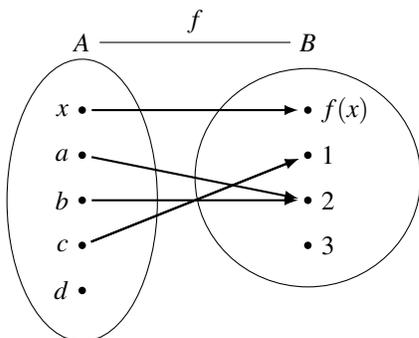


# Résumé : fonctions élémentaires

## Définition d'une fonction

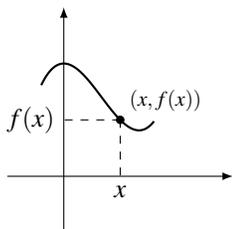
### Notation et représentation graphique

Une fonction est une règle donnant au plus un élément  $f(x)$  d'un ensemble  $B$  associé à chaque élément  $x$  de  $A$ . Notation :  $f : A \rightarrow B$ .



Le plus souvent dans les cours du collégial,  $A$  et  $B$  sont des ensembles de nombres réels ou de vecteurs  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ , etc. Les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont appelées *fonctions réelles*. Les fonctions réelles sont habituellement représentées par leur graphe.

Le graphe d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est l'ensemble des points de la forme  $(x, f(x))$ .



### Domaine

Le domaine d'une fonction  $f : A \rightarrow B$  est l'ensemble des  $x \in A$  où  $f(x)$  est défini. Notation :

$$\text{dom}(f) = \{a \mid f(a) \text{ est défini}\}.$$

Conditions déterminant le domaine des fonctions élémentaires :

$$\frac{A}{B} \text{ défini} \iff B \neq 0$$

$$\sqrt[n]{A} \text{ défini} \iff n \text{ impair ou } n \text{ pair et } A \geq 0$$

$$\log_b(A) \text{ défini} \iff A > 0$$

### Différentes manières de définir une fonction

- Définition par une équation :  $y = x^2$ .
- Définition implicite par une équation :  $x^2 - y = 0$ .
- Définition en donnant l'effet de la fonction  $f(x) = x^2$  ou encore  $x \mapsto x^2$ .

- Définition par parties (ou par morceaux) :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ -x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^3 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

### Évaluation d'une fonction

Si  $f$  est définie par une expression algébrique, comme  $f(x) = x^2 + x + 1$ , on évalue  $f(A)$  en remplaçant toutes les occurrences de  $x$  de l'expression algébrique par  $A$ . Par exemple

$$f(2) = 2^2 + 2 + 1$$

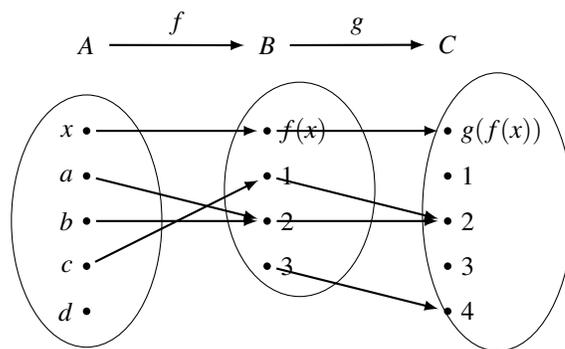
$$f(x+1) = (x+1)^2 + (x+1) + 1$$

$$f(x+h) = (x+h)^2 + (x+h) + 1$$

### Composition de fonctions

Si  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$ , on définit la composition  $f \circ g$  de  $f$  et  $g$  comme la fonction définie en appliquant d'abord  $g$  et ensuite  $f$  :

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$



### Fonctions inverses

Deux fonctions  $f$  et  $g$  sont inverses l'une de l'autre si

$$f \circ g(x) = x \text{ et } g \circ f(x) = x.$$

On dénote la fonction inverse de  $f$  par  $f^{-1}$ .

Les fonctions inverses satisfont l'équivalence

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y).$$

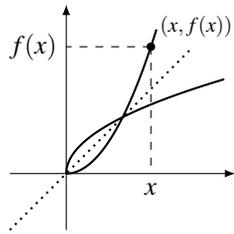
Si  $y = f(x)$ , on trouve donc  $f^{-1}$  en isolant  $x$  en fonction de  $y$  (si cela est possible) et en échangeant les  $x$  pour des  $y$ .

$$y = 2x + 1 \iff x = \frac{y-1}{2}$$

Donc  $f(x) = 2x + 1$  a comme fonction inverse  $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ .

La nouvelle relation trouvée de cette manière n'est pas nécessairement une fonction. Il faut souvent limiter  $f$  sur un domaine adéquat pour que  $f^{-1}$  soit une fonction.

Le graphe de la fonction inverse d'une fonction  $f$  est sa réflexion par la droite  $y = x$  (qui a pour effet d'échanger  $x$  et  $y$ ).



Quelques fonctions inverses ( $C =$  constante)

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

$$y = x + C \iff x = y - C$$

$$y = Cx \iff x = \frac{y}{C}$$

$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y} \quad (x \geq 0)$$

$$y = b^x \iff x = \log_b(y)$$

$$y = e^x \iff x = \ln(x)$$

$$y = \sin(x) \iff x = \arcsin(y) \quad (-\pi/2 \leq x \leq \pi/2)$$

$$y = \cos(x) \iff x = \arccos(y) \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$y = \tan(x) \iff x = \arctan(y) \quad (-\pi/2 < x < \pi/2)$$

## Fonctions polynomiales

### Fonctions linéaires

Forme générale :

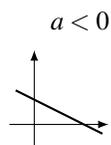
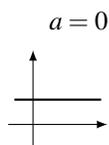
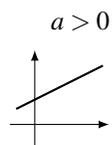
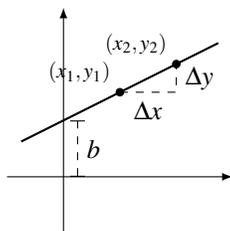
$$f(x) = ax + b$$

Passant par le point  $(x_0, y_0)$  et de pente  $a$  :

$$f(x) = a(x - x_0) + y_0$$

Ordonnée à l'origine :  $b = f(0)$

$$\text{Pente : } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



## Fonctions quadratiques

Forme polynomiale

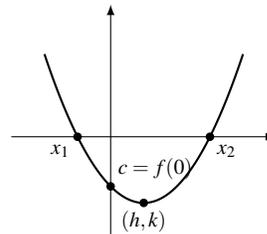
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Forme canonique

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

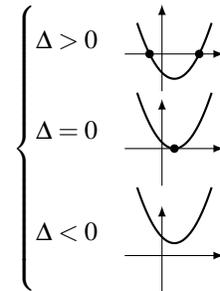
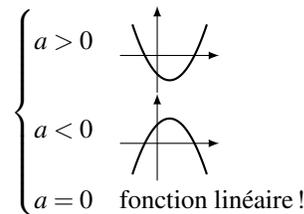
Forme factorisée

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$



Discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$

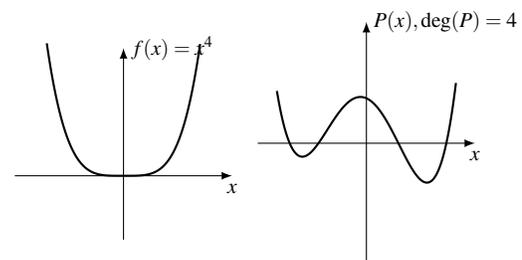
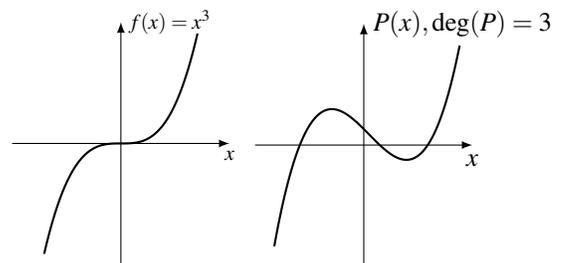
Orientation



Si on connaît trois points différents sur une parabole (en comptant le sommet pour deux), on peut déterminer tous les paramètres (et donc une fonction unique).

### Fonctions polynomiales quelconques

Forme générale :  $f(x) = P(x)$ , où  $P(x)$  est un polynôme. Domaine :  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ .



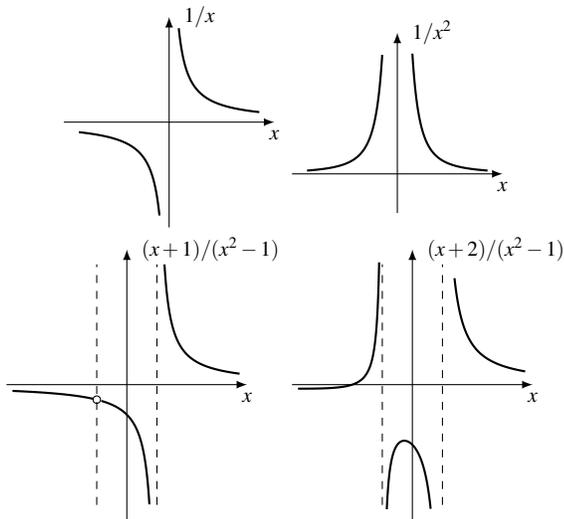
Zéros et extrémums.

- $f(x)$  peut avoir jusqu'à  $\text{deg}(P)$  zéros.
- $f(x)$  peut avoir jusqu'à  $\text{deg}(P) - 1$  extrémums.

## Fonctions rationnelles

Forme générale :  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , où  $P(x)$  et  $Q(x)$  sont des polynômes.  $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$ , asymptote ou discontinuité non essentielle à chaque  $x \notin \text{dom}(f)$ .

Les zéros de  $f(x)$  sont les zéros de  $P(x)$  qui sont dans  $\text{dom}(f)$ .

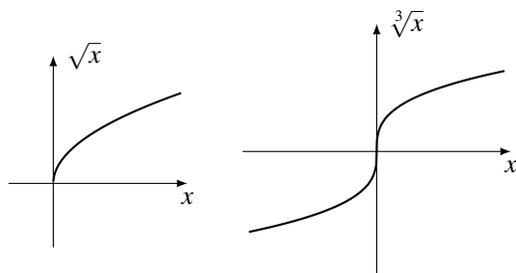


## Fonctions algébriques

Fonctions que l'on peut définir à l'aide des opérations  $+$ ,  $-$ ,  $\times$  et  $\div$ , ainsi que des exposants fractionnaires. Toutes les fonctions rationnelles sont algébriques. Ce sont les fonctions que l'on obtient en isolant  $y$  dans des équations polynomiales de la forme  $P(x, y) = 0$ .

Pour déterminer le domaine d'une fonction algébrique, il faut utiliser les deux faits suivants :

- $\frac{A}{B}$  est défini ssi  $B \neq 0$
- $\sqrt[n]{A}$  est toujours défini si  $n$  est impair, ou est défini ssi  $A \geq 0$  si  $n$  est pair.

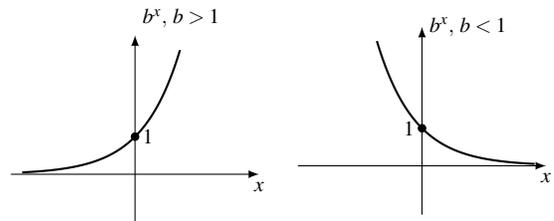


## Fonctions transcendantes

Une fonction transcendante est une fonction qui n'est pas algébrique.

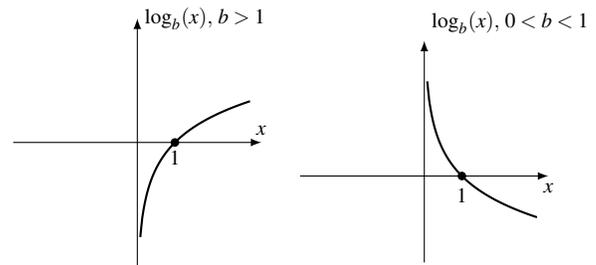
### Fonctions exponentielles

Forme générale :  $f(x) = Ab^x + k$ ,  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$



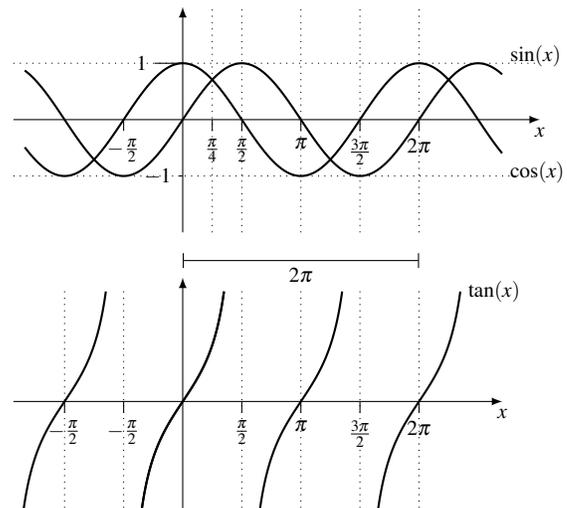
### Fonctions logarithmiques

Forme générale :  $f(x) = A \log_b(x - a) + C$  ( $b > 0, b \neq 1$ ),  $\text{dom}(f) = \{x \mid x - a > 0\}$



### Fonctions trigonométriques

$f(x) = \sin(x)$ ,  $\text{dom}(\sin) = \mathbb{R}$      $g(x) = \cos(x)$ ,  $\text{dom}(\cos) = \mathbb{R}$   
 $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ,  $\text{dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$



## Fonctions sinusoidales

Forme générale :

$$f(x) = A \sin(\omega(x-h)) + k \quad \text{Déphasage temporel}$$

$$= A \sin(\omega x + \phi) + k \quad \text{Déphasage angulaire}$$

$$\text{dom}(\sin) = \mathbb{R}$$

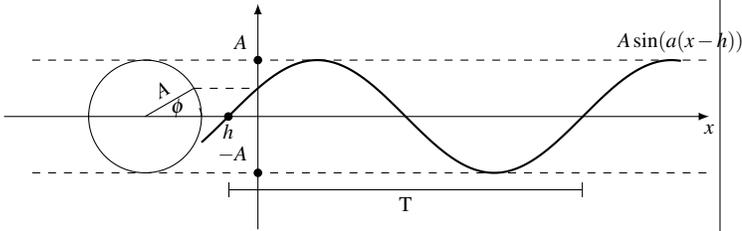
Amplitude :  $A$

Vitesse angulaire  $\omega$

Période :  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Déphasage (temps) :  $h = -\frac{\phi}{\omega}$

Déphasage (angle) :  $\phi = -\omega h$



## Fonctions définies par morceaux

Valeur absolue

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

## Propriétés de fonctions

Périodique (période  $T$ )  $f(x+T) = f(x)$  (ex :  $\sin(x)$ )

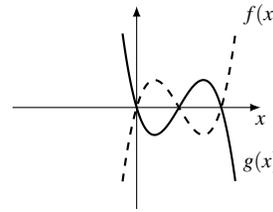
Paire  $f(-x) = f(x)$  (ex :  $x^2$ ,  $\cos(x)$ )

Impaire  $f(-x) = -f(x)$  (ex :  $x^3$ ,  $\sin(x)$ )

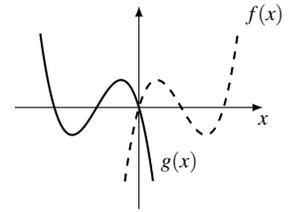
## Transformation du graphe d'une fonction

### Symétries

Symétrie par rapport à l'axe des  $x$   $g(x) = -f(x)$



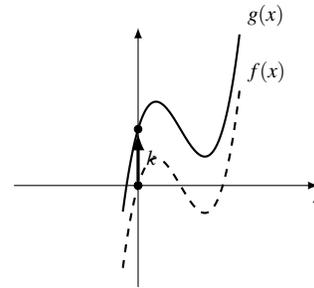
Symétrie par rapport à l'axe des  $y$   $g(x) = f(-x)$



### Translation verticales et horizontales

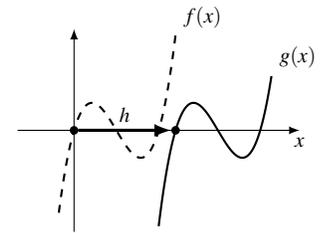
Translation verticale de  $k$  :

$$g(x) = f(x) + k$$



Translation horizontale de  $h$  :

$$g(x) = f(x-h)$$



### Changements d'échelles

Facteur  $b$  horizontal :

$$g(x) = f\left(\frac{x}{b}\right)$$

Facteur  $a$  vertical :

$$g(x) = af(x)$$

