Chapitre 6

Analyse de fonctions

6.1 Limites et asymptotes

Définition 6.1. On écrit que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut quand x est assez près de a.

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

si $f(x)$ est aussi petit que l'on veut quand x est assez près de a.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut quand x est assez grand.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut quand x est assez petit.

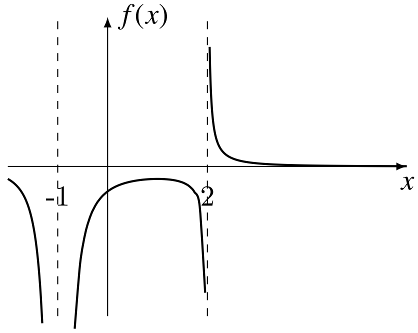
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$$

si $f(x)$ est aussi grand (ou petit) que l'on veut quand x est assez grand.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$$

si $f(x)$ est aussi grand (ou petit) que l'on veut quand x est assez petit.

Exemple 6.1. Considérons la fonction ayant le graphe suivant.



Pour cette fonction,

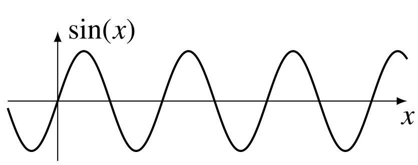
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \nexists$
- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$

Remarque 6.1. Dans l'exemple précédent, on a écrit $\lim\limits_{x\to -} f(x) = -\infty$ car la fonction tend vers $-\infty$ peu importe comment $x \to -1$. Cependant, comme cette limite n'a pas de valeur car ∞ n'est pas un nombre réel, mais un symbole indiquant le comportement d'une fonction. On pourrait aussi écrire que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) \nexists$.

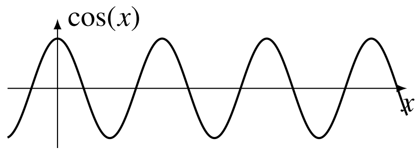
Certaines limites à l'infini n'existent pas, car les valeurs de la fonction ne s'approchent pas d'une valeur déterminée quand x devient de plus en plus grand (ou de plus en plus petit). Les fonctions trigonométriques sont un exemple : leur périodicité entraine que les limites à l'infini ne convergent pas.

Exemple 6.2.

- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \sin(x) \nexists$



- $\lim_{x\to\pm\infty} \cos(x)\nexists$



6.1.1 Arithmétique de l'infini

De manière générale, on peut utiliser « l'arithmétique de l'infini » (aussi appelé « algèbre de l'infini ») pour déterminer le comportement d'une fonction qui tend vers ∞ ou $-\infty$, ou quand $x \to \pm\infty$.

Définition 6.2 (Arithmétique de l'infini)**.**

$$\infty + \infty = \infty$$
$$\infty \cdot \infty = \infty$$
$$\infty \pm k = \infty$$
$$\pm k \cdot \infty = \pm\infty$$
$$\infty^\infty = \infty$$
$$\infty^k = \infty$$

$$(-\infty)^k = \begin{cases} \infty & \text{si } k \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$
$$\sqrt[n]{\infty} = \infty$$
$$\sqrt[n]{-\infty} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ impair} \\ \nexists & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

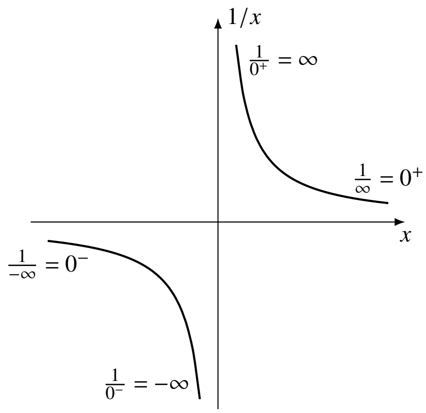
Il faut cependant garder en tête que ces règles de manipulation du symbole « ∞ » ne sont que des manières d'étudier le comportement de certaines limites ; « ∞ » n'est pas un nouveau nombre, même si ces règles peuvent donner cette impression. Ce symbole n'est qu'une manière commode de raisonner rapidement sur des limites où des valeurs sont aussi grande ou petite que l'on veut. En fait, on pourrait complètement se passer de l'arithmétique de l'infini et raisonner qu'avec des limites.

Exemple 6.3. Déterminons quelques limites à l'aide de l'arithmétique de l'infini.

- $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty^2 = \infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x^2 = (-\infty)^2 = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty^3 = \infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$
- $\lim_{x\to\infty} x + x^2 = \infty + \infty^3 = \infty + \infty = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+5} = \sqrt{\infty^2+5} = \sqrt{\infty+5} = \sqrt{\infty} = \infty.$
- $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^3+1} = \sqrt{(-\infty)^3+1} = \sqrt{-\infty+1} = \sqrt{-\infty}\nexists.$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{4} = \frac{\infty^3+1}{4} = \frac{\infty+1}{4} = \frac{\infty}{4} = \infty.$

Limites impliquant $1/\infty$, $1/0^+$ et $1/0^-$

On peut ajouter les règles suivantes à l'arithmétique de l'infini. Elles sont déduite du comportement de la fonction $f(x) = 1/x$.



Note : comme $\dfrac{1}{\infty} = 0$, on a que $\dfrac{k}{\infty} = k\frac{1}{\infty} = k \cdot 0 = 0$ pour n'importe quelle constante k.

Exemple 6.4.

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x^3}\right) = 2+\frac{3}{\infty^3} = 2+3\frac{1}{\infty} = 2+3(0) = 2$$

Exemple 6.5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(1/x)} = \frac{\infty}{0^+} = \infty\frac{1}{0^+} = \infty\cdot\infty = \infty.$$

On peut aussi voir que $\infty/0^+ = \infty$ de la manière suivante :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(1/x)} = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{x}{1}\right) = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty.$$

Ou encore, avec l'arithmétique de l'infini :

$$\frac{\infty}{1/\infty} = \infty\frac{\infty}{1} = \infty^2 = \infty.$$

On doit garder en tête que les formes $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$ et $\infty - \infty$ sont indéterminés – voir la section suivante.

6.1.2 Formes indéterminées

Nous avons déjà étudié les indéterminations de la forme « $\frac{0}{0}$. » Si on ajoute les limites quand $x \to \pm\infty$ et celles qui tendent vers $\pm\infty$, il y a de nouvelles formes indéterminée, c'est-à-dire qu'en évaluant certaines limites à l'aide de l'arithmétique de l'infini, on peut obtenir des expressions qui ne nous permettent pas de déterminer la valeur de la limite.

Formes indéterminées « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

Pour comprendre pourquoi il y a indétermination quand l'évaluation directe donne un résultat de la forme « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », comparons les trois situations suivantes :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}$$

En évaluant directement, on obtient une expression de la forme « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » pour chacune des trois limites.

Si on simplifie avant d'évaluer, on obtient cependant trois résultats très différents :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty\\
&\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}1=1\\
&\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0
\end{aligned}$$

On peut interpréter intuitivement ces résultats de la manière suivante : dans une forme « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », le numérateur et le dénominateur sont deux fonctions qui tendent vers l'infini. Si le dénominateur « va plus vite » à l'infini que le numérateur, le dénominateur l'emporte et le rapport tend vers 0. Si le numérateur « va plus vite » à l'infini que le dénominateur, le numérateur l'emporte et le rapport tend vers l'infini. Si les deux vont vers l'infini « à la même vitesse, » le rapport tend vers une constante.

Dans une telle forme d'indétermination, il faut mettre en évidence la plus grande puissance de x au numérateur et au dénominateur. On peut ensuite simplifier, ce qui revient à comparer les « vitesses » du dénominateur et du numérateur.

Exemple 6.6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+1}{3x^4+2x+3}=\frac{\infty}{\infty}.$$

En mettant en évidence la plus grande puissance de x au numérateur et au dénominateur, on trouve que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x+1}{3x^4+2x+4} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^4\left(3+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right) \frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}} \\
&= \left(\frac{1}{\infty}\right) \frac{1+\frac{1}{\infty^2}+\frac{1}{\infty^3}}{3+\frac{2}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^3}} \\
&= (0)\frac{1+0+0}{3+0+0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Exemple 6.7.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+3x+4}{3x^2+x+2} = \frac{\infty}{\infty}.$$

En mettant en évidence la plus grande puissance de x au numérateur et au dénominateur, on trouve que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+3x+4}{3x^2+x+2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(5+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} \\
&= \frac{5+\frac{3}{\infty}+\frac{4}{\infty^2}}{3+\frac{1}{\infty}+\frac{2}{\infty^2}} \\
&= \frac{5+0+0}{3+0+0} \\
&= \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Dans ces exemples, on peut voir que le résultat d'une telle limite est déterminé par le rapport des termes de plus grande puissance.

Forme « $\infty - \infty$ »

Comme dans la section précédente, une telle forme est indéterminée car la limite à évaluer peu donner des résultats différents selon la « vitesse » a laquelle les termes vont à l'infini. Considérons les trois limites suivantes :

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - x^2 \qquad \lim_{x\to\infty} x^2 - x^2 \qquad \lim_{x\to\infty} x^2 - x^3.$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - x^2 = \lim_{x\to\infty} x^3(1-1/x) = \infty(1-0) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 - x^2 = \lim_{x\to\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 - x^3 = \lim_{x\to\infty} x^3(1/x-1) = -\infty(0-1) = -\infty$$

On ne peut donc pas déterminer la valeur d'une limite uniquement sachant qu'elle est de la forme « $\infty - \infty$ ». Il faut transformer algébriquement la fonction pour pouvoir évaluer la limite.

Exemple 6.8.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = \frac{1}{(0^+)^2} - \frac{1}{(0^+)^3} = \infty - \infty$$

Pour lever l'indétermination, on met au dénominateur commun.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x^3} \\
&= \frac{(0)-1}{(0^+)^3} \\
&= \frac{-1}{0^+} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Noter que la mise au dénominateur commun est la clef pour évaluer cette limite.

Autres formes indéterminées Les formes

$$0\cdot\infty \qquad 1^\infty \qquad \infty^0 \qquad 0^0$$

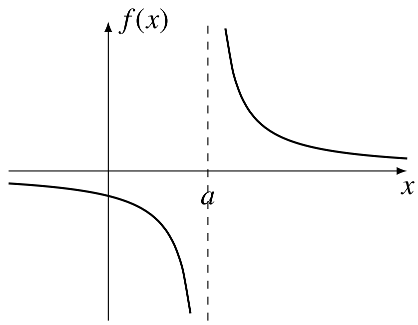
sont toutes indéterminée. Elles seront étudiées de manière détaillée en calcul intégral avec l'introduction de la *Règle de l'Hospital* permettant de lever ce type d'indétermination. La stratégie consiste à transformer les fonctions dont les limites donnent une de ces formes indéterminées en fonctions où les formes indéterminées sont « $\frac{0}{0}$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

6.2 Limites et asymptotes

6.2.1 Asymptotes verticales

Définition 6.3. Une fonction réelle f a comme **asymptote verticale** la droite $x = a$ si

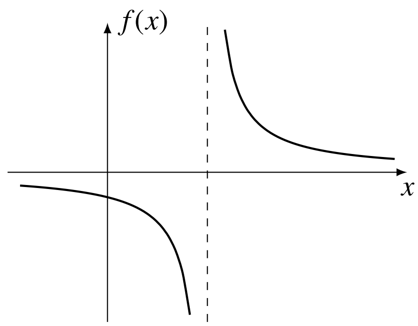
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$



De manière générale, une fonction de la forme $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ peut avoir une asymptote verticale quand $g(x) = 0$, c'est-à-dire pour les valeurs de x où il y a une division par zéro. Il n'y a pas toujours une asymptote verticale quand il y a division par zéro, mais c'est l'endroit où les chercher !

Exemple 6.9. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ a une asymptote verticale en $x = 2$ car

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$



Une fonction peut avoir plusieurs asymptotes verticales.

Exemple 6.10. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$ a une asymptote verticale en $x = 2$ et en $x = 3$ car

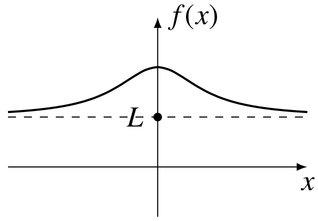
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{(0^+)(-1)} = \frac{1}{(0^-)} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{(1)(0^+)} = \frac{1}{(0^+)} = \infty.$$

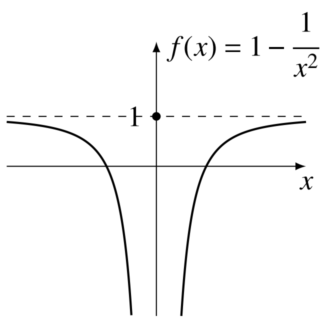
6.2.2 Asymptotes horizontales

Définition 6.4. Une fonction réelle f a comme **asymptote horizontale** la droite $y = L$ si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \text{ ou } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$



Exemple 6.11. Soit $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.



Déterminons algébriquement si f une asymptote horizontale.

$$\lim_{x\to\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{\infty^2} = 1 - 0 = 1$$

La droite $y = 1$ est donc une asymptote horizontale de la fonction f.

Exemple 6.12. Déterminons si $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{3x^2 + 2}$ a une asymptote horizontale.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x-4}{3x^2+2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}} \\
&= \frac{1-\frac{3}{\infty}-\frac{4}{\infty^2}}{3+\frac{2}{\infty^2}} \\
&= \frac{1-0-0}{3+0} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

La droite $y = 1/3$ est donc une asymptote horizontale de la fonction f.

Il y a généralement des asymptotes horizontale dans un quotient de fonction quand les deux fonctions sont « de même force » ou du même ordre quand $x \to \pm\infty$, ce qui fait en sorte que la limite du quotient ait une valeur $k \in \mathbb{R}$.

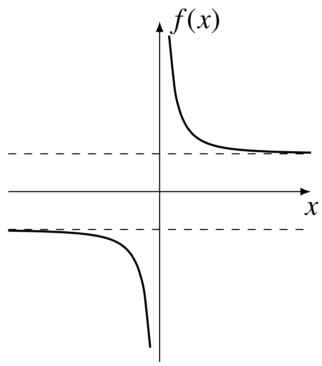
Note : f peut avoir deux asymptotes horizontales différentes, une quand $x \to \infty$ et une autre quand $x \to -\infty$.

Exemple 6.13. La fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ a deux asymptotes horizontales différentes.

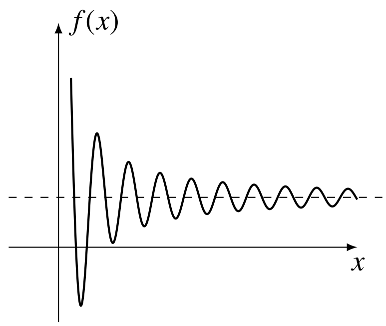
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\\
&= \sqrt{1+\frac{1}{\infty^2}}\\
&= \sqrt{1+0}\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\\
&= -\sqrt{1+\frac{1}{(-\infty)^2}}\\
&= -\sqrt{1+0}\\
&= -1
\end{aligned}$$

Les droites $y=1$ et $y=-1$ sont donc toutes deux des asymptotes horizontales de la fonction f. Voici le graphe de f.



Remarque 6.2. Une erreur fréquente est de penser qu'une asymptote est une droite de laquelle le graphe d'une fonction se rapproche *sans jamais la croiser*. Cette conception est erronée. Par exemple, pour la fonction suivante



la droite $y = 1$ est une asymptote horizontale, même si la fonction croise une infinité de fois l'asymptote !

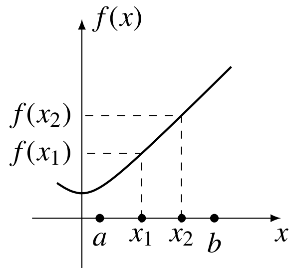
Pour information, la fonction dans cet exemple est $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} + 1$.

6.3 Croissance et extrémums

6.3.1 Croissance et décroissance

Définition 6.5. La fonction f est **croissante** sur $[a,b]$ si pour tout x_1 et x_2 dans l'intervalle $[a,b]$,

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

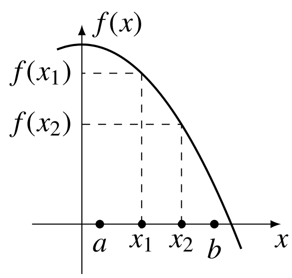


$f(x)$ est strictement croissante sur $[a,b]$ si pour tout x_1 et x_2 dans $[a,b]$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

La fonction f est **décroissante** sur un intervalle fermé $[a,b]$ si pour tout x_1 et x_2 dans l'intervalle $[a,b]$,

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$



$f(x)$ est strictement croissante sur $[a,b]$ si pour tout x_1 et x_2 dans $[a,b]$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Exemple 6.14. Pour illustrer l'utilisation de cette définition pour vérifier qu'une fonction est croissante sur une intervalle, montrons que $f(x) = x^2$ est croissante sur $[0,\infty[$.

Prenons deux nombres réels $x_1 < x_2$. On doit montrer que $f(x_1) \leq f(x_2)$, c'est à dire que $x_1^2 \leq x_2^2$.

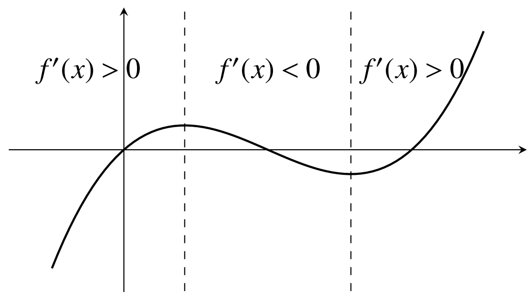
$$x_1^2 \leq x_2^2 \iff x_2^2 - x_1^2 \geq 0 \iff (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \geq 0$$

Or, $x_1 < x_2$ implique que $x_2 - x_1 > 0$. De plus, comme $x_1, x_2 \geq 0$, (car ils sont dans l'intervalle $[0,\infty[$), on a aussi que $x_2 + x_1 \geq 0$.

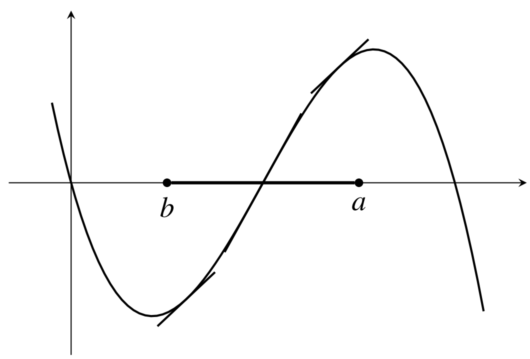
6.3.2 Croissance et dérivée première

L'intuition géométrique nous dit que la pente de la tangente à une fonction est liée à sa croissance. La pente est positive, la fonction doit être croissante, si la pente est négative, elle doit être décroissante.

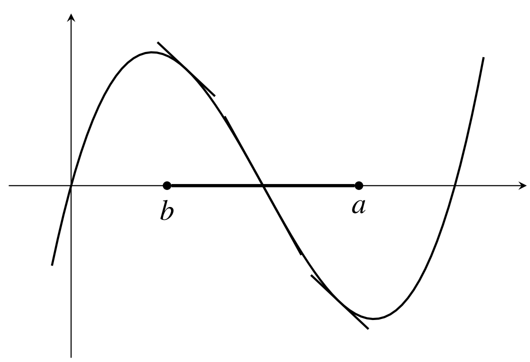
Comme la pente de la tangente est en fait $f'(x)$, la croissance est déterminée par le signe de $f'(x)$.



Théorème 6.1. Si $f'(x) \geq 0$ sur $[a,b]$, alors $f(x)$ est croissante sur $[a,b]$.



Si $f'(x) \leq 0$ sur $[a,b]$, alors $f(x)$ est décroissante sur $[a,b]$.



6.3.3 Extrémums

Les **extrémums** d'une fonction sont étroitement liés à la croissance et la la décroissance de la fonction. Le terme « extrémum » désigne à la fois les maximums et les minimums, les deux types de « valeurs extrêmes » d'une fonction.

Extrémums globaux

Un **extrémum global** est la valeur la plus grande ou la plus petite atteinte par une fonction sur l'ensemble de son domaine.

> **Définition 6.6.** Une fonction réelle f a un **maximum global** en $x = a$ si
>
> $$f(a) \geq f(x)$$
>
> pour tout x dans le domaine de f.
>
> Une fonction réelle f a un **minimum global** en $x = a$ si
>
> $$f(a) \leq f(x)$$
>
> pour tout x dans le domaine de f.

Note : on appelle aussi **extrémum absolu** un extrémum global

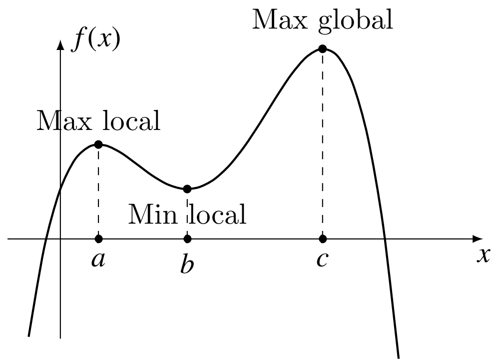
6.3.4 Extrémums locaux

Un **extrémum local** est la valeur la plus grande ou la plus petite atteinte par une fonction dans une région de son graphe, autour d'une valeur de x donnée.

> **Définition 6.7.** Une fonction réelle f a un **maximum local** en $x = a$ si
>
> $$f(a) \geq f(x)$$
>
> pour tout x assez près de a (c'est à dire dans un intervalle ouvert $]c, d[$ contenant a).
>
> Une fonction réelle f a un **minimum local** en $x = a$ si
>
> $$f(a) \leq f(x)$$
>
> pour tout x assez près de a (c'est à dire dans un intervalle ouvert $]c, d[$ contenant a).

Note : on appelle aussi **extrémum relatif** un extrémum global

Exemple 6.15. La fonction suivante a un maximum global (qui est aussi un maximum local) en $x = c$ et un max local (qui n'est pas global) en $x = a$. Elle a aussi un minimum local en $x = b$, mais aucun minimum global.

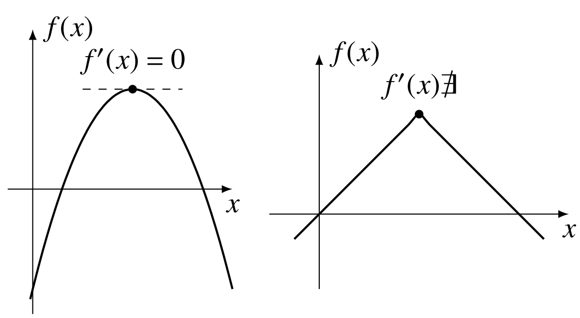


6.3.5 Dérivées et extrémums

Si déterminer où une fonction a un maximum ou un minimum local sur son graphe est simple, le déterminer à partir de la définition de la fonction est généralement beaucoup plus complexe. Cependant, la dérivée est d'une aide précieuse : là un une fonction a un extrémum, la tangente est horizontale ou il n'y a pas de tangente du tout. Cela nous donne un critère pour déterminer où sont les extrémums locaux d'une fonction.

> **Définition 6.8.** Une valeur critique c de la fonction f est un nombre c dans le domaine de f tel que
> $$f'(c) = 0 \text{ ou } f'(c)\nexists.$$

Théorème 6.2. (Fermat généralisé) Si $f(x)$ a un minimum ou un maximum local en $x = c$, alors c est une valeur critique de f.



Le théorème de Fermat généralisé nous permet de limiter la recherche des extrémum d'une fonction f aux valeurs où $f'(x)$ s'annule ou n'existe pas. La proposition suivante permet de déterminer le type d'extrémum en étudiant le signe de $f'(x)$.

Proposition 6.1. Si $f'(c) = 0$, alors

a) f a un maximum en $x = c$ si f' change de signe de positif à négatif en $x = c$

b) f a un maximum en $x = c$ si f' change de signe de négatif à positif en $x = c$

c) f a un point stationnaire si f' a le même signe à droite et à gauche de c.

Exemple 6.17. Déterminons les maximums et les minimums globaux de la fonction

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x + 1.$$

On commence par trouver les valeurs critiques de f.

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -1.$$

$f'(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, il n'y a donc pas de point critique où $f'(x)\nexists$.

On fait un tableau de signe pour $f'(x)$ pour déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de $f(x)$. Notons que $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, ce qui facilite la détermination du signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-1		3		∞
$(x+1)$		-	0	+	+	+	
$(x-3)$		-	-	-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	∞

La dérivée peut s'annuler à un point qui n'est ni un maximum, ni un minimum. On appelle un tel point un **point stationnaire**.

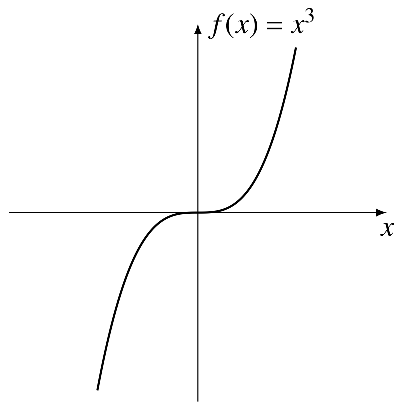
Exemple 6.18. Déterminons maximums et minimums de $f(x) = x^3$.

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Il n'y a aucun point où $f'(x)\nexists$.

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x) = 3x^2$	∞	+	0	+	∞
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	STA	$\nearrow$	∞

$f(x)$ a un point stationnaire en $x = 0$.



Exemple 6.19. On analyse la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-1}.$$

Le domaine de la fonction est $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$.

On a que

$$f'(x) = \frac{(2x-1)-2(x-1)}{(2x-1)^2} = \frac{1}{(2x-1)^2}.$$

Ainsi il est impossible que $f'(x) = 0$ puisque le numérateur est 1. Mais il y a une division par 0 quand $x = 1/2$. Donc la dérivé n'existe pas si $x = 1/2$; cette valeur est une valeur critique.

On a aussi que $\frac{1}{(2x-1)^2} \geq 0$.

Il y a une asymptote verticale en $x = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \to (\frac{1}{2})^+} \frac{x-2}{2x-1} = \frac{-3/2}{0^+} = -\infty$$

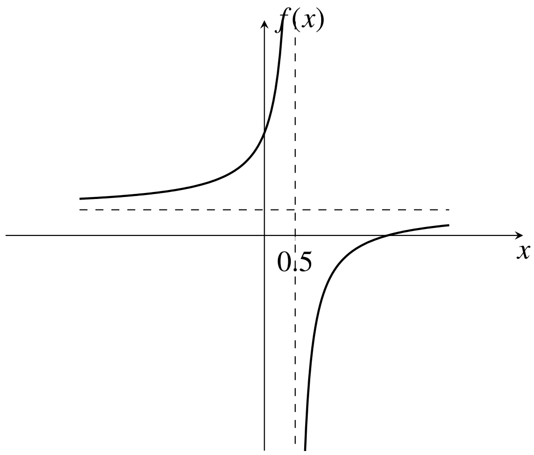
$$\lim_{x \to (\frac{1}{2})^-} \frac{x-2}{2x-1} = \frac{-3/2}{0^-} = +\infty$$

Il y a une asymptote horizontale en $x = 1/2$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1-2/x)}{x(2-1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1-2/x)}{(2-1/x)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{2x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1-2/x)}{x(2-1/x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(1-2/x)}{(2-1/x)} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		$1/2$		∞
$f'(x)$		$+$	$\nexists$	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\nexists$:AV	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$



Il est aussi possible que $f'(x) = \pm\infty$.

Exemple 6.20. Analysons la croissance et la décroissance de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

La dérivée de f est $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \text{ n'a pas de solution.}$$

Il y a une seule valeur de x où $f'(x)\nexists$: en $x = 0$.

La seule valeur critique est donc $x = 0$.

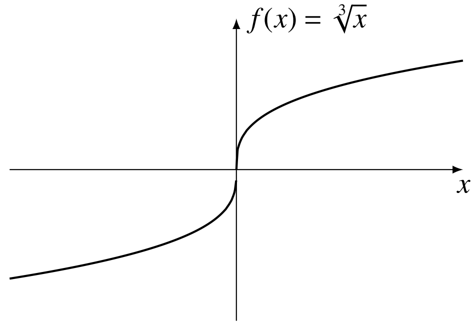
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0^+)^2}} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0^-)^2}} = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0^+)^2}} = \infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0^-)^2}} = \infty$$

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$	∞	$+$	∞	$+$	∞
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	T.V.	$\nearrow$	∞

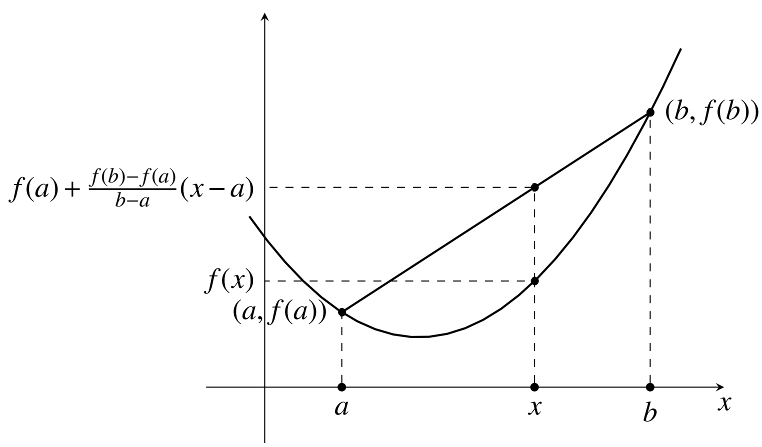


6.4 Concavité et points d'inflexion

6.4.1 Concavité

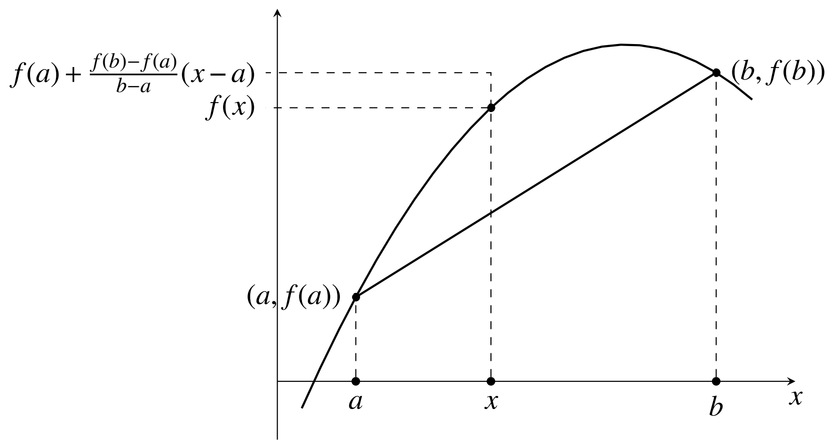
Définition 6.9. Une fonction f est **concave vers le haut** sur $[a,b]$ si les points du graphe de f sont en dessus de la corde reliant $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$. Plus précisément, si pour tout $x \in [a,b]$

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$



Une fonction f est **concave vers le bas** sur $[a,b]$ si les points du graphe de f sont au dessus de la corde reliant $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$. Plus précisément, si pour tout $x \in]a,b[$

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$



Remarque 6.3. l'équation de la droite qui passe par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

6.4.2 Dérivée seconde et concavité

Théorème 6.3.

a) Si $f''(x) > 0$ sur $[a,b]$, alors $f(x)$ est concave vers le haut sur $[a,b]$.

b) Si $f''(x) < 0$ sur $[a,b]$, alors $f(x)$ est concave vers le bas sur $[a,b]$.

Définition 6.10. Une valeur critique c pour la dérivée seconde de la fonction f est un nombre c dans le domaine de f tel que

$$f''(c) = 0 \text{ ou } f''(c)\nexists.$$

Exemple 6.21.

$$f(x) = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} - 2x + 1$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 2 = \frac{1}{4}(x+4)(x-2)$$

$$f''(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1)$$

Valeurs critiques pour f'' :

$$f''(x) = 0 \iff x = -1.$$

$$f''(x)\nexists : \text{ aucune valeur critique.}$$

Valeurs critiques pour f' :

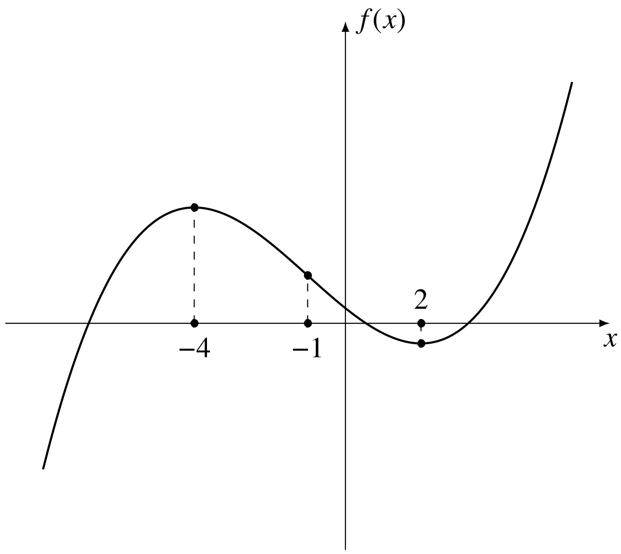
$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{4}(x+4)(x-2) = 0 \iff x = -4, x = 2.$$

$$f'(x)\nexists : \text{ aucune valeur critique.}$$

Tableau de signe et interprétation des signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$ pour la fonction.

x		-4		-1		2	
$(x-2)$	-	-	-	-	-	0	+
$(x+4)$	-	0	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	↗	MAX	↘	INF	↘	MIN	↗

Graphe de $f(x)$:



Théorème 6.4 (test de la dérivée seconde)**.**

a) Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) < 0$, alors f a un maximum en $x = c$.

b) Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) > 0$, alors f a un minimum en $x = c$.

c) Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) = 0$, on ne peut rien conclure.