Exercices sur les formules dérivations et quelques applications

Calcul différentiel – Automne 2019 – Yannick Delbecque

Dérivées de puissances

Question 1
Trouver la dérivée des fonctions suivantes à l'aide des propriétés de la dérivée. Exprimer le résultat sans utiliser d'exposants fractionnaires ou négatifs.

a) $y = x^9$
b) $y = x^{-12}$
c) $f(x) = x^{7/4}$
d) $y = \frac{1}{x^3}$
e) $y = \frac{1}{x^6}$
f) $f(x) = \sqrt[5]{x}$
g) $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$
h) $u = \sqrt[5]{x^2}$
i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
j) $x(t) = \frac{3}{7\sqrt[3]{t^5}}$

Question 2
Trouver la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 4$
b) $v(t) = t$
c) $h(x) = 5x^3$
d) $x(t) = \frac{3t}{4}$
e) $y = -\frac{9}{5\sqrt[4]{x}}$
f) $x(r) = \frac{5}{8r}$
g) $f(x) = 8x^3 - 4x^2 + 9x - 1$
h) $y = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} - 5x^7 + \frac{1}{6x^3} - \frac{3}{4}$
i) $f(x) = \left(x^2 - 3\right)(4x + 1)$
j) $y = 5\left(2 - x^3\right)^2$
k) $f(x) = (3x + 1)^3$
l) $g(t) = 4\left(\frac{3}{t^2} + 1\right)\left(1 - t^3\right)$

Question 3
Donner la dérivée de chacune des fonctions au point indiqué.

a) $f(x) = 3x + 1$ au point $(2, 7)$.
b) $s(t) = -t^3 + 2t^2 + 3t - 2$ au point $(-1, -2)$.
c) $y = \frac{2}{3x} - \frac{4}{5x^2}$ au point $(1, -2/15)$.
d) $f(t) = \frac{t^3 - 4t}{2}$ au point $(k, f(k))$.

Question 4
Donner l'équation de la droite tangente au graphe de f pour la valeur donnée de x.

a) $f(x) = x^2$, en $x = -2$.
b) $f(x) = x^3$, en $x = 1$.
c) $f(x) = \frac{1}{x}$, en $x = 1$.
d) $f(x) = \frac{1}{x}$, en $x = 3$.
e) $f(x) = \frac{1}{x}$, en $x = \sqrt{2}$.
f) $f(x) = \sqrt{x}$, en $x = 1$.
g) $f(x) = \sqrt{x}$, en $x = 4$.

Question 5
Pour quelle(s) valeur(s) de x la courbe décrite par la fonction $f(x)$ admet-elle une tangente horizontale ?

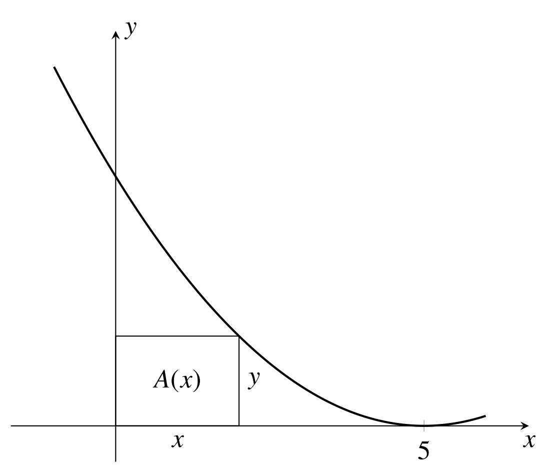
a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.
b) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x$.
c) $f(x) = \frac{x^5}{5} - x$.
d) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.
e) $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
f) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

Question 6

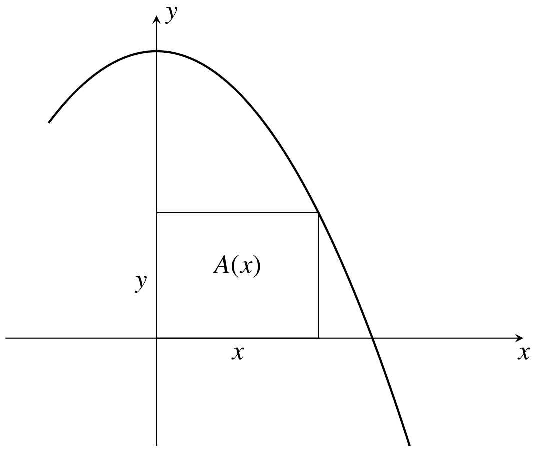
Trouver une valeur de x pour laquelle la fonction $y = \frac{1}{x^2}$ admet une droite tangente parallèle à la droite $y = \frac{x}{4} - 1$.

Question 7
Trouver deux valeurs de x pour laquelle la fonction $y = x^3 - 3x$ admet une droite tangente perpendiculaire à la droite $y = \frac{3x}{5} - 1$. (Rappel : si deux droites sont perpendiculaires, le produit de leurs pentes est -1.)

Question 8
Déterminer la valeur de x où un rectangle inscrit entre la courbe d'équation $y = (x - 5)^2$ et les axes de coordonnées a une aire maximum.



Question 9
Déterminer la valeur de x où un rectangle inscrit entre la courbe d'équation $y = 4 - x^2$ et la partie positive des axes de coordonnées a une aire maximum.



Dérivée de produits et de quotients

Question 10
Calculer la dérivée de $x^2(2x-1)$ de deux manières différentes : en utilisant la règle de Liebniz et en distribuant x^2 sur $(2x-1)$. Vérifier que le résultat est le même dans les deux cas.

Question 11
Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la règle de dérivation d'un produit et simplifier le résultat obtenu.

a) $y = (2x-1)(5x+1)$
b) $y = (3x+1)\left(2-5x^3\right)$
c) $x = \left(\sqrt{t}-t\right)\left(4t^3-2t^2+5\right)$
d) $y = x(3x-1)-(2x-5)\left(4-3x^2\right)$
e) $f(x) = (x+1)(2x+1)(3x+1)$
f) $f(x) = x^3\left(5x^2-4\right)\left(3-x^4\right)$

Question 12
Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la règle de dérivation d'un quotient et simplifier le résultat obtenu.

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$
b) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$
c) $y = \dfrac{2x^4}{x^4+1}$
d) $d(t) = \dfrac{4t^2-5}{5-4t^3}$
e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1-x}$
f) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

Question 13
Donner la dérivée de chacune des fonctions au point indiqué.

a) $f(x) = \dfrac{-x^2+6x+2}{2-3x}$ au point $(0,1)$.
b) $y = \left(t^2-3t-2\right)\left(\sqrt{t}+2t\right)$ au point $(1,-12)$.
c) $f(x) = \dfrac{1}{x^7-1} - \dfrac{1}{9-x^2}$ au point $(-1, -\frac{5}{8})$.

Question 14
Calculer la dérivée des fonctions suivantes **sans utiliser la règle du quotient**.

a) $f(x) = \dfrac{x^3-3x+1}{\pi}$
b) $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{6x^3}$
c) $f(x) = \dfrac{57x^5}{10}$
d) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{64x^2}}{48}$

Question 15
Soient u, v et w des fonctions dérivables de x. Montrer que

$$(uvw)' = u'uv + uv'w + uvw'.$$

Question 16
Montrer qu'aucune droite de pente 1 n'est tangente à la courbe de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

Question 17
Il y a deux droites passant par le point $(4,20)$ qui sont tangentes à la parabole donnée par la fonction $y = 8x - x^2$. Trouver les équations de ces droites. Pour vous aider, faire une esquisse de la situation.

Question 18
La relation entre l'aire de la pupille d'un œil humain (en millimètres carrés) et l'intensité x d'une source lumineuse est donné par la fonction

$$A(x) = \frac{40+24x^4}{1+4x^4}.$$

Plus la source est intense, plus la pupille se contracte et son aire diminue. On définit la sensibilité de la pupille à une source lumineuse par la fonction $S(x) = \dfrac{dA}{dx}$.

a) Quelle est l'aire de la pupille lorsque l'intensité lumineuse est nulle ?
b) Quelle est l'aire d'une pupille soumise à une source lumineuse très intense ?
c) Quelle est la sensibilité de la pupille en fonction de l'intensité d'une source lumineuse ?

Question 19
Calculer la dérivée des fonctions suivantes en considérant $n \in \mathbb{N}$ comme une constante naturelle quelconque.

a) $y = \dfrac{1}{x^n}$
b) $y = x^{1/n}$
c) $y = \dfrac{x^n}{x^n-1}$
d) $y = \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x^2}$
e) $y = \dfrac{\sqrt{x}(10-x)}{x^3-8}$
f) $y = \dfrac{4x^3-x^2}{(x+1)\sqrt[4]{x}}$

Dérivée de fonctions composées

Question 20
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(t) = \left(3x^2 - x + 1\right)^5$

b) $f(t) = (2x+1)^{99}$

c) $g(t) = \left(1 - 5t^4\right)^{10}$

d) $y = \left(5x^2 - 3x + 2\right)^{\frac{7}{2}}$

e) $f(x) = \sqrt{x^5 + 1}$

f) $g(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3$

g) $x(t) = \sqrt{\dfrac{mt}{1+t}}$

h) $f(x) = 5\sqrt[3]{8 - x}$

Question 21
Soit $y = \sqrt{x}$, $x = 6t^2 - 5t$ et $z = \frac{1}{y}$. Calculer les dérivées suivantes.

a) $\dfrac{dx}{dt}$ et $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=2}$

b) $\dfrac{dz}{dy}$ et $\left.\dfrac{dz}{dy}\right|_{y=-3}$

c) $\dfrac{dy}{dt}$ et $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=-1}$

d) $\dfrac{dz}{dx}$ et $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=\frac{1}{9}}$

Question 22
Calculer la dérivée des fonctions suivantes **sans utiliser la règle du quotient**.

a) $y = \dfrac{-17}{3\left(x^2 - x + 6\right)}$

b) $y = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2 + 4x + 2}}$

Question 23
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \left[\left(x^3 + 2x\right)^4 + 3x\right]^5$

b) $y = (3x+4)^{14}\left(x^2 - 2\right)^{18}$

c) $f(t) = \sqrt{(2t+\pi)^3(2-5t)}$

d) $y = \dfrac{\left(2x^3 + 1\right)^3}{\sqrt{x+3}}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{3x+1}}$

Question 24
On a observé que la masse m (en kilogrammes) d'un poisson d'une certaine espèce dépend de sa longueur L (en mètres) par la fonction $m = 4L^2$. Supposons que le taux de croissance de la longueur par rapport au temps (en années) est de $(0,3 - 0,2L)$ m/an.

a) Trouver l'expression de $\dfrac{dm}{dt}$ en fonction de L. Indiquer les unités.

b) Évaluer $\left.\dfrac{dm}{dt}\right|_{m=4}$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte donné.

Dérivation implicite

Question 25
Déterminer, parmi les équations suivantes, celles qui définissent implicitement une fonction (mais pas explicitement).

(a) $y = \dfrac{3t+1}{4t}$

(b) $y = \dfrac{3y+1}{4x}$

(c) $x^2 + 5x + 6 = y$

(d) $xy^2 + 5y^2 = 3x + y$

Question 26
Calculer les dérivées implicites suivantes.

a) $\dfrac{dy}{dx}$ si $x + y^2 = 1$.

b) $\dfrac{dy}{dx}$ si $x^3 + y^3 = 1$.

c) $\dfrac{dy}{dx}$ si $xy = 1$.

d) $\dfrac{dx}{dt}$ si $\sqrt{x^2 + t^2} = 2t^2 + 4$.

e) $\dfrac{dx}{dy}$ si $x^3 - 4y^3 = 5x^2 + 6y^3$.

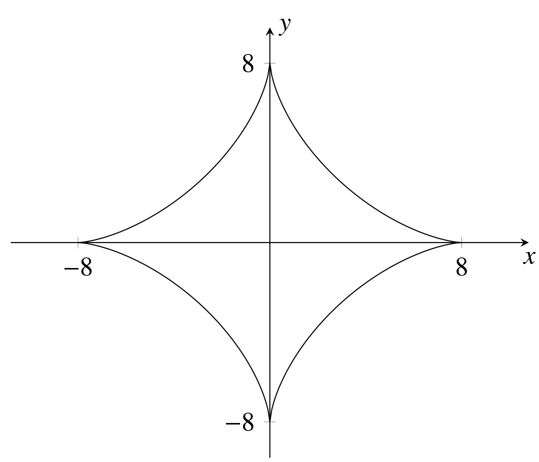
f) $\dfrac{dy}{dx}$ si $x = \dfrac{3y - y^2}{2y+3}$.

g) $\dfrac{dy}{dx}$ si $x^2y^2 + x^3y = 6x$.

Question 27
Déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe décrite par l'équation $x^3 + y^3 = 2xy$ au point $(1, 1)$.

Question 28
Soit le cercle d'équation $x^2 + y^2 = r^2$ (cercle de rayon r centré à l'origine). Montrer que la droite passant par l'origine et un point (x_0, y_0) situé sur la circonférence du cercle est toujours perpendiculaire à la droite tangente au cercle en ce point (x_0, y_0).

Question 29
Trouver la pente de la droite tangente à l'astéroïde $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$, illustrée ci-dessous, au point $\left(1, -3\sqrt{3}\right)$.



Dérivée d'ordre supérieur

Question 30
Calculer les dérivées suivantes.

a) $f^{(4)}(x)$, si $f(x) = x^5 + 7x$.
b) y''', si $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
c) $y^{(4)}$, si $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
d) $y^{(10)}$, si $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
e) $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \left(x^3+1\right)^5$.
f) $f''(1)$, si $f(x) = \frac{4x^5-2x}{x^3}$.
g) $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=4}$, si $y = \sqrt{x^7} - 3x$.
h) $f^{(5)}(x)$, si $f(x) = \frac{1}{x^5}$.

Question 31
Si $y = P(x)$ est une fonction polynômiale définie par un polynôme de degré k, pour quelle valeur de n a-t-on $y^{(n)} = 0$?

Question 32
On lance verticalement vers le haut un objet. La hauteur (en mètres) de l'objet t secondes après avoir été lancé est donnée par la fonction $h(t) = 50 + 15t - 4,9t^2$.

a) À quelle hauteur l'objet se trouve-t-il au moment où il est lancé ?
b) Quelle est la vitesse initiale de l'objet ?
c) Quelle est la vitesse de l'objet lorsqu'il atteint la hauteur de 60 m lors de sa montée ?
d) Sachant qu'il commencera à descendre au moment où sa vitesse est nulle, quelle est la hauteur maximale atteinte par l'objet ?
e) À quelle vitesse l'objet touchera-t-il le sol ?
f) Trouver l'accélération de cet objet au temps t.

Exercices récapitulatifs

Question 33
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^6$
b) $f(x) = \frac{-2}{\sqrt[3]{x}}$
c) $f(x) = \sqrt{x^3}$
d) $y = 8x^3 - 4x^2 + 9x - 1$
e) $f(x) = -4x^8 + \frac{x^{-2}}{5} - \frac{4}{3}$
f) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3} - x^4 - \frac{2}{\sqrt{x}}$
g) $y = \frac{7}{4x^{3/4}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 4^4$
h) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt[5]{x}}{8}$
i) $f(x) = (3x-1)(4-x^3)$
j) $y = \left(\sqrt{x}+x\right)\left(2x-5x^3+9\right)$
k) $f(x) = x^2\left(5x^2-1\right)\left(5-7x^3\right)$
l) $y = x(3x-2) - (5x-3)(6-2x)$
m) $f(x) = \frac{3x}{x-1}$
n) $f(x) = \frac{x^3-x^2+6}{x}$
o) $f(x) = \frac{4x^2-5}{6-2x^4}$
p) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2-x}$
q) $f(x) = \frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x^2}$
r) $f(x) = \frac{\sqrt{x}(6-x)}{x^2-4}$

Question 34
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \frac{x^2-x+1}{x^3+2}$
b) $y = \left(x^3-1\right)^7$
c) $y = x^2 + \sqrt{3x-1}$
d) $y = x^2\sqrt{3x-1}$
e) $y = \frac{\sqrt{x}+1}{x}$
f) $y = (2-x)^5(7x+3)$
g) $y = 5\sqrt[3]{2x^2+5x+7}$
h) $y = 7\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)$

Question 35
La droite $y = 4x - 17$ est-elle tangente à la courbe de $f(x) = x^2 - 2x - 8$? Si oui, déterminer le point de tangence.

Question 36
Soit la fonction $f(x) = (4x-9)^2 + 3$. Déterminer la ou les valeurs de a telles que la droite tangente à la courbe de f en $x = a$ et les axes forment un triangle isocèle.

Question 37
Lors d'un test de collision, une voiture se déplace en ligne droite vers un mur situé à 90 m du point de départ de la voiture. La position s de la voiture (en mètres) à partir de son point de départ t secondes après son départ est donnée par $s(t) = 4t + \frac{t^2}{2}$.

a) À quelle distance du mur la voiture se trouve-t-elle 2 s après son départ ?
b) Quelle est sa vitesse 2 s après son départ ?
c) À quelle distance du mur la voiture se trouve-t-elle lorsque sa vitesse est de 30 km/h ?
d) Combien de temps lui faut-il avant d'entrer en collision avec le mur ?
e) Quelle est sa vitesse lors de l'impact ?
f) Quelle est son accélération au moment de l'impact ?

Question 38
Supposons que durant les deux premières années de sa vie, la masse (en kilogrammes) d'un bébé en fonction du temps t (en mois) écoulé depuis sa naissance est donnée par la fonction $m(t) = \sqrt{12+7t}$.

a) Quelle est la masse du bébé à sa naissance ?

b) Évaluer l'expression $\dfrac{m(8)-m(5)}{3}$ et en donner un interprétation.

c) Quelle fonction donne le taux de croissance instantané de la masse du bébé ?

d) Quel est le taux de croissance instantané de la masse du bébé lorsque celui-ci est âgé de 9 mois ? Interpréter.

e) Le bébé grossit-il plus rapidement à 3 mois ou à 9 mois ?

Question 39
Calculer $\dfrac{dy}{dx}$ pour chacune des équations suivantes.

a) $2x^2+3xy-y^2 = 1$

b) $\dfrac{1}{x}-3xy = \dfrac{1}{y}$

c) $3x^2y^3+5x = 3-5y^3$

d) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x-y}{x+y}$

Question 40
Pour chacune des équations suivantes, calculer la pente de la tangente à la courbe au point donné.

a) $4x^2+9y^2 = 40$ au point $(-1,-2)$

b) $x^2y^2(1+xy)+4 = 0$ au point $(1,-2)$

Question 41
En utilisant la formule de la dérivée d'un produit de deux fonctions, montrer que

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(f(x))^2}.$$

Question 42
Supposons que u et v sont toutes deux des fonctions de x.

a) Montrer que $(uv)'' = u''v+2u'v'+uv''$.

b) Trouver une formule pour $(uv)'''$.

c) En généralisant, faire une conjecture donnant une formule pour la dérivée 6e d'un produit uv.

Question 43
Trouver la valeur que l'on doit donner à la constante k pour que la courbe d'équation $y = -x^2+kx$ soit tangente à la droite $y = x+4$. (Indice : faire un dessin de la situation pour déterminer sous quelles conditions ce qui est demandé est possible.)

Question 44
Démontrer que $(x^n)' = nx^{x-1}$ en utilisant la formule généralisée du produit de n fonctions :

$$(u_1\cdots u_n)' = u_1'u_2\cdots u_n+u_1u_2'u_3\cdots u_n+\cdots+u_1\cdots u_{n-1}u_n'.$$

Question 45
Nous avons montré en classe que $(x^n)' = nx^{n-1}$ était valide lorsque n est un entier naturel.

a) En utilisant la formule de la dérivée du quotient, montrer que cette formule est valide lorsque n est négatif (donc si $n = -k$ avec k positif.)

b) En utilisant la dérivée implicite, montrer que cette formule est valide lorsque n est une fraction du type $\frac{1}{k}$, avec k naturel.

c) Montrer ensuite à l'aide de la dérivée d'une fonction composée que la formule est valide lorsque n est une fraction $\frac{a}{b}$.

Solutions

Question 1

a) $\dfrac{dy}{dx} = 9x^8$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \frac{-12}{x^{13}}$

c) $f'(x) = \dfrac{7}{4}x^{\frac{3}{4}}$

d) $y' = \dfrac{-3}{x^4}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-6}{x^7}$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

g) $g'(t) = \dfrac{-1}{2\sqrt{t^3}}$

h) $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

i) $f'(x) = \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

j) $x'(t) = \dfrac{3}{7}\dfrac{-5}{3}t^{-8/3} = \dfrac{-5}{7\sqrt[3]{t^8}}$

Question 2

a) $f'(x) = 0$

b) $v'(t) = 1$

c) $h'(x) = 15x^2$

d) $x'(t) = \dfrac{3}{4}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{9}{20\sqrt[4]{x^5}}$

f) $x'(r) = -\dfrac{5}{8r^2}$

g) $f'(x) = 24x^2-8x+9$

h) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-8}{3\sqrt[3]{x^5}}-35x^6-\dfrac{1}{2x^4}$

i) $f'(x) = 12x^2+2x-12$

j) $\dfrac{dy}{dx} = -30x^2\left(2-x^3\right)$

k) $f'(x) = 81x^2+54x+9$

l) $g'(t) = -12t^2-12-\dfrac{24}{t^3}$

Question 3

a) 3

b) -4

c) $\dfrac{14}{15}$

d) $\dfrac{3k^2}{2}-2$

Question 4

a) $y = -4x-4$

b) $y = 3x-2$

c) $y = -x+2$

d) $y = -\frac{x}{9}+\frac{2}{3}$

e) $y = -\frac{x}{2}+\sqrt{2}$

f) $y = \frac{x}{2}+\frac{1}{2}$

g) $y = \frac{x}{4}+1$

Question 5

a) On cherche quand $f'(x) = 0$. On trouve $x = \dfrac{2}{3}$

b) $f'(x) = 0$ si $x = 1$

c) $f'(x) = 0$ si $x = 1$ ou $x = -1$

d) $f'(x) = 0$ si $x = -2$ et $x = 1$

e) $f'(x) = 0$ si $x = -1$ et $x = 1$

f) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = -\frac{x+2}{x^3}$. $f'(x) = 0$ si $x = -2$

Question 6

$x = -2$

Question 7

$x = -\dfrac{2}{3}$ et $x = \dfrac{2}{3}$

Question 8

On commence par exprimer la valeur $A(x)$ à maximiser en fonction de x. Comme l'aire du rectangle est xy et que $y = (x-5)^2$, on a

$$A(x) = xy = x(x-5)^2.$$

À la valeur maximum de la fonction $A(x)$, la pente à la fonction $A(x)$ doit être nulle.

$$\begin{aligned} A'(x) &= \left(x(x-5)^2\right)' \\ &= \left(x(x^2-10x+25)\right)' \\ &= \left(x^3-10x^2+25x\right)' \\ &= 3x^2-20x+25 \\ &= (3x-5)(x-5) \end{aligned}$$

On trouve les zéros de $A'(x)$:

$$(3x-5)(x-5) = 0 \iff x = 5 \text{ ou } x = 5/3.$$

Comme la solution $x = 0$ correspond au sommet de la parabole d'équation $y = (x-5)^2$, cette solution correspond à un rectangle d'aire nulle qui n'est évidemment pas l'aire maximum. L'aire maximum est dont atteinte en $x = 5/3$.

Question 9

On commence par exprimer la valeur $A(x)$ à maximiser en fonction de x. Comme l'aire du rectangle est xy et que $y = 4 - x^2$, on a

$$A(x) = xy = x(4-x^2).$$

À la valeur maximum de la fonction $A(x)$, la pente à la fonction $A(x)$ doit être nulle.

$$\begin{aligned} A'(x) &= \left(x(4-x^2)\right)' \\ &= \left(4x-x^3\right)' \\ &= 4-3x^2 \\ &= (2-\sqrt{3}x)(2+\sqrt{3}x) \end{aligned}$$

Les zéros de $A'(x)$ sont $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ Comme on a prix $x \geq 0$, l'aire maximum est dont atteinte en $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Question 10

La dérivée est $6x^2 - 2x$.

Question 11

a) $\dfrac{dy}{dx} = (2)(5x+1) + (2x-1)(5) = 20x - 3$

b) $\dfrac{dy}{dx} = (3)(2-5x^3) + (3x+1)(-15x^2)$
$= -60x^3 - 15x^2 + 6$

c) $x'(t) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{t}} - 1\right)\left(4t^3-2t^2+5\right) + \left(\sqrt{t}-t\right)\left(12t^2-4t\right)$
$= 14\sqrt{t^5} - 5\sqrt{t^3} + \dfrac{5}{2\sqrt{t}} - 16t^3 + 6t^2 - 5$

d) $\dfrac{dy}{dx} = (1)(3x-1) + x(3) + (2)(4-3x^2) + (2x-5)(-6x)$
$= 18x^2 - 24x - 9$

e) $f'(x) = (2x+1)(3x+1) + (x+1)(2)(3x+1) +$
$(x+1)(2x+1)(3)$
$= 18x^2 + 22x + 6$

f) $f'(x) = 3x^2\left(5x^2-4\right)\left(3-x^4\right) +$
$x^3(10x)\left(3-x^4\right) + x^3\left(5x^2-4\right)\left(-4x^3\right)$
$= -45x^8 + 28x^6 + 75x^4 - 36x^2$

Question 12

a) $y' = \dfrac{2x(x^2+1) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

b) $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{8x^3}{(x^4+1)^2}$.

d) $d'(t) = \dfrac{4t\left(4t^3-15t+10\right)}{(5-4t^3)^2}$.

e) $f'(x) = \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}(1-x)^2}$.

f) $f'(x) = \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x^3}}$.

Question 13

a) $f'(0) = \dfrac{9}{2}$

b) $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=1} = -13$

c) $f'(-1) = -\dfrac{110}{64}$

Question 14

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2-3}{\pi}$

b) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{6} - \dfrac{1}{2} + x^2$

c) $f'(x) = \dfrac{57x^4}{2}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{18\sqrt[3]{x}}$

Question 15

$$\begin{aligned} (uvw)' &= ((uv)w)' \\ &= (uv)'w + (uv)w' \\ &= (u'v+uv')w + (uv)w' \\ &= u'vw + uv'w + uvw' \end{aligned}$$

Question 16

Il faut montrer que la dérivée de f est différente de 1 pour toute valeur de x. On cherche donc à montrer que

$$f'(x) = 1$$

n'a aucune solution. On trouve en dérivant que $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. L'équation à résoudre est donc

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 1.$$

$$\begin{aligned} x(x-2) &= (x-1)^2 \\ x^2-2x &= x^2-2x+1 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

qui n'a pas de solution. Il n'y a donc aucune valeur de x telle que la pente de la tangente $f'(x)$ soit 1.

Question 17

Considérez l'équation $y = ax + b$ d'une droite de paramètres indéterminés a et b. et trouver les valeurs des paramètres nécessaires pour que la droite passe par le point $(4, 20)$ et un point de la courbe $y = 8x - x^2$.

Chercher ce qui doit se produire au point de tangence pour que la droite soit tangente à la courbe. (La pente de la tangente est donnée est la valeur de la dérivée au point de tangence !)

Les équations des deux droites sont $y = 4x + 4$ et $y = -4x + 36$.

Question 18

a) 40mm^2

b) $6\ \text{mm}^2$

c) $S(x) = -\dfrac{544x^3}{(1-4x^4)^2}$

Question 19

a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{nx^{(n-1)/(n)}}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-nx^{n-1}}{(x^n-1)^2}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{x+2}{x^3} = -\dfrac{2x^2+5x-2}{x^3(x+1)^2}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^4-50x^3+24x-80}{2\sqrt{x}(x^3-8)^2}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}\left(28x^2+41x-7\right)}{4(x+1)^2}$

Question 20

a) $f'(t) = 5\left(3x^2 - x + 1\right)^4 (6x-1)$

b) $f'(t) = 99\,(2x+1)^{98}\,(2) = 198\,(2x+1)^{98}$

c) $g'(t) = -200t^3\left(1-5t^4\right)^9$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{7}{2}\left(5x^2 - 3x + 2\right)^{\frac{5}{2}}\,(10x-3)$

e) $f'(x) = \dfrac{5x^4}{2\sqrt{x^5+1}}$

f) $g'(x) = -\dfrac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}$

g) $x'(t) = \dfrac{m}{2(1+t)^2}\sqrt{\dfrac{1+t}{mt}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m}{t(1+t)^3}}$

h) $f'(x) = \dfrac{-5}{3\sqrt[3]{(8-x)^2}}$

Question 21

a) $\dfrac{dx}{dt} = 12t - 5$ et $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=2} = 19$

b) $\dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{1}{y^2}$ et $\left.\dfrac{dz}{dy}\right|_{y=-3} = -\dfrac{1}{9}$

c) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{12t-5}{2\sqrt{6t^2-5t}}$ et $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=-1} = -\dfrac{17}{2\sqrt{11}}$

d) $\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ et $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=\frac{1}{9}} = -\dfrac{27}{2}$

Question 22

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{34x-17}{3\left(x^2-x+6\right)^2}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-8(x+2)}{3\sqrt[3]{\left(x^2+4x+2\right)^4}}$

Question 23

a) $\dfrac{dy}{dx} = 5\left[\left(x^3+2x\right)^4 + 3x\right]^4\left(4\left(x^3+2x\right)^3\left(3x^2+2\right)+3\right)$

b) $\dfrac{dy}{dx} = 6\,(3x+4)^{13}\left(x^2-2\right)^{17}\left(25x^2+24x-14\right)$

c) $f'(t) = \left(6 - 20t - \dfrac{5\pi}{2}\right)\sqrt{\dfrac{2t+\pi}{2-5t}}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(2x^3+1\right)^2\left(34x^3+108x^2-1\right)}{2\sqrt{(x+3)^3}}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+\sqrt{3x+1}}}\left(2x + \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}\right)$

Question 24

a) $\dfrac{dm}{dt} = \dfrac{dm}{dL}\dfrac{dL}{dt} = 8L(0,3-0,2L)$

b) Au moment où la masse du poisson est de 4 kg, celle-ci augmente à un taux de 0,8 kg/an.

Question 25

(b) et (d)

Question 26

a) $-\frac{1}{2y}$

b) $-\frac{x^2}{y^2}$

c) $-\frac{y}{x}$

d) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{4t\sqrt{x^2+t^2} - t}{x}$

e) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{30y^2}{3x^2-10x}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2y+3)^2}{9-6y-2y^2}$ ou $\dfrac{2y+3}{3-2x-2y}$

g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6-2xy^2-3x^2y}{2x^2y+x^3}$

Question 27

$y = -x + 2$

Question 28

Laissé à l'étudiant. Utiliser le fait que le produit des pentes doit être de -1.

Question 29

$\sqrt{3}$

Question 30

a) $f^{(4)}(x) = 120x$

b) $y''' = 4\cdot 3\cdot 2x + 3\cdot 2\cdot 1 = 24x + 6$

c) $y^{(4)} = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$

d) $y^{(10)} = 0$

e) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 30x\left(x^3+1\right)^3\left(7x^3+1\right)$

f) $f''(1) = -4$

g) $\left.\dfrac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=4} = \dfrac{105}{4}$

h) $f^{(5)}(x) = -\dfrac{15120}{x^{10}}$

Question 31

$n = k + 1.$

Question 32

a) 50 m

b) 15 m/s

c) $\sqrt{29}$ m/s $\approx 5,39$ m/s

d) 61,48 m

e) environ 34,71 m/s

f) $h''(t) = -9.8$ m/s²

Question 33

a) $f'(x) = 6x^5$

b) $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}$

c) $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$

d) $y' = 24x^2 - 8x + 9$

e) $f'(x) = -32x^7 - \dfrac{2}{5x^3}$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{6\sqrt{x}} - 4x^3 + \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$

g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-21}{16x^{\frac{7}{4}}} - x^{\frac{3}{2}}$

h) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{x^3}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^4}} + \dfrac{1}{40\sqrt[5]{x^4}}$

i) $f'(x) = 3(-4x^3 + x^2 + 4)$

j) $y' = -20x^3 - \dfrac{35\sqrt{x^5}}{2} + 4x + 3\sqrt{x} + \dfrac{9}{2\sqrt{x}} + 9$

k) $f'(x) = -5x(49x^5 - 7x^3 - 20x^2 + 2)$

l) $y' = 2(13x - 19)$

m) $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$

n) $f'(x) = \dfrac{-6}{x^2} + 2x - 1$

o) $f'(x) = \dfrac{2x(2x^4 - 5x^2 + 6}{(x^4-3)^2}$

p) $f'(x) = \dfrac{x+2}{2\sqrt{x}(x-2)^2}$

q) $f'(x) = \dfrac{x^3 - 8x^2 - 20x - 16}{x^3(x+2)^2}$

r) $f'(x) = \dfrac{x^3 - 18x^2 + 12x - 24}{2\sqrt{x}(x^2-4)^2}$

Question 34

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{\left(x^3+2\right)^2}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = 21x^2\left(x^3-1\right)^6$

c) $\dfrac{dy}{dx} = 2x + \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{15x^2-4x}{2\sqrt{3x-1}}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sqrt{x}+2}{2x^2}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = (2-x)^4(-42x-1)$

g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{20x+25}{3\sqrt[3]{\left(2x^2+5x+7\right)^2}}$

h) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-112x}{\left(x^2-4\right)^2}$

Question 35

Oui, au point $(3,-5)$.

Question 36

$a = \dfrac{71}{32}$ ou $a = \dfrac{73}{32}$.

Question 37

a) 80 m

b) 6 m/s (21,6 km/h)

c) 43,27 m

d) 10 s

e) 14 m/s (50,4 km/h)

f) 1 m/s² (12,96 km/h²)

Question 38

a) $\sqrt{12}$ kg

b) Entre l'âge de 5 mois et 8 mois, la masse de ce bébé a augmenté à un taux moyen de $\frac{\sqrt{68}-\sqrt{47}}{3}$ kg/mois $\approx= 0,4635$ kg/mois.

c) $m'(t) = \dfrac{7}{2\sqrt{12+7t}}$.

d) À l'âge d'exactement 9 mois, le bébé grossit à un taux de

$$m'(9) = \frac{7}{2\sqrt{75}} \text{ kg/mois.}$$

e) Le bébé grossi plus rapidement à 3 mois, car $\mathrm{TVI}_3(m) > \mathrm{TVI}_9(m)$.

Question 39

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x+3y}{2y-3x}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2+3x^2y^3}{x^2-3x^3y^2}$ ou $\dfrac{1+6xy^2}{1-6x^2y}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{6x^3+5}{15y^2+9x^2y^2}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

Question 40

a) pente :$-\dfrac{2}{9}$

b) pente :2

Question 41

Laissé à l'étudiant. Indice : transformer le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en produit $f(x)\dfrac{1}{g(x)}$.

Question 42

a) Dériver deux fois à l'aide de la formule du produit.

b) Dériver le résultat précédant à l'aide de la formule du produit.

c) Si vous n'y arrivez pas facilement, commencer par calculer $\dfrac{d^4}{dx^4}(uv)$.

Question 43

$k = -3$ ou $k = 5$

Question 44

Laissé à l'étudiant. Une preuve rigoureuse nécessiterait l'utilisation du principe d'induction, mais vous pouvez trouver l'idée générale sans utiliser ce principe.

Question 45

a) Laissé à l'étudiant.

b) Laissé à l'étudiant.

c) Laissé à l'étudiant.