

## Examen formatif 1

---

Calculatrices et documentation interdites. Justifier les réponses.

### Question 1

Un multiple de 3 est un nombre entier pouvant s'écrire comme  $3k$ , où  $k \in \mathbb{Z}$ . Démontrer que si  $n \in \mathbb{Z}$  est un multiple de 3, alors  $n^2$  est aussi un multiple de 3.

### Question 2

Vrai ou faux ? Il n'est pas nécessaire de justifier vos réponses.

- Considérons un polynôme  $P(x)$ . Si  $P(a) = 0$ , alors  $(x + a)$  est un facteur de  $P(x)$ .
- Tout polynôme se factorise comme un produit de facteurs premiers la forme  $(ax - b)$ .
- Tout polynôme de degré plus grand ou égal à 3 a au moins un zéro.

### Question 3

Sachant que  $-1$  est un zéro de  $P(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ , factoriser le polynôme  $P(x)$  le plus possible.

### Question 4

Déterminer le domaine des fonctions suivantes.

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2(3x - 2)^{1/6}}$$

### Question 5

Voici quatre des propriétés de base pour la dérivée.

$$\begin{array}{ll} \text{(D1)} \quad \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} & (n \in \mathbb{N}) \\ \text{(D2)} \quad \frac{d(C)}{dx} = 0 & (C \in \mathbb{R}) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(D3)} \quad \frac{d(Cu)}{dx} = C \frac{du}{dx} \\ \text{(D4)} \quad \frac{u+v}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \end{array}$$

Calculez la dérivée de la fonction  $y = 3x^2 - 2x^3$  en n'utilisant que les propriétés (D1) à (D4) et en spécifiant à chaque étape du calcul quelle propriété est utilisée.

### Question 6

Déterminer, à l'aide de la définition,  $\frac{dy}{dx}$  pour les fonctions suivantes à la valeur de  $x$  indiquée.

$$\text{a) } y = f(x) = x^3 - 1 \text{ en } x = 1 \quad \text{b) } y = f(x) = \sqrt{x+3} \text{ en } x = 0$$

### Question 7

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes (à l'aide des propriétés).

$$\begin{array}{l} \text{a) } y = \frac{3}{4\sqrt[3]{x^4}} \\ \text{b) } y = (x^4 + 1)\sqrt{x} \\ \text{c) } y = \frac{(x^2 + 1)}{\sqrt[3]{x}} \end{array}$$

### Question 8

Déterminer, à l'aide des propriétés de la dérivée, la fonction dérivée  $\frac{dy}{dx}$  pour les fonctions suivantes et se servir du résultat obtenu pour donner l'équation de la droite tangente en  $x = 1$ .

$$\text{a) } y = f(x) = \frac{x^{22}}{11} \quad \text{b) } y = f(x) = \sqrt{x^3}$$

### Question 9

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^3 - x - 1$ .

- Déterminer pour quelle valeur de  $x$  la tangente au graphe de  $f$  est parallèle à la droite d'équation  $y = -\frac{26x}{27} + 31$ .
- Donner un exemple graphique qui montre qu'il est possible d'avoir plus d'une solution à ce problème, c'est-à-dire plus d'une droite tangente de même pente.

### Question 10

- Expliquer en vos mots comment on définit la pente de la tangente à une fonction et faire une esquisse pour illustrer votre explication.

- Montrer que  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = -\frac{1}{2}$  pour la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{2x}$$

- À l'aide du résultat précédent, déterminer l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction au point  $(1, f(1))$ .

# Solutions

## Question 1

Comme  $n$  est un multiple de 3, il y a un nombre  $k$  tel que

$$n = 3k.$$

On a alors que

$$n^2 = (3k)^2 = 3^2 k^2 = 3(3k^2).$$

Ainsi,  $n^2$  est aussi un multiple de 3. CQFD.

## Question 2

- Faux. Le facteur correspondant au zéro est de la forme  $(x-a)$
- Faux. Il y a aussi des facteurs premiers de la forme  $ax^2 + bx + c$ .
- Faux. Il pourrait être un produit de facteurs premiers de la forme  $ax^2 + bx + c$  sans zéro, comme  $x^2 + 1$ .

## Question 3

Comme  $-1$  est un zéro de  $P(x)$ , on sait que  $(x+1)$  est un facteur de  $P(x)$ . En divisant, on trouve que

$$x^4 + x^3 - x - 1 = (x+1)(x^3 - 1).$$

Comme 1 est un zéro de  $x^3 - 1$  (que l'on trouve par inspection), on sait que  $(x-1)$  est un facteur de  $x^3 - 1$ . En disant encore, on trouve que

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

On ne peut pas factoriser davantage car  $x^2 + x + 1$  est un polynôme premier (il n'a pas de zéros car  $\Delta = 1^2 - 4(1)(1) < 0$ ).

En combinant les deux résultats, on trouve enfin que

$$x^4 + x^3 - x - 1 = (x+1)(x-1)(x^2 + x + 1).$$

## Question 4

- $$\sqrt{x^2 - 2x + 1} \text{ def} \iff x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\iff (x-1)^2 \geq 0$$

Comme  $(x-1)^2$  est toujours positif ou nul, la fonction est définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R}.$$

- $$\frac{x^2 - 4}{(x-2)^2(3x-2)^{1/6}} \text{ def}$$

$$\iff (x-2)^2(3x-2)^{1/6} \neq 0$$

$$\iff (x-2) \neq 0 \text{ et } (3x-2)^{1/6} \neq 0$$

$$\iff x \neq 2 \text{ et } (3x-2) \neq 0$$

$$\iff x \neq 2 \text{ et } x \neq 2/3$$

On rappelle que  $(3x-2)^{1/6} = \sqrt[6]{3x-2}$ .

$$\sqrt[6]{3x-2} \text{ def} \iff 3x-2 \geq 0 \text{ En}$$

$$\iff 3x \geq 2$$

$$\iff x \geq 2/3$$

combinant les conditions obtenues, on obtient :

$$\text{dom}(f) = ]2/3, \infty[ \setminus \{2\}$$

## Question 5

$$(3x^2 - 2x^3)' = (3x^2 + (-2)x^3)'$$

$$= (3x^2)' + ((-2)x^3)' \quad (D4)$$

$$= 3(x^2)' + (-2)(x^3)' \quad (D3)$$

$$= 3(2x) + (-2)(3x^2) \quad (D1)$$

$$= 6x - 6x^2.$$

## Question 6

$$a) \frac{dy}{dx} = \frac{f(1+dx) - f(1)}{dx}$$

$$= \frac{((1+dx)^3 - 1) - 0}{dx}$$

$$= \frac{(1 + 3dx + 3dx^2 + dx^3 - 1)}{dx}$$

$$= \frac{3dx + 3dx^2 + dx^3}{dx}$$

$$= \frac{dx(3 + 3dx + dx^2)}{dx}$$

$$= 3 + 3dx + dx^2$$

$$\approx 3 \quad \text{car } dx \text{ infinitésimal.}$$

$$b) \frac{dy}{dx} = \frac{f(0+dx) - f(0)}{dx}$$

$$= \frac{\sqrt{(0+dx)+3} - \sqrt{3}}{dx}$$

$$= \frac{\sqrt{dx+3} - \sqrt{3}}{dx}$$

$$= \frac{\sqrt{dx+3} - \sqrt{3}}{dx} \frac{\sqrt{dx+3} + \sqrt{3}}{\sqrt{dx+3} + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{(dx+3) - 3}{dx} \frac{1}{\sqrt{dx+3} + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{dx}{dx} \frac{1}{\sqrt{dx+3} + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{dx+3} + \sqrt{3}}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} \quad \text{car } dx \text{ infinitésimal}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

## Question 7

$$a) y' = \left( \frac{3}{4\sqrt[3]{x^4}} \right)'$$

$$= \left( \frac{3}{4} x^{-4/3} \right)'$$

$$= \frac{3}{4} (x^{-4/3})'$$

$$= \frac{3}{4} \left( -\frac{4}{3} x^{-4/3-1} \right)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{-4}{3} x^{-7/3}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}$$

$$b) y' = ((x^4 + 1)\sqrt{x})'$$

$$= (x^4 + 1)' \sqrt{x} + (x^4 + 1)(\sqrt{x})'$$

$$= 4x^3 \sqrt{x} + (x^4 + 1) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{4x^3 \sqrt{x}(2\sqrt{x}) + (x^4 + 1)}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{8x^4 + (x^4 + 1)}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{9x^4 + 1}{2\sqrt{x}}.$$

$$c) y' = \left( \frac{(x^2 + 1)}{\sqrt[3]{x}} \right)'$$

$$= \frac{(x^2 + 1)' \sqrt[3]{x} - (x^2 + 1) (\sqrt[3]{x})'}{(\sqrt[3]{x})^2}$$

$$= \frac{2x \sqrt[3]{x} - (x^2 + 1) \left( \frac{1}{3} x^{-2/3} \right)}{(\sqrt[3]{x})^2}$$

$$= \frac{2x \sqrt[3]{x} - \frac{x^2 + 1}{3 \sqrt[3]{x^2}}}{(\sqrt[3]{x})^2}$$

$$= \frac{2x \sqrt[3]{x}(3 \sqrt[3]{x^2}) - (x^2 + 1) \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2}}{3 \sqrt[3]{x^2} (\sqrt[3]{x})^2}$$

$$= \frac{6x^2 - (x^2 + 1) \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2}}{3 \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{6x^2 - (x^2 + 1)}{3 \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{5x^2 - 1}{3 \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{5x^2 - 1}{3 \sqrt[3]{x^4}}$$

## Question 8

$$a) \frac{dy}{dx} = \frac{22x^{21}}{11} = 2x^{21}. \text{ Le point de tangence est } (1, f(1)), \text{ c'est à dire } (1, 1/11). \text{ La droite tangente est de pente } 2(1)^{21} = 2. \text{ On trouve l'équation de la droite :}$$

$$y = 2x - \frac{21}{11}.$$

$$b) \frac{dy}{dx} = (x^{3/2})' = \frac{3\sqrt{x}}{2}. \text{ Le point de tangence est } (1, f(1)), \text{ c'est à dire } (1, 1). \text{ La droite tangente est de pente } \frac{3\sqrt{1}}{2} = \frac{3}{2}. \text{ On trouve l'équation de la droite :}$$

$$y = \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}.$$

## Question 9

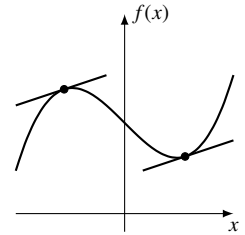
- La pente de la droite donnée est  $-\frac{26}{27}$ . On veut donc les points du graphe de  $f$  tels que  $f'(x) = -\frac{26}{27}$ . En dérivant, on trouve que  $f'(x) = 3x^2 - 1$ . On doit donc résoudre

$$3x^2 - 1 = -\frac{26}{27}.$$

En isolant, on trouve que

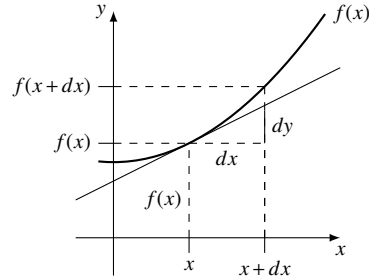
$$x = \pm \frac{1}{9}.$$

- Voici le graphe d'une fonction qui a deux solutions au problème.



## Question 10

- Un graphique possible pour illustrer la définition.



$$b) \frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{f(1+h) - f(1)}{dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{2(1+dx)} - \frac{1}{2}}{dx}$$

$$= \frac{\frac{1-(1+dx)}{2(1+dx)}}{dx}$$

$$= \frac{\frac{-dx}{2(1+dx)}}{dx}$$

$$= \frac{-dx}{2(1+dx)} \frac{1}{dx}$$

$$= \frac{-1}{2(1+dx)}$$

$$\approx \frac{-1}{2(1)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

- Comme  $f'(1)$  est la pente de la tangente au graphe de  $f$  au point  $(1, f(1))$ , on doit avoir que  $y = f'(1)x + b$ . En utilisant le point  $(1, 1)$ , on doit avoir que  $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(1) + b$ , ce qui implique que  $b = 1$ . L'équation de la droite est donc
- $$y = -\frac{1}{2}x + 1.$$