^{x \ln(b)}\right)' \\
&= e^{\ln(b^x)}(\ln(b)) \\
&= b^x \ln(b)
\end{aligned} \qquad \square$$

Exemple 7.2.

$$\left(e^{2x}\right)' = e^{2x}(2x)' = 2e^{2x}.$$

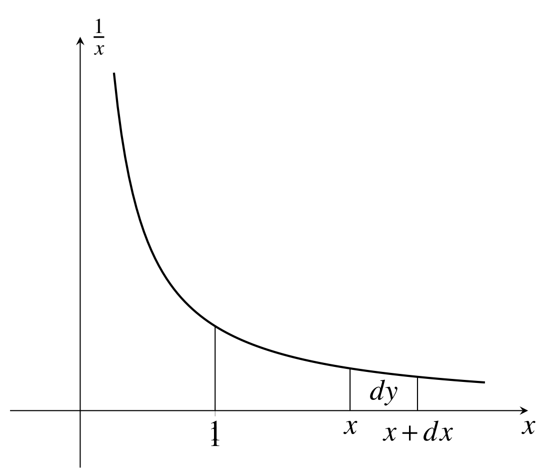
Exemple 7.3.
$$\left(2^{2x}\right)' = 2^{2x}\ln(2)(2x)' = 2\ln(2)2^{2x}.$$

Exemple 7.4.
$$\begin{aligned}\left(\frac{x^4}{3^{2x}}\right)' &= \frac{4x^3 3^{2x} - x^4 3^{2x}\ln(3)(2)}{(3^{2x})^2}\\ &= \frac{2x^3 3^{2x}(2-\ln(3)x)}{(3^{2x})^2}.\\ &= \frac{2x^3(2-\ln(3)x)}{3^{2x}}.\end{aligned}$$

7.5 Dérivée des fonctions logarithmiques

Proposition 7.7. La dérivée du logarithme naturel est donnée par
$$\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}.$$

Démonstration. (À l'aide de différentielles). Si $y = \ln(x)$ est l'aire sous la courbe $y = \frac{1}{x}$, alors
$$dy = \ln(x+dx) - \ln(x)$$
est l'aire représentée dans le graphe suivant :



Quand dx est très petit, l'aire de la région dy entre les valeurs x et $x+dx$ est approximativement celle du rectangle de base dx et de hauteur $1/x$.
$$dy \approx \frac{1}{x}dx.$$

On a donc que
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$
□

Démonstration. Si on connait la dérivée de e^x, alors on trouve la dérivée de $\ln(x)$ par dérivation implicite.

$$\begin{aligned} e^{\ln(x)} &= x \\ \left(e^{\ln(x)}\right)' &= \left(x\right)' \\ e^{\ln(x)}\left(\ln(x)\right)' &= 1 \\ x\left(\ln(x)\right)' &= 1 \\ \left(\ln(x)\right)' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

□

Cette dernière preuve peut être généralisée à n'importe quelle paire de fonctions inverses.

Proposition 7.8. Si g est la fonction inverse de f, c'Est à dire si

$$g(f(x)) = x \text{ et } f(g(x)) = x,$$

alors

$$(g(y))' = \frac{1}{f'(x)}.$$

En utilisant la notation différentielle avec $y = f(x)$ et $x = g(y)$, on a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.$$

Démonstration. Supposons que g est la fonction inverse de f, c'est à dire que $g(f(x)) = x$ et que $f(g(y)) = y$. En dérivant à l'aide de la règle de chaine, on trouve que

$$\begin{aligned} g(f(x))) &= x \\ (g(f(x)))' &= (x)' \\ g'(f(x))f'(x) &= 1 \\ g'(y) &= \frac{1}{f'(x)} \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{dx/dy} \end{aligned}$$

□

Exemple 7.5. Considérons la fonction définie par $f(x) = x^3$ et son inverse $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Comme la dérivée de f est

$$f'(x) = 3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2,$$

on a, par la proposition précédente, que

$$g'(x) = \frac{1}{3x^2}.$$

On peut vérifier ce résultat en dérivant directement $g(x)$:

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}x^{-2}3 = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Démonstration. Preuve directe en utilisant la définition de e.

$$\begin{aligned}
\left(\ln(x)\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{x}\ln\left(\left(1+\frac{1}{x/\Delta x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right) \\
&= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0} \ln\left(\left(1+\frac{1}{x/\Delta x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right) \\
&= \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty} \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right) \\
&= \frac{1}{x}\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right) \\
&= \frac{1}{x}\ln(\mathrm{e}) \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

□

Proposition 7.9.

$$\left(\log_b(x)\right)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln(b)}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
(\log_b(x))' &= \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)}\right)' \\
&= \frac{1}{\ln(b)}(\ln(x))' \\
&= \frac{1}{\ln(b)}\frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x\ln(b)}
\end{aligned}$$

□

Exemple 7.6.

$$\left(\ln(-x^2+x+1)\right)' = \frac{1}{-x^2+x+1}(-x^2+2+1)' = \frac{-2x+1}{-x^2+x+1}$$

Exemple 7.7.

$$\left(x^3\ln(2x)\right)' = 3x^2\ln(2x) + x^3\frac{2}{2x} = x^2(3\ln(2x)+1)$$

7.6 Analyse de fonctions comportant des fonctions exponentielles ou logarithmiques

Exemple 7.8. Analyse de la fonction $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

Domaine : $\mathbb{R}$ car $x\mathrm{e}^x$ est toujours défini.

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x$$

Valeurs critiques : $f'(x) = 0 \iff (x+1) = 0$ ou $\mathrm{e}^x = 0$. $x = -1$ est la seule solution car $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout x.

$f'(x)$ existe toujours.

$$f''(x) = \mathrm{e}^x + (1+x)\mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x$$

Valeurs critiques : $f''(x) = 0$ si $x = -2$, $f''(x)$ existe toujours.

x		-2		-1	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	INF	↘	MIN	↗

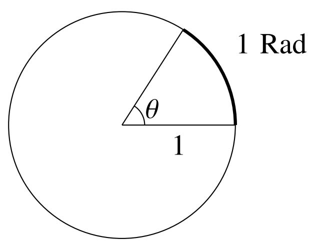
Chapitre 8

Dérivée des fonctions trigonométriques

8.1 Rappels sur les fonctions trigonométriques

8.1.1 Le radian

Le **radian** (Rad) est une mesure d'angle où un angle est mesuré en longueur d'arc sur la circonférence de cercle de rayon 1.



Comme la circonférence d'un cercle de rayon 1 correspond à un arc d'un tour complet, un angle θ de 2π Rad correspond à un angle de 360 degrés ou d'un tour.

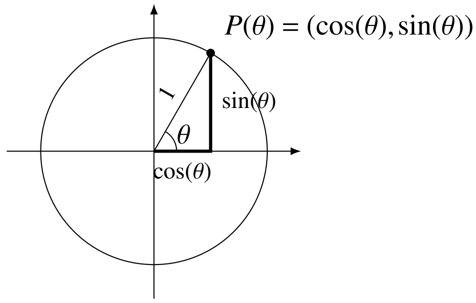
$$\frac{\theta \text{ Rad}}{2\pi \text{ Rad}} = \frac{\theta \text{ Deg}}{360 \text{ Deg}} = \frac{\theta \text{ Tour}}{1 \text{ Tour}}$$

Ces proportions servent à convertir la mesure d'un angle d'une unité à une autre.

8.1.2 Les fonctions trigonométriques

Afin de pouvoir définir les fonctions trigonométrique pour tout angle possible $\theta \in \mathbb{R}$, on doit exprimer la définition à l'aide du *cercle trigonométrique*.

Définition 8.1. Les fonctions $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont définies comme les coordonnées en x et en y du point situé sur la circonférence d'un cercle de rayon 1 à l'angle θ.



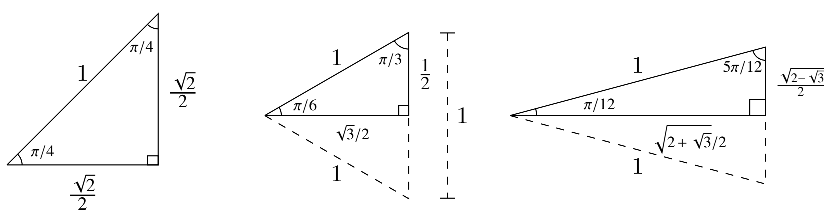
En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient l'importante identité trigonométrique suivante :

Proposition 8.1.
$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

Notons que l'on utilise ici une convention de notation très répandue : pour simplifier un peu l'écriture, on écrit $\sin^2(x)$ au lieu de $\left(\sin(x)\right)^2$ et $\cos^2(x)$ au lieu de $\left(\cos(x)\right)^2$. On utilisera une convention similaire pour toute les autres fonctions trigonométriques.

8.1.3 Triangles comportant des angles usuels

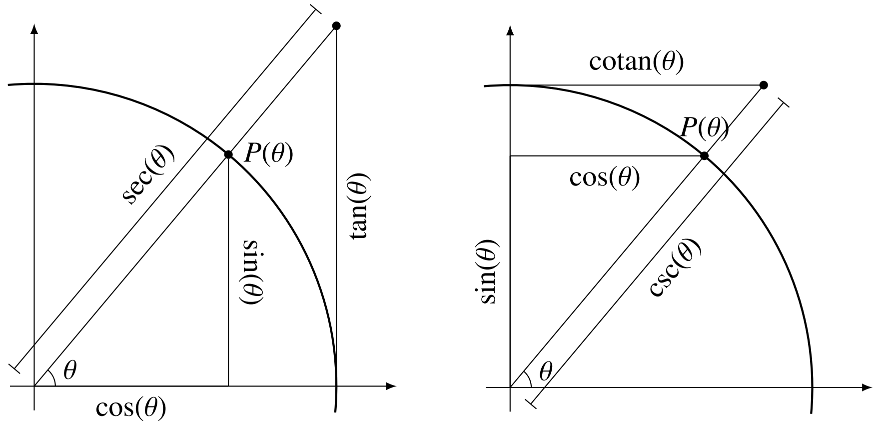
Pour le calcul des valeurs de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$, on utilise les grandeurs des côtés de certains triangles remarquables, pour lesquel il est possible de déterminer les longueurs des côtés géométriquement, à l'aide de la relation de Pythagore, de la loi des cosinus ou d'autres astuces géométriques.



Définition 8.2. Les fonctions trigonométriques tangente, sécante, cosécante et cotangante sont définie à partir des fonctions sinus et cosinus de la manière suivante.

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \qquad \text{cotan}(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\tan(\theta)}$$
$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \qquad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

Ces différentes fonctions trigonométriques correspondent aux mesures suivantes.



Hypothèse 7. *Les fonctions trigonométriques sont continues partout où elles sont définies.*

Proposition 8.2. Toutes les fonctions trigonométriques sont périodiques de période 2π.

Proposition 8.3.

$$\lim_{\theta\to\pm\infty}\sin(\theta)\nexists \qquad \lim_{\theta\to\pm\infty}\cos(\theta)\nexists$$

et de même pour toutes les fonctions trigonométriques.

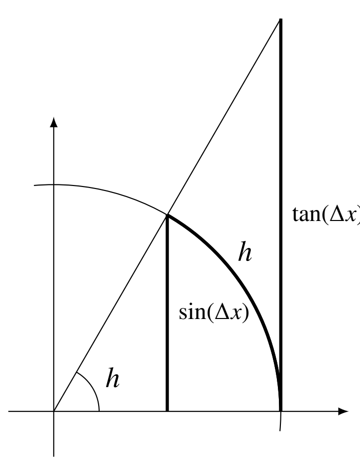
8.2 Dérivée des fonctions trigonométriques

Lemme 8.1.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}=1.$$

Démonstration. Par définition des fonctions trigonométrique et par les relation géométriques entre les longueurs auxquelles elles correspondent, on a que

$$\sin(\Delta x)\leq \Delta x\leq \tan(\Delta x).$$



En divisant par $\sin(\Delta x)$ on obtient :

$$\frac{\sin(\Delta x)}{\sin(\Delta x)} \leq \frac{\Delta x}{\sin(\Delta x)} \leq \frac{\tan(\Delta x)}{\sin(\Delta x)},$$

Ce qui donne, en simplifiant,

$$1 \leq \frac{\Delta x}{\sin(\Delta x)} \leq \cos(\Delta x).$$

Si on inverse chaque membre de ces inégalités, on trouve que

$$1 \leq \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \leq \frac{1}{\cos(\Delta x)}.$$

En prenant la limite quand $\Delta x \to 0$ des membres de droite et de gauche de la chaine d'inégalité :

$$\lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1 \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cos(\Delta x)} = \frac{1}{\cos(0)} = 1$$

donc, par la propriété des gendarmes (thm du sandwich), le membre central doit avoir la même limite :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1$$

□

Note : ce résultat justifie l'approximation $\sin(x) \approx x$ quand x est petit. Cette approximation est souvent utilisé en physique, par exemple pour obtenir l'importante équation décrivant le mouvement et la propagation des ondes.

Lemme 8.2.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} = 0$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} \frac{\cos(\Delta x) + 1}{\cos(\Delta x) + 1} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos^2(\Delta x) - 1}{\Delta x} \frac{1}{\cos(\Delta x) + 1} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin^2(\Delta x)}{\Delta x} \frac{1}{\cos(\Delta x) + 1} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \frac{-\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x) + 1} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x) + 1} \\
&= (1)\left(\frac{0}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Théorème 8.1. La dérivée de la fonction sinus est

$$\Big(\sin(x)\Big)' = \cos(x).$$

Démonstration. (avec les différentilles) Soit $y = \sin(x)$. On calcule dy :

$$\begin{aligned}
dy &= \sin(x+dx) - \sin(x) \\
&= (\sin(x)\cos(dx) + \sin(dx)\cos(x)) - \sin(x) \\
&= \sin(dx)\cos(x) + \sin(x)\cos(dx) - \sin(x) \\
&= \sin(dx)\cos(x) + (\sin(x)\cos(dx) - \sin(x)) \\
&= \sin(dx)\cos(x) + \sin(x)(\cos(dx) - 1) \\
&\approx (1)\cos(x) + \sin(x)(0) \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

□

Démonstration. (avec la définition en terme de limites)

$$\begin{aligned}
(\sin(x))' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sin(x)\cos(\Delta x) + \sin(\Delta x)\cos(x)) - \sin(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)\cos(x) + \sin(x)\cos(\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)\cos(x) + (\sin(x)\cos(\Delta x) - \sin(x))}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)\cos(x)}{\Delta x} + \frac{\sin(x)\cos(\Delta x) - \sin(x))}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\cos(x) + \sin(x)\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\cos(x) + \lim_{\Delta x \to 0} \sin(x)\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} \\
&= (1)\cos(x) + \sin(x)(0) \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

□

8.3 Dérivés des autres fonctions trigonométriques

Les dérivées des autres fonctions trigonométriques sont trouvées en utilisant leur définition, des identités algébriques et les formules de dérivation connues.

Proposition 8.4 (Dérivée des fonctions trigonométriques)**.**

(a) $\Big(\cos(x)\Big)' = -\sin(x)$

(b) $\Big(\tan(x)\Big)' = \sec^2(x)$

(c) $\Big(\cot(x)\Big)' = -\csc^2(x)$

(d) $\Big(\sec(x)\Big)' = \sec(x)\tan(x)$

(e) $\Big(\csc(x)\Big)' = -\csc(x)\cot(x)$

Démonstration. Preuve de (a). On utilise les identités $\cos(\theta) = \sin(\theta+\pi/2)$ et $-\sin(\theta) = \cos(\theta+\pi/2)$.

$$\begin{aligned}\Big(\cos(x)\Big)' &= \Big(\sin(x+\pi/2)\Big)' \\ &= \cos(x+\pi/2)(x+\pi/2)' \\ &= \cos(x+\pi/2) \\ &= \cos(x+\pi/2) \\ &= -\sin(x)\end{aligned}$$

Preuve de (b). On utilise la définition de $\tan(x)$ en terme de $\sin(x)$ et $\cos(x)$, ainsi que l'identité $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$.

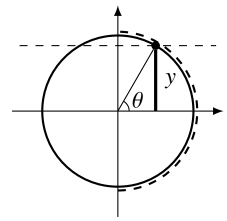
$$\begin{aligned}(\tan(x))' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\ &= \frac{\Big(\sin(x)\Big)'\cos(x) - \sin(x)\Big(\cos(x)\Big)'}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} \\ &= \sec^2(x)\end{aligned}$$

Les preuves des formules de dérivations de $\sec(x)$, $\csc(x)$ et $\text{cotan}(x)$ sont similaires et sont laissées en exercice. □

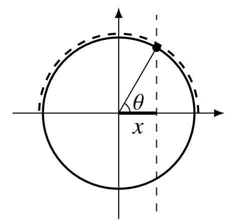
8.4 Rappel sur les fonctions trigonométriques inverses

Définition 8.3.

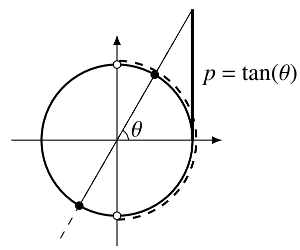
1. $\arcsin(y) = \theta \iff \sin(\theta) = y$, avec $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, $-1 \leq y \leq 1$



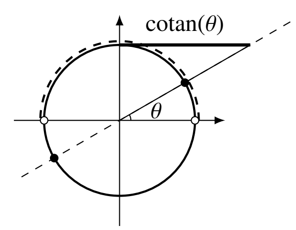
2. $\arccos(x) = \theta \iff \cos(\theta) = x$, avec $0 \leq \theta \leq \pi$ et $-1 \leq x \leq 1$



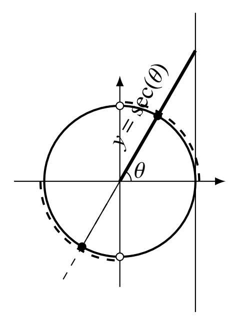
3. $\arctan(p) = \theta \iff \tan(\theta) = p$, avec $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ et $p \in \mathbb{R}$



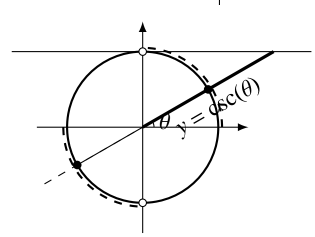
4. $\operatorname{arcctg}(q) = \theta \iff \operatorname{cotan}(\theta) = q$, avec $0 < \theta < \pi$ et $q \in \mathbb{R}$



5. $\operatorname{arcsec}(y) = \theta \iff \sec(\theta) = y$, avec $0 \leq \theta \leq \pi$, $\theta \neq \pi/2$ et $y \geq 1$ ou $y \leq -1$.



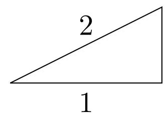
6. $\operatorname{arccosec}(x) = \theta \iff \csc(\theta) = x$, avec $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, $\theta \neq 0$



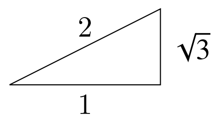
8.5 Dérivation des fonctions trigonométriques inverses

Exemple 8.1. Sachant que $\theta = \arccos(1/2)$, trouver les autres rapports trigonométrique.

Solution : comme $\cos(\theta)$ doit être $1/2$, on peut supposer que θ est un angle dans le triangle suivant (car les valeurs des fonctions trigonométriques restent les même si on change l'échelle d'un triangle.)



Comme le triangle est rectangle, on peut trouver la musure du côté manquant à l'aide du théorème de Pythagore.



À l'aide de ce triangle, on trouve les valeurs des autres fonction trigonométriques :

- $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$
- $\tan(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$
- $\sec(\theta) = \frac{2}{1} = 2$
- $\csc(\theta) = \frac{2}{\sqrt{3}}$
- $\cot(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Exemple 8.2. Déterminer $\sec(\operatorname{asec}(3/4))$.

Proposition 8.5. Dérivée des fonctions trigonométriques inverses.

(1) $\Big(\arcsin(x)\Big)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $\Big(\arccos(x)\Big)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $\Big(\arctan(x)\Big)' = \frac{1}{x^2+1}$

(4) $\Big(\operatorname{arcctg}(x)\Big)' = \frac{-1}{x^2+1}$

(5) $\Big(\operatorname{asec}(x)\Big)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(6) $\Big(\operatorname{arccosec}(x)\Big)' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Démonstration.

Toutes ces preuves se font en utilisant la dérivation implicite et des identités trigonométriques. On suppose que x est dans le domaine des fonctions impliquées.

On utilise aussi les identités de Pythagore suivantes :

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad \sec^2(x) = \tan^2(x) + 1 \qquad \csc^2(x) = \operatorname{cotan}^2(x) + 1.$$

Preuve de $\left(\arcsin(x)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\arcsin(x)\right) &= x \\
\left((\sin(\arcsin(x))\right)' &= (x)' \\
\cos(\arcsin(x))\left(\arcsin(x)\right)' &= 1 \\
\left(\arcsin(x)\right)' &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\
\left(\arcsin(x)\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} \\
\left(\arcsin(x)\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2}} \\
\left(\arcsin(x)\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Preuve de $\left(\arctan(x)\right)' = \dfrac{1}{x^2+1}$:

$$\begin{aligned}
\tan(\arctan(x)) &= x \\
\left(\tan(\arctan(x))\right)' &= (x)' \\
\sec^2(\arctan(x))\left(\operatorname{asec}(x)\right)' &= 1 \\
(\arctan(x))' &= \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))} \\
(\arctan(x))' &= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} \\
(\arctan(x))' &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Preuve de $\left(\operatorname{asec}(x)\right)' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$:

$$\begin{aligned}
\sec(\operatorname{asec}(x)) &= x\\
\left(\sec(\operatorname{asec}(x))\right)' &= (x)'\\
\sec(\operatorname{asec}(x))\tan(\operatorname{asec}(x))\left(\operatorname{asec}(x)\right)' &= 1\\
(\operatorname{asec}(x))' &= \frac{1}{\sec(\operatorname{asec}(x))\tan(\operatorname{asec}(x))}\\
(\operatorname{asec}(x))' &= \frac{1}{x\sqrt{\sec^2(\operatorname{asec}(x))-1}}\\
(\operatorname{asec}(x))' &= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1)}}
\end{aligned}$$

Les autres preuves sont laissées en exercice. On utilise la dérivation implicite dans chacune. □

Exemple 8.3.

$$\begin{aligned}
\left(\arcsin(2x)\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2)}}\left(2x\right)'\\
&= \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}
\end{aligned}$$

Exemple 8.4.

$$\left(\arccos\left(x^3\right)\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}3x^2 = -\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$$

Exemple 8.5.

$$\left((\arctan(\sin(x))\right)' = \frac{1}{\sin^2(x)+1}\cos(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)+1}$$

Exemple 8.6.

$$\left(\arctan(x)^{13}\right)' = 13\arctan(x)^{12}\frac{1}{x^2+1} = \frac{13\arctan(x)^{12}}{x^2+1}$$

Note : $\arctan(x)^{13} = \left(\arctan(x)\right)^{13}$ et non $\arctan(x^{13})$.

Exemple 8.7.

$$\left(\operatorname{arcsec}(x/2)\right)' = \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1}} = \frac{2}{x\sqrt{\frac{x^2}{2} - 1}} = \frac{8}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Exemple 8.8.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\arctan(x)}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{\arctan(x)}}\left(\arctan(x)\right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\arctan(x)}}\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Exemple 8.9. Trouvons les extrémums de $f(x) = \arctan(x^3 - 12x)$.

La dérivée de f est

$$f'(x) = \frac{1}{(x^3-12x)^2+1}(3x^2-12) = \frac{3(x^2-4)}{(x^3-12x)^2+1} = \frac{3(x-2)(x+2)}{(x^3-12x)^2+1}.$$

La dérivée s'annule quand $x = 2$ ou $x = -2$. Le numérateur $(x^3 - 12x)^2 + 1$ étant toujours plus grand que 1, il ne s'annule jamais,

Les valeurs critiques sont donc 2 et -2.

On peut faire un tableau de signe de la dérivée

x		-2		2	
$f'(x)$	$+$	0	-	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

On conclue donc que f a un maximum en $x = -2$ et un minimum en $x = 2$.

Note : on choisit ici de faire un tableau de signe plutôt que d'utiliser le test de la dérivée seconde, car la simplification de dérivée seconde plus complexe que la détermination des signes de la dérivée !