

Notes de cours
Calcul différentiel

Yannick Delbecq, Automne 2019

Ces notes peuvent être distribuées ou modifiées selon les modalités de la licence
Creative commons BY+SA version 4.0 internationale.

Chapitre 1

Révision

1.1 Questions notations et abréviations

1.1.1 Ensembles

Un **ensemble** est une collection d'éléments. Si x est un élément de de l'ensemble A , on écrit $x \in A$. Sinon, on écrit $x \notin A$. On ne tient pas compte des répétitions dans les ensembles : $\{1, 2, 3\}$ est le même ensemble que $\{1, 2, 3, 3, 3, 3\}$!

On peut décrire un ensemble de plusieurs manières.

Compréhension Par un condition qui doit être satisfaite pour qu'un x soit élément de l'ensemble.

$$\{x \mid \text{condition sur } x\}$$

Extension En donnant une liste des éléments de l'ensemble

$$\{-2, 1, \pi, 10\}$$

Un même ensemble peut être décrit de plusieurs manières :

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ est un nombre naturel pair plus petit que } 10\}$$

Les ensembles A et B sont identiques car ils contiennent les mêmes éléments. On écrit $A = B$ pour dire que deux ensembles sont **égaux**, c'est à dire qu'ils contiennent les mêmes éléments.

Cardinalité Un ensemble peut être **infini** comme l'ensemble des nombres pairs ou celui des nombres premiers, ou **fini** comme l'ensemble des facteurs entier du nombre 12. On appelle la taille d'un ensemble sa **cardinalité**.

Opérations de base sur les ensembles

Union

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Intersection

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Différence

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

Sous-ensemble Si chaque élément d'un ensemble A est aussi un élément d'un ensemble B , alors on dit que A est un **sous-ensemble** de B . On écrit alors

$$A \subseteq B.$$

Ne pas confondre \in (« est élément de ») avec \subseteq (« est sous-ensemble de »).

Ensembles souvent utilisés dans ce cours Certains ensembles sont très importants en mathématiques et on des noms et notations standard. Dans ce cours, nous utiliserons régulièrement les ensembles de nombres suivants :

\mathbb{N} : les nombres naturels ;

\mathbb{Z} : les nombres entiers ;

\mathbb{Q} : les nombres rationnels ;

\mathbb{R} : les nombres réels.

Ces ensembles importants seront décrits plus loin. Il existe d'autres ensembles de nombres utilisés ou étudiés en mathématiques que nous ne verrons pas dans ce cours : les nombres complexes (\mathbb{C}), les nombres algébriques (\mathbb{A}), les nombres transcendants, et plusieurs autres.

Nous utiliserons aussi les intervalles de nombres réels :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \text{ (intervalle } \mathbf{fermé})$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \text{ (intervalle } \mathbf{ouvert})$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

1.2 Logique et abréviations

« **non- A** » Négation de A . Diverses notations sont utilisées, par exemple $\neg A$

« **si A , alors B** » Notation : $A \implies B$. A est l'**hypothèse**, B est la **conclusion**. On dit aussi que A est une condition suffisante pour B et que B est une condition nécessaire pour A .

« **A si et seulement si B** » Notation : $A \iff B$ ou A ssi B . $A \iff B$ est équivalent à dire que $A \implies B$ et $B \implies A$.

« $\forall A$ » « Pour tout A . » On écrit par exemple

$$\forall n \in \mathbb{Z}. n \text{ est pair ou impair}$$

pour dire qu'un nombre entier quelconque est pair ou impair.

« $\exists A$ » « Il existe A ». On écrit par exemple

$$\exists n \in \mathbb{Z}. n \text{ est un nombre premier}$$

pour dire qu'il y a (au moins) un nombre entier qui est premier.

Notons que, donné par écrit, l'énoncé d'une implication n'est pas toujours exactement la forme « si ... alors ... ». Par exemple :

« Un nombre entier est divisible par 2 s'il se termine par 0,2,4,6 ou 8 »
est le même énoncé que

« S'il se termine par 0,2,4,6 ou 8, un nombre entier est divisible par 2. »

En utilisant le symbole \implies , cela revient à dire que

$$A \implies B \text{ et } B \iff A$$

sont des énoncés équivalents.

La **contraposée** d'une implication de la forme $A \implies B$ est l'implication $\text{non-}B \implies \text{non-}A$. La contraposée est équivalente à l'implication originale.

Exemple 1.1. L'énoncé

« Un nombre entier n'est pas divisible par 2 s'il ne se termine pas par 0,2,4,6 ou 8. »

est la contraposée de

« Si un nombre entier se termine par 0,2,4,6 ou 8, alors il est divisible par 2. »

Exemple 1.2. L'énoncé

« Si un nombre est premier, alors il n'a pas de diviseurs autre que 1 et lui-même. »

est la contraposée de

« Si un nombre a d'autres diviseurs que 1 et lui-même alors il n'est pas premier. »

Une **tautologie** est une affirmation qui est toujours vraie pour des raisons logiques.

Exemple 1.3. Les énoncés des formes suivantes sont toujours vrais.

$$A \implies A$$

« Si n est un nombre entier, alors n est un nombre entier. »

$$A \text{ et } B \implies A$$

« Si n est un nombre entier et q est un nombre rationnel, alors n est un nombre entier. »

$$A \implies B \text{ ou non-}B$$

« Si n est un nombre entier, alors n est pair ou n est impair. »

1.2.1 Division du discours mathématique

Pour clarifier la lecture, un texte est normalement divisés en plusieurs parties de différents niveaux hiérarchiques : chapitres, sections, paragraphes, phrases, etc. Pour clarifier la lecture d'un texte mathématique, on utilise en plus des divisions spéciales associées au différents éléments du discours mathématique.

Axiome Propriété qui est acceptée sans démonstration, considérée comme assez évidente pour être le fondement d'une théorie mathématique.

Théorème Résultat important, dont la validité est établie par une démonstration ou une preuve, et qui a une grande importance dans un domaine donné des mathématiques étant donné ses multiples conséquences. Abréviations en classe : « thm ».

Proposition Résultat important, dont la validité est établie par une démonstration ou une preuve. Abréviations en classe : « prop ».

Lemme Résultat servant à démontrer un ou plusieurs autres résultats.

Corrolaire Résultat qui est déduit facilement d'un résultat précédant, une conséquence immédiate d'un théorème ou d'une proposition.

Preuve (ou démonstration) Suite de déductions logiques dont la conclusion est un théorème, une proposition ou un lemme. Une preuve répond à la question « pourquoi c'est vrai. » On indique habituellement la fin d'une preuve à l'aide de CQFD (« ce qu'il fallait démontrer »), QED (« *quod erat demonstrandum* », CQFD en latin) ou par un signe comme « \square ». Il existe plusieurs formes de preuves (directes, par induction, par contradiction ou par l'absurde, etc.) que nous verrons à l'œuvre au cours de la session.

Note importante : « démontrer » ne veut pas dire « donner un exemple ». Un cas particulier n'établit pas la vérité pour tous les cas.

Cependant, un seul cas particulier peut réfuter une affirmation générale. On appelle un tel exemple un **contre exemple**.

Exemple 1.4. Le fait que

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

est un cas particulier qui ne démontre pas que

$$x^2 + y^2 = z^2$$

pour n'importe quel nombres x, y et z . Par exemple,

$$2^2 + 3^2 \neq 4^2.$$

Ce dernier exemple démontre cependant que

$$x^2 + y^2 = z^2$$

n'est pas toujours vrai!

Exemple 1.5. Démontrer à l'aide d'un contre-exemple qu'il n'est pas vrai que

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2$$

pour tout choix de nombres entiers x, y et z .

On peut prendre le cas particulier $x = 2$ et $y = 3$.

$$(2+3)^2 = 25, \text{ mais } 2^2 + 3^2 = 13.$$

1.3 Ensembles de nombres

Nombres naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Un principe important qui est souvent considéré comme une partie essentielle de la définition des nombres naturels :

Proposition 1.1 (principe d'induction). Si $A(n)$ est une proposition impliquant une variable n représentant un nombre entier

- (1) est vraie pour le nombre naturel $n = 0$ et
- (2) lorsqu'elle est vraie pour $n > 0$ et ses prédécesseurs, alors elle l'est aussi pour $n + 1$,

alors la proposition est vraie pour tout n .

Nombres entiers

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Quelques concepts liés aux nombres naturels et aux nombres entiers.

Définition 1.1. n est un nombre pair s'il existe un nombre $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k.$$

Définition 1.2. n est un nombre impair s'il existe un nombre naturel $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k + 1.$$

Cela est peut être contre-intuitif, mais l'essence de la division est une propriété des nombres entiers.

Théorème 1.1 (Division Euclidienne). Pour tous nombres entiers n et d , il existe deux nombres entiers uniques q (quotient) et r (reste) tels que $0 \leq r < d$

$$n = qd + r.$$

Exemple 1.6. Si $n = 10$ et $d = 4$, alors $q = 2$ et $r = 2$ sont les quotients et restes de division.

$$10 = 2(4) + 2.$$

Le théorème suivant est un autre des plus importants résultats concernant les nombres entiers.

Théorème 1.2 (fondamental de l'arithmétique). Tout nombre entier n peut se factoriser de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme un produit de facteurs premiers.

Nombres rationnels

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$$

Une propriété fondamentale pour la manipulation des fractions est l'existence d'une unique version simplifiée de chaque fraction :

Théorème 1.3. Pour tout nombre rationnel $\frac{m}{n}$, avec $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$ et $m \neq 0$, il existe un unique $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ telle que

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$$

et que a et b n'ont pas de facteurs communs.

On peut caractériser les nombres rationnels par leur développement décimal.

Théorème 1.4. Un nombre réel a peut s'écrire comme une fraction si et seulement si son développement décimal est périodique.

Enfin, une dernière propriété importante des nombres rationnels est le fait qu'entre deux nombres rationnels donnés, il y a toujours un nombre rationnel entre les deux.

Théorème 1.5. Soient a et b deux nombres rationnels différents. Il existe toujours un autre nombre rationnel c compris strictement entre a et b : $a < c < b$.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de prendre le nombre rationnel « moyen »

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Nombres réels En mathématiques, il y a plusieurs manières de définir les nombres réels, mais celle-ci est probablement celle qui est la plus familière :

$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ a un développement décimal quelconque, possiblement infini non-périodique}\}$

Les nombres peuvent être combinés à l'aide des opérations de base : addition, soustraction, multiplication, division, exposants et racines. Quand une expression combine plusieurs opérations, on doit les effectuer dans l'ordre conventionnel déterminé par la « priorité des opérations ».

On suppose que les opérations de base ont les propriétés vu au secondaire (voir formulaire d'algèbre) : associativité, distributivité, commutativité, etc.

Un fait important au sujet des nombres réels, c'est qu'ils comportent des nombres ne pouvant s'écrire sous forme de fraction. Il est généralement assez difficile de démontrer qu'un nombre n'est pas un nombre rationnel. Voici un des exemples les plus simple et la première preuve historique de l'existence de nombres qui ne sont pas des fractions.

Théorème 1.6. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Lemme 1.1.

$$n \text{ pair} \iff n^2 \text{ pair.}$$

Preuve du lemme. (\implies) Si n est pair, alors n est le double d'un certain nombre k . On peut donc écrire que $n = 2k$. Dans ce cas,

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

ce qui montre que n^2 est bien le double d'un nombre entier.

(\impliedby) On démontre la contraposée : si n est impair, alors n^2 est aussi impair. Supposons que n est impair ; il peut donc s'écrire comme $n = 2k + 1$ pour un certain nombre k . Dans ce cas,

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

ce qui établit que n^2 est impair. □

Preuve du théorème. Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Nous allons montrer que cette hypothèse mène à un résultat absurde et qu'elle ne peut pas être vraie, donc que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Si $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, il existe deux entiers a et $b \neq 0$ tel que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Comme on peut toujours simplifier une fraction, on peut simplifier $\frac{a}{b}$ pour obtenir une fraction simplifiée $\frac{m}{n}$. On a donc

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

où m et n n'ont aucuns facteurs communs.

En multipliant chaque membre de l'égalité $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ par n , on obtient

$$n\sqrt{2} = m.$$

En mettant au carré, on a que

$$n^2(2) = m^2$$

m^2 doit donc être pair. Par le lemme précédant, on a que m doit être pair lui aussi. m peut donc s'écrire comme $m = 2k$ pour un certain entier k . En remplaçant m par $2k$ dans l'égalité précédente

$$n\sqrt{2} = m,$$

on obtient que

$$n\sqrt{2} = 2k.$$

On met au carré pour obtenir

$$2n^2 = 4k.$$

En divisant par 2, on trouve

$$n^2 = 2k.$$

n^2 est donc pair, ce qui implique par le lemme précédant que n est pair lui aussi.

La fraction $\frac{m}{n}$ peut donc être simplifiée car le numérateur m et le dénominateurs n sont tous les deux pairs! Cela contredit le fait que $\frac{m}{n}$ est une fraction simplifiée. L'hypothèse « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel » est donc fausse et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. \square

1.4 Algèbre

L'objectif principal de l'algèbre élémentaire est de déterminer une valeur inconnue dans une relation numérique. On peut poser ce genre de questions sous forme « écrite », par exemple

(Problème vieux de quelques millénaires figurant sur la tablette cunéiforme AO 8862)

J'ai multiplié longueur et largeur pour obtenir l'aire. J'ai additionné ce par quoi la longueur dépasse la largeur à l'aire et j'ai obtenu 183. La somme de la longueur et de la largeur est 27. Quelles sont la longueur, la largeur et l'aire ?

Les géomètres et mathématiciens ont développé au fil du temps différentes manières de représenter ce genre de problème afin de les résoudre plus facilement. La notation moderne, malgré le fait qu'elle exige plusieurs années d'entraînement, est de loin la plus efficace. Si x est la longueur et y la largeur, le problème se traduit en notation moderne comme

$$\begin{aligned}x - y + xy &= 183 \\x + y &= 27\end{aligned}$$

L'algébriste moderne applique ensuite quelques principes simples de manière astucieuse pour déterminer les valeurs inconnues. On peut même décrire la méthode de solution avec ces techniques : (1) exprimer y en fonction de x dans la seconde équation : $y = 27 - x$ (2) substituer la valeur trouvée dans la première équation $x - (27 - x) + x(27 - x) = 183$ (3) résoudre l'équation obtenue en regroupant : $-x^2 + 29x - 210 = 0$. On trouve deux solutions : $x = 14$ et $x = 15$, et donc les valeurs de y correspondantes : $y = 13$ et $y = 12$. L'aire correspondante est respectivement 182 et 180.

Si la solution de cet ancien problème vous semble complexe, en comparant avec une solution n'utilisant aucune des idées modernes comme des variables, la substitution, isoler, la formule quadratique, etc, la solution serait beaucoup plus complexe.

1.4.1 Principes généraux

Voici les principes les plus utilisés dans les raisonnements algébriques :

(Propriétés des variables) Une variable représentant un nombre inconnu d'un certain type (entier, rationnel, nombre réel) a les mêmes propriétés que les nombres du même type. On peut y appliquer les mêmes opérations.

(Transitivité de l'égalité) $A = B$ et $B = C$ alors $A = C$.

(Application d'une opération) Si $f(x)$ est une opération (fonction), on a que

$$A = B \implies f(A) = f(B).$$

Si f est une opération inversible, alors $A = B \iff f(A) = f(B)$.

Si $f^{-1}(x)$ est l'opération inverse de $f(x)$, alors

$$f(A) = B \iff A = f^{-1}(B).$$

(Substitution) Si $A(x) = B(x)$ alors $A(C) = B(C)$, où C est une expression algébrique quelconque substituée à la place de la variable x .

Transitivité La transitivité de l'égalité est très souvent utilisé sans que l'on s'en rende compte ou sans que l'on mentionne explicitement son utilisation.

Exemple 1.7. Par exemple, si on écrit

$$(x+2)^2 = (x+2)(x+2) = x(x+2) + 2(x+2) = x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4.$$

On utilise (plusieurs fois) la *transitivité de l'égalité* pour conclure que

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4.$$

Note : on écrit souvent verticalement une telle suite d'égalité quand elle est trop longue :

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= (x+2)(x+2) \\ &= x(x+2) + 2(x+2) \\ &= x^2 + 2x + 2x + 4 \\ &= x^2 + 4x + 4.\end{aligned}$$

Substitution On utilise le principe de *substitution* quand on prend une identité algébrique simple pour en trouver une plus complexe.

Exemple 1.8. Voici l'identité générale pour les différences de carré

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y),$$

Cette identité est vraie peu importe les valeurs de x et y . On peut déduire une nouvelle identité en *substituant* (par exemple) x^2 à x et $2x$ à y :

$$(x^2)^2 - (2x)^2 = ((x^2) - (2x))((x^2) + (2x)),$$

Cette dernière égalité est donc déduite de la première à l'aide du principe de substitution.

En simplifiant l'identité obtenue, on obtient que

$$x^4 - 4x^2 = (x^2 - 2x)(x^2 + 2x).$$

Application d'une même opération L'application d'une même opération sur chaque membre d'une égalité est probablement le premier principe algébrique appris

dans les cours d'algèbre élémentaire et est une généralisation du principe ayant donné son nom à l'algèbre.

Exemple 1.9. Si on a que $2x = 5$, on obtient que

$$\frac{2x}{2} = \frac{5}{2}$$

en appliquant l'opération « diviser par deux » sur chaque membre de l'égalité initiale.

Comme « diviser par deux » est une opération inversible (dont l'inverse est « multiplier par deux », on peut écrire

$$2x = 5 \iff \frac{2x}{2} = \frac{5}{2}.$$

L'opération « mettre au carré » n'est pas inversible. Par exemple, si on met -2 au carré, on obtient 4 . L'opération inverse est ambiguë : on pourra obtenir un carré de 4 à partir de 2 ou de -2 .

Si on applique une opération non inversible, comme mettre au carré, on ne peut pas obtenir une équivalence entre les identités. Par exemple, l'implication

$$2x = 5 \implies 4x^2 = 25$$

est vraie, mais l'équivalence

$$2x = 5 \iff 4x^2 = 25$$

est fausse !

1.4.2 Propriétés algébriques utiles

Les identités algébriques suivantes sont très souvent utilisées. On les suppose connues. Elles peuvent être démontrées par des preuves directes à l'aide de manipulations algébriques simples.

$$AB + AC = A(B + C) \quad (\text{mise en évidence simple})$$

$$AC + AD + BC + BD = (A + B)(C + D) \quad (\text{mise en évidence double})$$

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \quad (\text{rationalisation})$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) \quad (\text{différence de carrés})$$

$$(\sqrt{A} \pm \sqrt{B})(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}) = A - B \quad (\text{conjugué})$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2) \quad (\text{différence de cubes})$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad (\text{binôme carré parfait})$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \quad (\text{développement du binôme degré 3})$$

$$(A+B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4 \quad (\text{développement du binôme degré 4})$$

Triangle de Pascal Le triangle de Pascal est un truc permettant de déterminer rapidement les coefficients du développement d'un binôme de degré quelconque : si on développe une expression de la forme $(A+B)^n$, les coefficients du développement sont donnée par la n -ième ligne du triangle de Pascal.

Triangle de Pascal

$$\begin{array}{rcccccc}
 (A+B)^0 & & & & & & 1 \\
 (A+B)^1 & & & & & & 1 & 1 \\
 (A+B)^2 & & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 (A+B)^3 & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 (A+B)^4 & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 (A+B)^5 & & & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 (A+B)^6 & & & & & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
 \vdots & & & & & & & & & & & & \vdots
 \end{array}$$

Exemple 1.10. Le développement de $(x+2)^5$ a la forme suivante :

$$C_0x^5 + C_1x^42^1 + C_2x^32^2 + C_3x^22^3 + C_4x^12^4 + C_52^5$$

Les coefficients C_0, C_1, \dots, C_5 sont donnés par la ligne correspondant à $(A+B)^5$ du triangle de Pascal, soit

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1.$$

On a donc que

$$(x+2)^5 = x^5 + 5x^42 + 10x^32^2 + 10x^22^3 + 5x2^4 + 2^5$$

La preuve que les coefficients données par le triangle de Pascal sont bien ceux des développement du binôme fût le premier exemple d'une preuve utilisant explicitement le principe d'induction sur les nombres naturels.

1.4.3 Propriétés fréquemment utilisées pour résoudre des équations

$$(EQ1) \quad ABC = 0 \implies A = 0 \text{ ou } B = 0 \text{ ou } C = 0$$

$$(EQ2) \quad \frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \text{ et } B \neq 0$$

$$(EQ3) \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC \text{ et } B, D \neq 0$$

Le premier de ces principes permet de résoudre des équations sous forme factorisée. Par exemple, si on a l'équation

$$(x-2)(x+1) = 0$$

On a une expression de la forme $AB = 0$. Il faut donc que $A = 0$ ou que $B = 0$. Dans ce cas particulier, il faut donc que

$$x-2 = 0 \text{ ou } x+1 = 0.$$

Cela implique que $x = 2$ ou $x = -1$.

Ce principe s'applique à un produit d'un nombre de facteurs aussi grand que l'on veut : si un produit de facteurs est nul, un des facteurs doit être nul. Ainsi, les zéros de

$$(x-3)(x+\sqrt{33})(x-\log_2(3)) = 0$$

sont $x = 3$, $x = -\sqrt{33}$ et $x = \log_2(3)$.

La simplicité de la solution d'une équation factorisée est évidente si on la compare avec même équation non-factorisée :

$$x^3 - x^2 \log_2(3) + \sqrt{33}x^2 - \sqrt{33}x \log_2(3) - 3x^2 + 3x \log_2(3) - 3\sqrt{33}x + 3\sqrt{33} \log_2(3) = 0.$$

C'est une des raisons principales pour lesquelles les techniques de factorisations de polynômes sont importantes : elles permettent de prendre une équation polynomiale de degré élevé et de la transformer (en la factorisant et en utilisant EQ1) en plusieurs équations de degrés moins élevés (donc plus faciles à résoudre).

Le second principe permet de résoudre facilement des expressions rationnelles factorisée :

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x-6} = 0$$

a comme solution les zéros de $(x-3)(x+1)$, soit $x = 3$ et $x = -1$. Seul le numérateur détermine les zéros d'une expression de la forme A/B . Cependant, le dénominateur ne peut pas s'annuler car il ne peut par y avoir de division par zéro. Ainsi, dans une équation comme

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x^2+2x+1} = 0$$

$x = 3$ et $x = -1$ sont les zéros du numérateur, mais $x = -1$ annule le dénominateur (ce qui cause une division par zéro!). La valeur $x = -1$ n'est donc pas un zéro de l'équation.

1.4.4 Opérations inverses usuelles

En algèbre, on utilise souvent le « principe de la balance » : on peut faire la même opération de « chaque côté » d'une égalité. Les opérations inverses les plus souvent utilisées sont indiquées dans la liste suivante, avec les restrictions faisant en sorte que les opérations soient inversibles.

$$A + C = B \iff A = B - C$$

$$CA = B \iff A = \frac{1}{C}B \text{ si } C \neq 0.$$

$$A^n = B \implies A = \pm \sqrt[n]{B} \text{ si } n \text{ pair.}$$

$$A^n = B \iff A = \sqrt[n]{B} \text{ si } n \text{ impair.}$$

$$b^A = B \iff \log_b(B) = A \text{ si } B > 0.$$

$$\sin(A) = B \iff A = \arcsin(B) \text{ si } -\frac{\pi}{2} \leq A \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(A) = B \iff A = \arccos(B) \text{ si } 0 \leq A \leq \pi$$

$$\tan(A) = B \iff A = \arctan(B) \text{ si } -\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2}$$

1.4.5 Factorisation

Comme nous l'avons dit précédemment, la factorisation est une stratégie importante pour simplifier une équation afin de la résoudre.

Exemple 1.11. Considérons l'équation

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

En factorisant le membre de gauche, on obtient

$$(x + 1)(x - 5) = 0.$$

Comme un produit de facteur est nul si un de ses facteur est nul, soit $(x + 1) = 0$, soit $(x - 5) = 0$. Les solutions sont donc $x = -1$ ou $x = 5$.

On voit dans cet exemple que chaque facteur de degré un, donc de la forme $x - a$, correspond à une solution de l'équation originale. Il y a en fait une correspondance entre les facteurs de degré 1 et les zéro : si $x = a$ est un zéro d'une équation polynômiale $P(x) = 0$, alors $(x - a)$ est un facteur de $P(x)$.

Le résultat suivant dit que chaque zéro d'un polynôme est lié à un « facteur coupable » lui correspondant et réciproquement.

Théorème 1.7 (Factorisation). Si $P(x)$ est un polynôme quelconque, alors a est un zéro de $P(x)$ si et seulement si $(x - a)$ est un facteur de $P(x)$.

Autrement dit :

$$P(a) = 0 \iff P(x) = (x - a)Q(x).$$

Sous forme de « slogan » :

« zéro si et seulement si facteur (de degré 1). »

Exemple 1.12. Si $P(x) = x^2 - x - 2$, on a que

$$P(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0.$$

La valeur $a = 2$ est donc un zéro de $P(x)$. Le théorème de factorisation dit que $P(x)$ doit avoir $(x - 2)$ (c'est à dire le facteur $(x - \text{le zéro})$) comme facteur. Si on divise

$P(x) = x^2 - x - 2$ par $(x - 2)$, on trouve que

$$P(x) = (x - 2)(x + 1),$$

ce qui est bien de la forme donnée par le théorème :

$$P(x) = (x - a)Q(x).$$

Exemple 1.13. La valeur $x = 1$ est un zéro de $x^3 - 1$. On sait donc par le théorème de factorisation que $x^3 - 1 = (x - 1)Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme à déterminer. On peut toujours déterminer $Q(x)$ en divisant :

$$Q(x) = \frac{x^3 - 1}{(x - 1)}.$$

En divisant, trouve que $Q(x) = x^2 + x + 1$, et donc

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Démonstration. Comme le résultat à démontrer est de la forme « $A \iff B$ », on fait les démonstrations de chacune des deux implications $A \implies B$ et $A \impliedby B$.

(\implies) Supposons que $P(a) = 0$. On peut diviser $P(x)$ par $(x - a)$ pour obtenir une expression de la forme

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R(x),$$

où $R(x)$ est le reste de la division et $Q(x)$ le quotient.

Le degré de $R(x)$ doit être zéro car on divise par le polynôme $(x - a)$ qui est de degré 1. (Le degré du reste est toujours strictement inférieur au degré du polynôme par lequel on divise.) Comme un polynôme de degré 0 est en fait une constante $R \in \mathbb{R}$, en divisant on a donc réécrit $P(x)$ comme suit :

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R$$

Si on évalue chaque membre de cette dernière égalité en a , on obtient

$$P(a) = (a - a)Q(a) + R$$

Par hypothèse, $P(a) = 0$. De plus, le facteur $a - a$ est toujours nul. On a donc

$$0 = 0 + R.$$

La seule valeur de R satisfaisant cette équation est zéro. On a donc établi que

$$P(x) = (x - a)Q(x) + 0 = (x - a)Q(x),$$

c'est à dire que $(x - a)$ est un facteur de $P(x)$.

(\Leftarrow) Pour démontrer la réciproque, on fait l'hypothèse que $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$. Dans ce cas, on peut écrire $P(x)$ comme un produit de facteur de la forme

$$P(x) = (x-a)Q(x)$$

où $Q(x)$ est le quotient de la division de $P(x)$ par $(x-a)$.

On veut montrer que $P(a) = 0$. Il suffit d'évaluer la forme factorisée :

$$P(a) = (a-a)Q(a) = (0)Q(a) = 0. \quad \square$$

On peut conclure du théorème de factorisation que pour un polynôme $P(x)$,

$$P(a) \neq 0 \iff P(x) \text{ n'a pas de facteur de la forme } (x-a).$$

Cela permet de vérifier qu'un polynôme n'a pas de facteur de la forme $x-a$ sans chercher montrer directement que la factorisation est impossible. Il suffit plutôt d'évaluer $P(a)$.

Théorème 1.8. Les polynômes réels irréductibles sont de l'une des deux formes suivantes :

- degré 1 de la forme $c(x-a)$ (a est nécessairement un zéro)
- degré 2 de la forme $ax^2 + bx + c$, où $b^2 - 4ac < 0$. (polynôme de degré deux sans zéros).

Théorème 1.9 (Théorème fondamental de l'algèbre). Tout polynôme réel peut s'écrire comme un produit d'une constante réelle et de polynômes irréductibles, produit unique à l'ordre des facteurs près.

1.5 Fonction, graphe et domaine

Définition 1.3. Une **fonction** $f: A \rightarrow B$ allant d'un ensemble A à un autre ensemble B est une règle quelconque associant à des éléments a de l'ensemble A un unique élément b de l'ensemble B .

On dénote $f(a)$ l'élément de l'ensemble B associé à a .

Définition 1.4. Le **domaine** d'une fonction $f: A \rightarrow B$ est l'ensemble des éléments de A où $f(a)$ est défini. Notation :

$$\text{dom}(f) = \{a \mid f(a) \text{ est défini}\}.$$

Les fonctions qui seront étudiées dans ce cours sont des **fonctions réelles**, c'est-à-dire les fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

On détermine le domaine d'une fonction réelle définie à l'aide des opérations dites « élémentaires » en utilisant les principes suivants.

(~~$\neq 0$~~) Il ne peut y avoir de division par zéro.

$$\frac{A}{B} \text{ est défini } \iff B \neq 0$$

(~~$\sqrt{\leq 0}$~~) Il ne peut y avoir de racine paire de nombre négatifs.

$$\sqrt{A} \text{ est défini } \iff A \geq 0$$

(~~$\log_b(\leq 0)$~~) Le logarithme d'un nombre négatif ou nul n'est pas défini (peu importe la base)

$$\log_b(A) \text{ est défini } \iff A > 0$$

Exemple 1.14. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x-3}$. Le domaine de f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ où $f(x)$ est défini. Comme il y a une racine carrée dans la définition de f , on a que

$$\begin{aligned} f(x) \text{ def } &\iff \sqrt{2x-3} \text{ def} \\ &\iff 2x-3 \geq 0 \\ &\iff 2x \geq 3 \\ &\iff x \geq 3/2 \end{aligned}$$

On a donc que $f(x)$ est défini pour $x \geq 3/2$. Le domaine est donc

$$\text{dom}(f) = [3/2, \infty[.$$

On détermine le domaine d'une fonction définie par composition de plusieurs fonction élémentaires en vérifiant que chacune des opérations utilisée est définie.

Exemple 1.15. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x-1}}$. Le domaine de f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ où $f(x)$ est défini. Comme il y a une racine carrée dans la définition de f , on a que

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} \text{ def } &\iff x-1 \geq 0 \\ &\iff x \geq 1 \end{aligned}$$

On a donc que pour que $f(x)$ soit défini, il faut que $x \geq 1$.

Il y a une seconde opération problématique, la division.

$$\begin{aligned}\frac{3x}{\sqrt{x-1}} \text{ est défini} &\iff \sqrt{x-1} \neq 0 \\ &\iff x-1 \neq 0 \\ &\iff x \neq 1\end{aligned}$$

La fonction est donc définie quand $x \geq 1$ et $x \neq 1$. En combinant ces deux conditions, on a donc

$$\text{dom}(f) =]1, \infty[.$$

Comme ces raisonnements comportent souvent des inégalités, il faut faire attention au fait que ces inégalités ne peuvent pas être manipulées comme des égalités.

Exemple 1.16. Trouvons le domaine de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$.

La seule opération pouvant limiter le domaine de la fonction est la racine carrée.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 4x - 5} \text{ est défini} &\iff x^2 - 4x - 5 \geq 0 \\ &\iff (x-5)(x+1) \geq 0\end{aligned}$$

Le produit $(x-5)(x+1)$ est positif si ses deux facteurs sont de même signe. On doit donc traiter des deux cas.

Si les deux facteurs sont positifs, on a

$$x - 5 \geq 0 \text{ et } x + 1 \geq 0.$$

Dans ce cas, $x \geq 5$ et $x \geq -1$. Les deux conditions sont satisfaites quand $x \geq 5$.

Si les deux facteurs sont négatifs ou nuls, on a

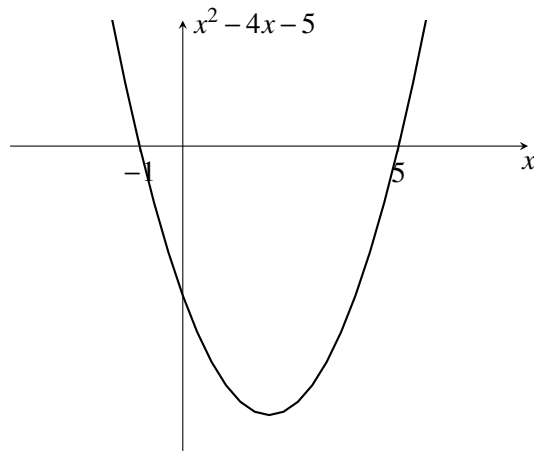
$$x - 5 \leq 0 \text{ et } x + 1 \leq 0.$$

Dans ce cas, $x \leq 5$ et $x \leq -1$. Les deux conditions sont satisfaites quand $x \leq -1$.

La racine $\sqrt{x^2 - 4x - 5}$ est donc définie quand $x \leq -1$ ou $5 \leq x$. On a donc que

$$\text{dom}(f) =]-\infty, -1] \cup]5, \infty[.$$

Note : on pourrait aussi déterminer la région où $x^2 - 4x - 5 \geq 0$ l'aide du graphe de $y = x^2 - 4x - 5$.



Ce graphe permet de déterminer que $x^2 - 4x - 5 \geq 0$ si

$$x \in]-\infty, -1] \cup]5, \infty[.$$

1.5.1 Définition d'une fonction

On peut définir une fonction f de plusieurs manières.

On peut le faire en donnant explicitement une expression algébrique pour déterminer $f(x)$ à partir de la valeur de x , par exemple

$$f(x) = x^2.$$

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

On peut aussi définir une fonction *implicitement* à l'aide d'une égalité algébrique, par exemple une des égalités suivantes :

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ x^2 - y &= 0 \end{aligned}$$

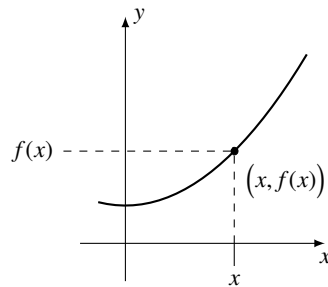
Dans ce cas, il faut spécifier quelle variable est déterminée en fonction de l'autre variable. La variable « entrée » est appelée **variable indépendante** et la « sortie » est appelé **variable dépendante** — elle dépend de la valeur de la variable indépendante.

Une équation ne définit pas toujours une fonction : il arrive qu'une valeur donnée de la variable indépendante corresponde à plusieurs valeurs de la variable dépendante. Par exemple

$$y^2 = x$$

ne définie par une fonction si on considère y comme variable dépendante. En effet, pour $x = 1$, les valeurs $y = 1$ et $y = -1$ satisfont toutes deux l'équation donnée. Il n'y a donc pas une valeur unique de y associée à la valeur $x = 1$. Cette relation ne définit pas une fonction.

Graphe d'une relation ou d'une fonction Le graphe d'une fonction f est l'ensemble des « points » $(x, f(x))$. Dans le cas des fonctions réelles, ces points peuvent être placés dans le plan cartésien pour obtenir une représentation graphique de f . Par exemple, si $f(x) = x^2$, on obtient



On peut trouver un point sur le graphe d'une relation en donnant une valeur à une variable et en isolant pour trouver la valeur de l'autre variable.

Exemple 1.17. Trouvons un point sur le graphe de la relation

$$2x^2 + 3y^2 = 1.$$

Si on prend $x = 0$, on obtient

$$2(0)^2 + 3y^2 = 1.$$

En simplifiant

$$3y^2 = 1.$$

On isole y :

$$y^2 = \frac{1}{3}.$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Il y a donc deux points correspondant à $x = 0$ sur le graphe de la relation donnée :

$$(0, 1/\sqrt{3}) \text{ et } (0, -1/\sqrt{3}).$$

Chapitre 2

Taux de variation, différentielles et dérivées

2.1 Taux de variation moyen

Définition 2.1. Soit f une fonction réelle. Si x varie de a à b , on note par Δx la variation en x :

$$\Delta x = b - a$$

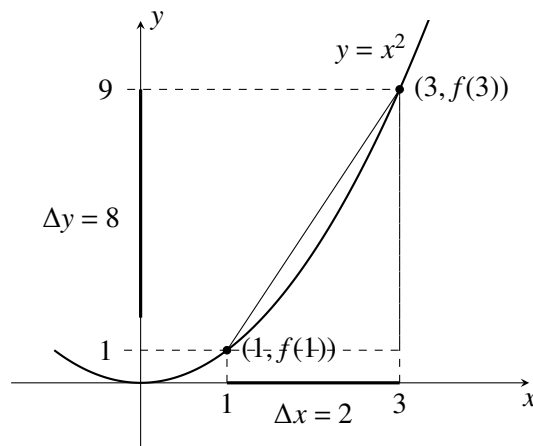
La variation en y correspondant à cette variation en x sur l'intervalle $[a, b]$ est définie par

$$\Delta y = f(b) - f(a).$$

Si on connaît a et Δx plutôt que a et b , comme $\Delta x = b - a$ est équivalent à $b = a + \Delta x$, on peut aussi calculer la variation en y comme ceci :

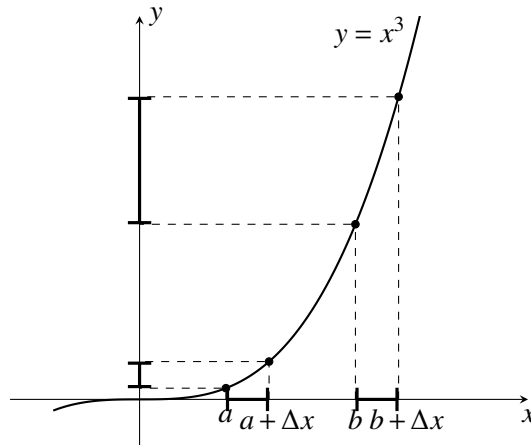
$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Exemple 2.1. Si $y = x^2$, alors

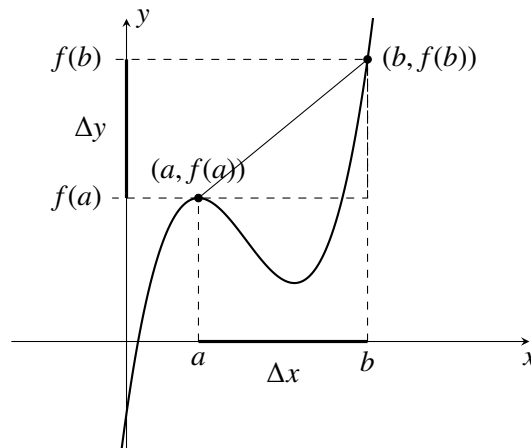


Il faut garder en tête que pour une variation en x Δx fixée, Δy dépend de la valeur

choisie pour $x = a$. Dans le graphe suivant, Δx est le même pour l'intervalle commençant à a que pour celui commençant à b . On voit cependant que le Δy correspondant à chacun est de longueur différente.



Définition 2.2.



Le taux de variation moyen de $y = f(x)$ pour x allant de $x = a$ jusqu'à $b = a + \Delta x$ est défini par

$$\text{TVM}_{[a, a+\Delta x]} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Définition 2.3. Le **taux de variation moyen** (TVM) d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ est défini par

$$\text{TVM}_{[a, b]}(f) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Le TVM est le changement moyen de la valeur de la fonction f quand son argument passe de a à b (ou de a à $a + \Delta x$).

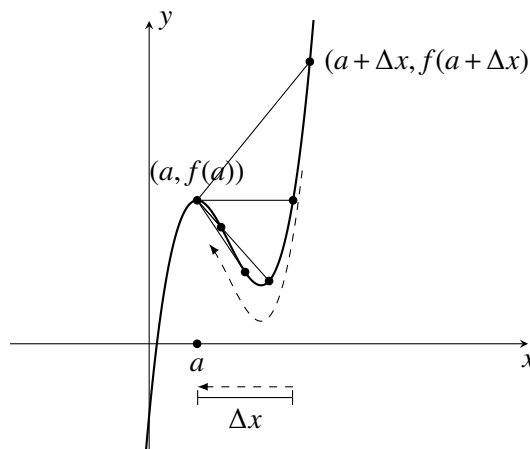
Dans le cas où la fonction donne une distance parcourue en fonction du temps (que nous dénoterons par $x(t)$, alors le TVM est la **vitesse moyenne** sur le parcours entre $t = a$ et $t = b$.

$$\text{La vitesse moyenne entre } t = a \text{ et } t = b \text{ est } \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

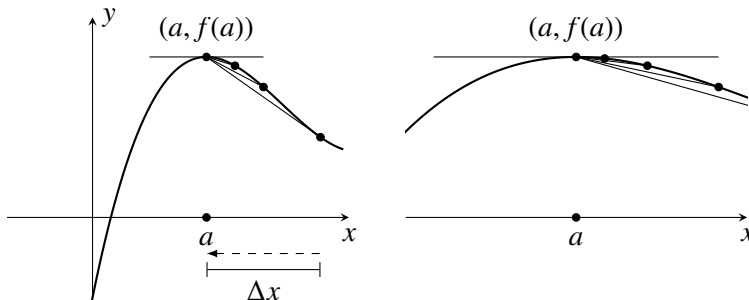
2.2 Taux de variation instantané

Le **taux de variation instantané** (TVI) de la fonction f en $x = a$ est le taux de variation obtenu à partir du taux de variation moyen quand Δx devient très petit (on dit que Δx est « **infinitésimal**. »). Le taux de variation instantané représente le taux de changement de la fonction f à un point donné.

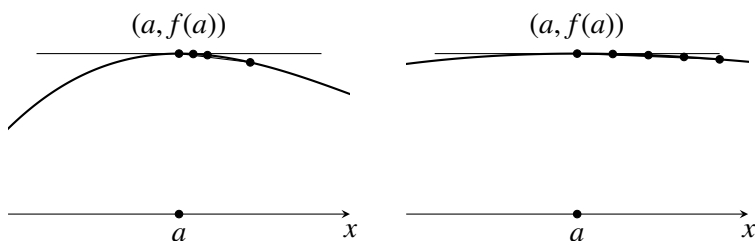
$$\text{TVI}_a(f) = \frac{dy}{dx} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \text{ où } \Delta x \text{ très petit}$$



En se rapprochant du point $(a, f(a))$, on voit que quand Δx devient de plus en plus petit, les sécantes se rapprochent de plus en plus de la tangente au graphe au point $(a, f(a))$.



Ultimement (c'est à dire quand Δx devient « infiniment petit »), les segments sécants et la courbe elle même se confondent.

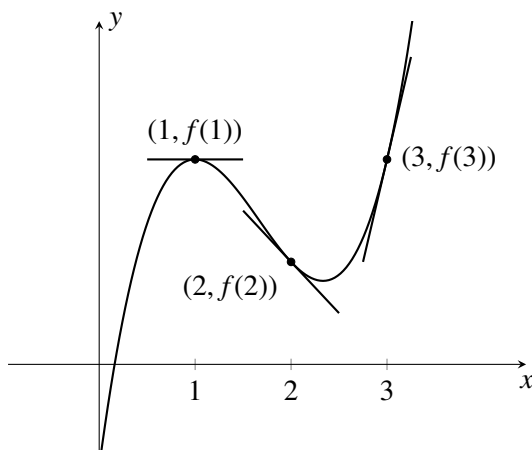


Définition 2.4. Le taux de variation instantané de la fonction $y = f(x)$ en $x = a$ est la pente de la tangente au point $(a, f(a))$ au graphe de $f(x)$ (si cette tangente existe).

Si $y = f(x)$, on note le taux de variation instantané en $x = a$ par

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} \text{ ou } \text{TVI}_a(f)$$

Le taux de variation instantané varie d'un point à l'autre du graphe d'une fonction, comme on peut le voir dans le graphe suivant où la pente de la tangente n'est pas la même en $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$.



On peut aussi remarquer dans ce dernier exemple que la pente de la tangente est liée à la croissance de la fonction : elle est positive là où la fonction est croissante (en $x = 3$), négative là où la fonction est décroissante (en $x = 2$). Elle est nulle (tangente horizontale) quand il y a un maximum (ou un minimum), comme en $x = 1$.

Une interprétation physique permet de se faire une intuition de la signification de $\frac{dy}{dx}$: la vitesse. La vitesse moyenne dans un parcours est le rapport de la distance parcourue Δx sur le temps de parcours Δt . La vitesse instantanée est la vitesse à un instant donnée (celle des indicateurs de vitesse dans les voitures!). La vitesse

instantanée est le rapport de la distance parcourue dx pendant un temps infinitésimal dt .

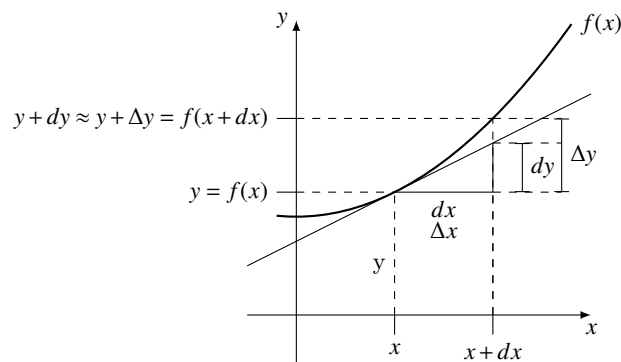
$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad \text{Vitesse instantanée} = \frac{dx}{dt}$$

2.3 Différentielles

On vient de définir le taux de variation instantané en $x = a$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$$

comme étant la pente de la tangente au point $(a, f(a))$. Voyons comment on peut calculer ce taux pour une fonction $y = f(x)$.



Quand Δx est très petit, on peut approximer l'accroissement Δy sur le graphe de la fonction par l'accroissement dy sur la droite tangente. Comme la pente de la tangente est $\frac{dy}{dx}$, si Δx est très petit on a que

$$\Delta y \approx dy,$$

c'est à dire que

$$dy \approx f(x + \Delta x) - f(x) = f(x + dx) - f(x).$$

Définition 2.5. Si y est une fonction de x , $y = f(x)$, alors la différentielle en y est

$$dy \stackrel{\text{def}}{=} f(x + dx) - f(x)$$

quand dx est très petit.

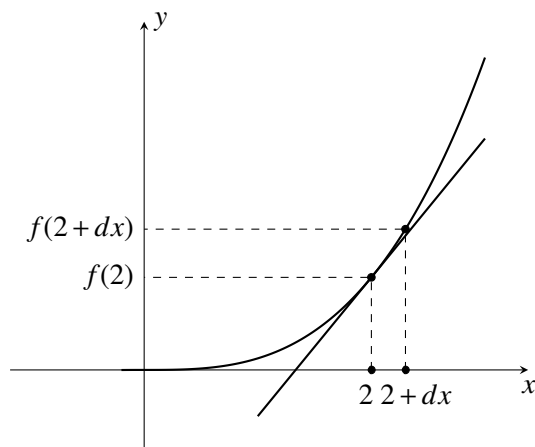
Définition 2.6. Le taux de variation instantané de la fonction $y = f(x)$ en $x = a$ est

$$\text{TVI}_a(f) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(a + dx) - f(a)}{dx}$$

Exemple 2.2. Calculons la pente de la tangente à la fonction définie par

$$y = f(x) = x^3$$

en $x = 2$.



$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(2+dx) - f(2)}{dx} \\ &= \frac{(2+dx)^3 - (2)^3}{dx} \\ &= \frac{(2^3 + (3)2^2 dx + (3)(2)dx^2 + dx^3) - 2^3}{dx} \\ &= \frac{12 dx + 6 dx^2 + dx^3}{dx} \\ &= \frac{dx(12 + 6 dx + dx^2)}{dx} \\ &= 12 + 6 dx + dx^2 \\ &\approx 12 \quad (\text{quand } dx \text{ très petit}). \end{aligned}$$

La pente de la tangente au graphe de la fonction $y = x^3$ en $x = 2$ est 12.

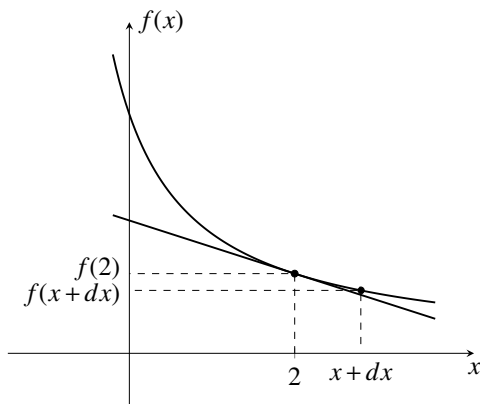
De manière générale, pour calculer la pente de la tangente à partir de la définition du taux de variation moyen $\frac{dy}{dx}$, nous devons

1. Écrire la définition de $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$ et évaluer correctement dy , donc $f(a+dx) - f(a)$.
Faire une esquisse peut aider à se souvenir de la définition !
2. manipuler algébriquement le numérateur pour y factoriser dx ; trois trucs selon l'expression :
 - Polynômes : développer et factoriser ;
 - Fractions : mettre au dénominateur commun ;
 - Racines : conjugué.
3. simplifier le dx mis en évidence au numérateur avec le dx du dénominateur ;
4. négliger toutes les occurrences de dx restantes dans l'expression obtenue après la dernière simplification.

Exemple 2.3. Calculons la pente de la tangente à la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

en $x = 2$ et donnons l'équation de la droite tangente en $x = 2$.



$$\begin{aligned}
\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(2+dx) - f(2)}{dx} \\
&= \frac{\frac{1}{(2+dx)+1} - \frac{1}{2+1}}{dx} \\
&= \frac{\frac{1}{3+dx} - \frac{1}{3}}{dx} \\
&= \frac{\frac{3}{3(3+dx)} - \frac{3+dx}{3(3+dx)}}{dx} \\
&= \frac{\frac{3-(3+dx)}{3(3+dx)}}{dx} \\
&= \frac{\frac{-dx}{3(3+dx)}}{dx} \\
&= \frac{-dx}{3(3+dx)dx} \\
&= \frac{-1}{3(3+dx)} \\
&\approx -\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

La droite tangente en $x = 2$ est donc de pente $-\frac{1}{9}$. Son équation est de la forme

$$y = -\frac{x}{9} + b.$$

Pour déterminer b on prend un point sur la droite. On sait que la droite est tangente au point $(2, f(2))$, c'est à dire au point $(2, \frac{1}{3})$. On doit donc avoir

$$\frac{1}{3} = -\frac{2}{9} + b.$$

En isolant, on trouve que

$$b = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}.$$

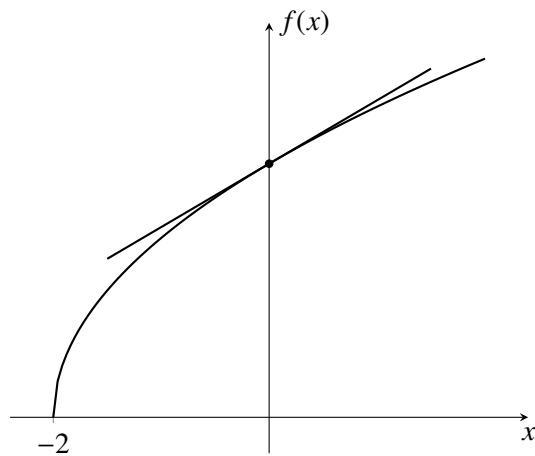
L'équation de la tangente est donc

$$y = -\frac{x}{9} + \frac{5}{9}.$$

Exemple 2.4. Calculons la pente de la tangente à la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

en $x = 0$ et donnons l'équation de la droite tangente en $x = 0$.



$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(0+dx) - f(0)}{dx} \\
 &= \frac{\sqrt{(0+dx)+2} - \sqrt{0+2}}{dx} \\
 &= \frac{\sqrt{dx+2} - \sqrt{2}}{dx} \\
 &= \frac{\sqrt{dx+2} - \sqrt{2}}{dx} \cdot \frac{\sqrt{dx+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{dx+2} + \sqrt{2}} \\
 &= \frac{(dx+2) - 2}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{dx+2} + \sqrt{2}} \\
 &= \frac{dx}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{dx+2} + \sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{dx+2} + \sqrt{2}} \\
 &\approx \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

La droite tangente en $x = 0$ est donc de pente $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Son équation est de la forme

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}} + b.$$

Pour déterminer b on prend un point sur la droite. On sait que la droite est

tangente au point $(0, f(0))$, c'est à dire au point $(0, \sqrt{2})$. On doit donc avoir

$$\sqrt{2} = 0 + b.$$

En isolant, on trouve que

$$b = \sqrt{2}.$$

L'équation de la tangente est donc

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2}.$$

2.4 Différentielles et approximation

Supposons que l'on a une fonction $y = f(x)$. On a vu que l'on peut approximer les valeurs de la fonction à l'aide des différentielles pour des valeurs proches d'une valeur donnée en approximant la fonction par la droite tangente.

On peut se servir de cette approximation pour simplifier certains calculs. L'idée générale est d'utiliser

$$dy = f(x+dx) - f(x)$$

et le fait que

$$dy = \frac{dy}{dx} dx.$$

Par exemple, si $y = \sqrt{x}$, on peut vérifier que

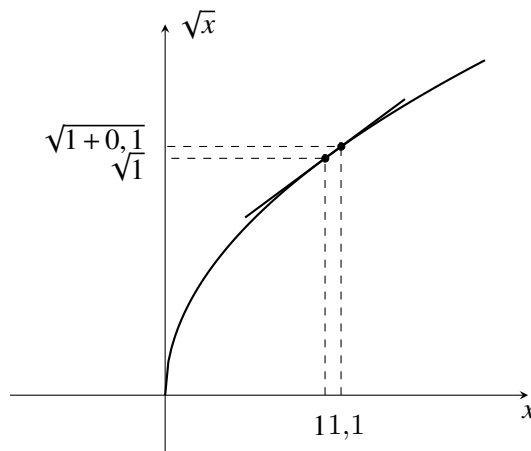
$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

Comme

$$dy = f(x+dx) - f(x)$$

et $dy = \frac{dy}{dx} dx$, on a que

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{dy}{dx} dx.$$



Si on veut calculer $\sqrt{1,1}$, on décompose 1,1 en 1+0,1 et on pose $x = 1$ et $dx = 0,1$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+dx} &\approx \sqrt{x} + \frac{dy}{dx}dx \\ \sqrt{1,1} &\approx \sqrt{1} + \frac{1}{2}(0,1) \\ \sqrt{1,1} &\approx 1 + \frac{0,1}{2} \\ \sqrt{1,1} &\approx 1 + 0,05 \\ \sqrt{1,1} &\approx 1,05.\end{aligned}$$

La valeur trouvée est à moins d'un centième de la valeur

$$\sqrt{1,1} = 1.048808\dots$$

Cette approximation n'est pas exacte, mais peut donner des valeurs avec une précision satisfaisante sans exiger de calculs complexes : il suffit d'utiliser la formule

$$\sqrt{1+dx} \approx 1 + \frac{dx}{2}$$

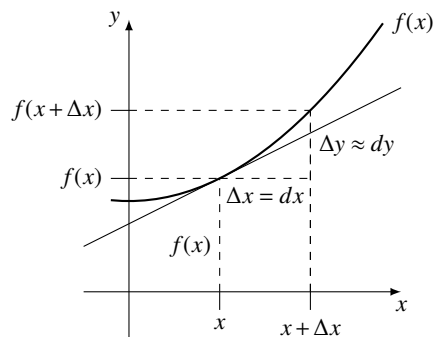
qui est une bonne approximation tant que dx est petit, donc pour des valeurs $x + dx$ proches de 1.

2.5 Dérivée

Comme la pente de la tangente au graphe d'une fonction f donne beaucoup d'information sur le comportement de la fonction et qu'elle varie d'un point à l'autre, il est utile de la considérer comme une nouvelle fonction *dérivée* de la fonction initiale. Cette fonction dérivée associée à chaque valeur de x dans le domaine de f la pente de la tangente au graphe de f au point $(x, f(x))$.

Définition 2.7. La **fonction dérivée** f' d'une fonction $y = f(x)$ est définie par

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \text{TVI}_x(f).$$



On détermine la fonction dérivée de la même manière que la dérivée en un point, mais en laissant la coordonnée en x indéterminée.

Exemple 2.5. Si $f(x) = x^3$, alors

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\ &= \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx} \\ &= \frac{(x^3 + 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3) - x^3}{dx} \\ &= \frac{3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3}{dx} \\ &= \frac{(3x^2 + 3xdx + dx^2)dx}{dx} \\ &= 3x^2 + 3xdx + dx^2 \\ &\approx 3x^2\end{aligned}$$

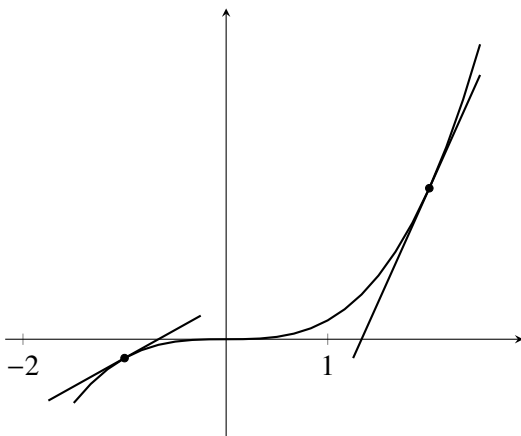
On a donc que la dérivée est $f'(x) = 3x^2$.

À l'aide de la fonction dérivée, on peut par exemple déterminer la pente de la tangente à f en un point quelconque $(x, f(x))$ du graphe de f en évaluant $f'(x)$. Par exemple, si $x = 2$, la pente de la tangente est

$$f'(2) = 3(2)^2 = 24.$$

Si $x = -1$, la pente de la tangente est

$$f'(-1) = 3(-1)^2 = 3.$$



On peut aussi chercher les valeurs de x où la pente a une valeur spécifique. Par exemple, sachant que $y' = 3x^2$ quand $y = x^3$, on peut trouver où la tangente est horizontale en posant que la dérivée (qui est la pente de la tangente) est nulle. Dans le dernier exemple, cela est le cas quand

$$y' = 0 \iff 3x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Exemple 2.6. Si $f(x) = \sqrt{x+1}$, la dérivée f' est

$$\begin{aligned} f'(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\ &= \frac{\sqrt{(x+dx)+1} - \sqrt{x+1}}{dx} \\ &= \frac{\sqrt{x+dx+1} - \sqrt{x+1}}{dx} \cdot \frac{\sqrt{x+dx+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+dx+1} + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{(x+dx+1) - (x+1)}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+dx+1} + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{dx}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+dx+1} + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+dx+1} + \sqrt{x+1}} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

La dérivée de $\sqrt{x+1}$ est donc $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

La fonction dérivée f' est la fonction qui associe à chaque valeur de x le taux de variation instantané de f en x , soit la pente de la tangente en $(x, f(x))$:

$$f'(x) = \text{TVI}_x(f) = \frac{dy}{dx}$$

Les notations $f'(x)$, $\text{TVI}_x(f)$ et $\frac{dy}{dx}$ sont donc interchangeables. Cependant, la première met l'accent sur le fait que la nouvelle fonction f' est déterminée à partir de la fonction originale f . Cette fonction est le plus souvent appelée simplement *la dérivée de f* .

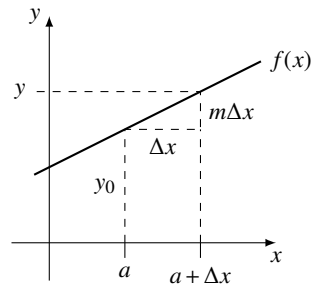
L'opération « ' » (dérivée) est en fait elle même une sorte de fonction, mais qui prend une fonction comme argument et qui donne une nouvelle fonction :

dérivée: fonctions réelles \rightarrow fonctions réelles.

La dérivée est une « fonction de fonction ».

2.6 Droite tangente et approximation d'une fonction

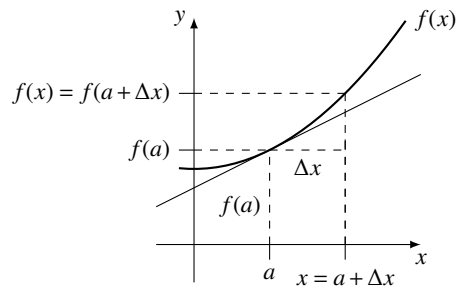
Si une droite est de pente m , une augmentation de Δx de la valeur de x augmentera la valeur de y de $m\Delta x$.



On a donc que $y = y_0 + m\Delta x$. Si $x = a + \Delta x$, on a que $\Delta x = x - a$ et donc

$$y = f(a) + m(x - a).$$

On peut se servir de cette relation pour obtenir une approximation linéaire de d'une fonction générale à l'aide de l'équation de la droite tangente.



Dans ce dernier graphique, la pente de la tangente au point $(a, f(a))$ est, par définition, la valeur $f'(a)$, soit la dérivée évaluée en $x = a$. En remplaçant les paramètres de la relation $y = f(a) + m(x - a)$ par ceux de la droite tangente du dernier graphique, l'équation de la droite tangente en $(x, f(x))$ (où y est fonction de Δx) est

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Ainsi, si on considère que y sur la droite tangente est une bonne approximation de y sur le graphe de la fonction f , on peut faire l'approximation suivante de $f(x)$

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x.$$

Exemple 2.7. On a vu précédemment que la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ est $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Cela nous donne les approximations suivantes par des droites, respectivement valables pour des valeurs de x près de 1 et 4.

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(x-1) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$$

$$f(x) \approx f(4) + f'(4)(x-4) = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(x-4) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

2.7 Notations

La dérivée est un concept très important en mathématiques. Les concepts importants ont souvent été étudiés par plusieurs mathématiciens et parfois plusieurs notations sont inventées et utilisées au fil du temps.

Si $y = f(x) = x^2$, toutes ces notations désignent la même chose :

$$f'(x) = \text{TVI}_x(f) = \frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = (x^2)'$$

Notation différentielle avec $y = f(x) = x^2$:

$$dy = y'dx = f'(x)dx = 2x dx.$$

La dérivée a été étudiée de manière détaillée pour la première fois par Newton et Leibniz, de manière indépendante et simultanée. Nous utilisons encore aujourd'hui les notations différentes inventées et utilisées par Newton (\dot{y}) et Leibniz ($\frac{dy}{dx}$), mais aussi celles introduites plus tard par d'autres mathématiciens ayant développé la théorie des dérivées, notamment celle d'Euler ($f'(x)$).

Voici les différentes notations pour la dérivée de $y = f(x) = x^2$.

Notations pour la dérivée					
$f'(x)$	y'	$(x^2)'$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{df(x)}{dx}$	$\frac{dx^2}{dx}$
$f'(a)$	$y' _{x=a}$	$(x^2)' _{x=a}$	$\frac{dy}{dx} _{x=a}$	$\frac{df(x)}{dx} _{x=a}$	$\frac{dx^2}{dx} _{x=a}$

La notation « $\frac{dy}{dx}$ » est celle introduite par Leibniz. Les notations de Newton ne sont plus aussi utilisées que celles de Leibniz. Newton écrivait \dot{x} là où Leibniz écrivait $\frac{dx}{dy}$.

On peut penser à la notation $\frac{dy}{dx}$ comme une forme de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ avec Δx « infiniment petit ».

La notation « barre » veut dire « évalué en $x = \dots$ ». Elle peut s'utiliser dans différents contextes autre que celui du calcul de dérivées. Par exemple, on peut écrire

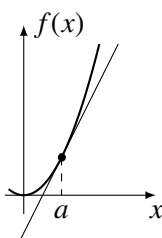
$$x^2|_{x=3} = 9.$$

Cette notation est utilisée dans plusieurs contextes en calcul différentiel et intégral. Dans ce cours, elle servira le plus souvent à évaluer la dérivée en un point, comme dans la seconde ligne du tableau précédant.

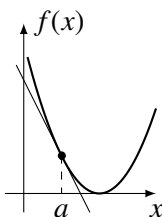
2.8 Graphique des fonctions dérivées

On peut faire le lien entre le graphe d'une fonction f et celui de sa dérivée f' à l'aide des observations suivantes, que nous motivons géométriquement pour le moment ; nous verront plus loin des résultats précisant ces liens.

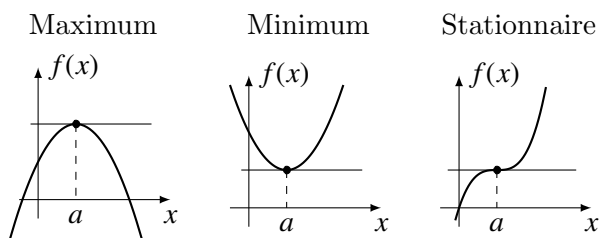
- Si $f'(a) > 0$, alors f est croissante en $x = a$.



- Si $f'(a) < 0$, alors f est décroissante en $x = a$.



- Si $f'(a) = 0$, alors le graphe de $f(x)$ a un point où la tangente est horizontale (de pente zéro) : un minimum, un maximum ou un point « stationnaire ».



À un sommet (minimum ou maximum) du graphe d'une fonction, la dérivée s'annule car la tangente est horizontale (donc de pente 0). On peut donc trouver les sommets d'une fonction en cherchant les valeurs a où

$$f'(a) = 0.$$

Exemple 2.8. Trouvons le sommet de la parabole d'équation $y = x^2 + 3x - 5$.

À l'aide des techniques vu précédemment, on détermine la fonction dérivée à y . Si $y = f(x) = x^2 + 3x - 5$, alors

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\ &= \frac{((x+dx)^2 + 3(x+dx) - 5) - (x^2 + 3x - 5)}{dx} \\ &= \frac{(x^2 + 2xdx + dx^2 + 3x + 3dx - 5) - (x^2 + 3x - 5)}{dx} \\ &= \frac{5xdx + dx^2 + 3dx}{dx} \\ &= \frac{(5x + dx + 3)dx}{dx} \\ &= 5x + dx + 3 \\ &\approx 5x + 3 \quad \text{si } dx \text{ infinitésimal}\end{aligned}$$

La pente de la tangente au graphe de y en x est $5x + 3$. Cette pente est nulle quand $5x + 3 = 0$, c'est-à-dire quand $x = -3/5$. La valeur de y en ce point est

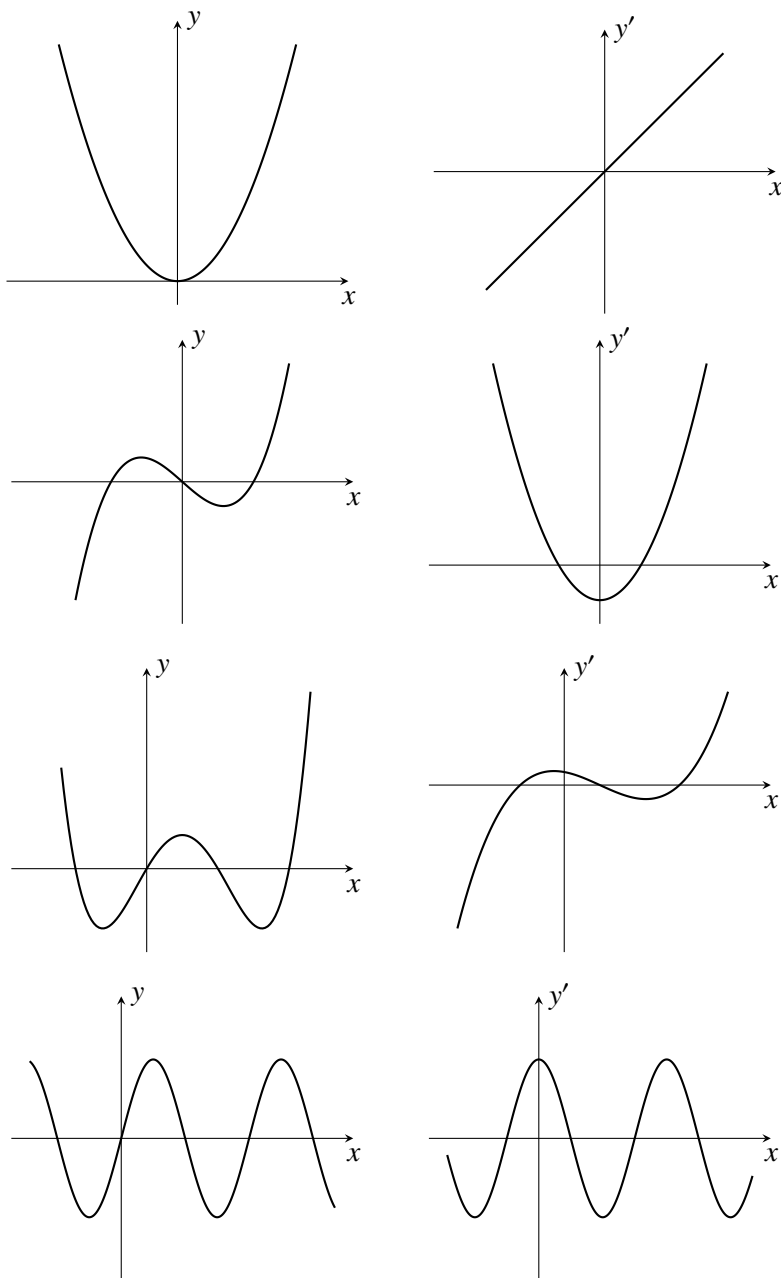
$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{5}\right) - 5 = \frac{-71}{25}$$

Le sommet de la parabole est donc au point $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{71}{25}\right)$.

Il est possible de trouver le sommet d'une parabole à l'aide de la *complétion de carré* vu dans les cours du secondaire. La technique décrite ici a cependant l'avantage de pouvoir être appliquée à n'importe quelle fonction pour laquelle on peut déterminer la fonction dérivée, alors que la complétion de carré n'est possible que pour une fonction définie à l'aide d'un polynôme de degré 2. De plus, nous verrons dans la suite comment déterminer facilement la fonction dérivée, ce qui rend cette méthode beaucoup plus simple.

2.9 Exemples de fonctions avec leurs dérivées

Les exemples suivants illustrent le lien entre le graphe d'une fonction (à gauche) et celui de sa dérivée (à droite). Pour apprécier ce lien, commencez par repérer les zéros des dérivées et identifiez les maximums ou minimums correspondants dans la fonction. Ensuite, liez le signe de la dérivée et la croissance (ou décroissance!) de la fonction.



Chapitre 3

Propriétés de la dérivée

Le calcul de la fonction dérivée à l'aide de la définition donnée au chapitre précédent est laborieuse, même pour des fonctions définies par des expressions algébriques simples. Heureusement, il est possible « d'algébriser » le calcul de la dérivée, c'est-à-dire d'identifier des propriétés qui permettent de calculer directement à partir de définition algébrique de la fonction à dériver et sans utiliser la définition. On démontrera dans ce chapitre un certain nombre de propriétés de la dérivée qui, prise ensemble, permettent de déterminer la dérivée d'une fonction en appliquant des « formules de dérivation » (ou « règles de dérivation »).

Ces propriétés ont été découvertes au fil du temps par plusieurs mathématiciens qui travaillaient sur différents problèmes allant du calcul d'aires délimitées par des courbes algébriques à la détermination de minimums et maximums liés à des problèmes de géométrie. C'est à Newton et Leibniz que l'on doit d'avoir su les présenter de manière systématique pour la première fois et d'avoir établi le lien entre le calcul d'aire et la dérivée.

Dans ce qui suit, nous chercherons à établir un certain nombre de propriétés algébriques de la dérivée qui peuvent servir à la détermination des fonctions dérivées sans utiliser la définition donnée au dernier chapitre, mais plutôt en la calculant directement à partir de l'expression algébrique définissant la fonction à dériver.

3.1 Preuves graphiques

Pour simplifier, nous utiliserons parfois des preuves graphiques comme démonstration de certaines propriétés de la dérivée. Pour donner un avant-goût de ce genre d'argument, voici une preuve algébrique et une preuve graphique du fait que la dérivée de la fonction $y = x^2$ est $y' = 2x$.

Proposition 3.1.

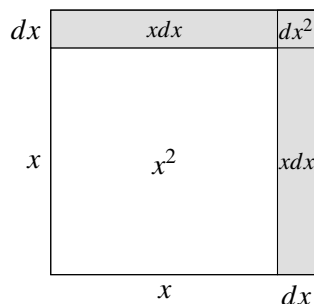
$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x.$$

preuve algébrique.

$$\begin{aligned}
 \frac{d(x^2)}{dx} &= \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} \\
 &= \frac{(x^2 + 2xdx + dx^2) - x^2}{dx} \\
 &= \frac{2xdx + dx^2}{dx} \\
 &= \frac{dx(2x + dx)}{dx} \\
 &= 2x + dx \\
 &\approx 2x \quad \text{car } dx^2 \text{ très petit quand } dx \text{ est petit} \quad \square
 \end{aligned}$$

On peut généralement obtenir géométriquement l'expression de dy à partir de relations géométriques. Cette manière de faire est fréquente en physique. Elle permet aussi de mieux comprendre pourquoi certaines quantités peuvent être négligées.

version géométrique. La différentielle dy est l'aire de la région en gris dans le graphique suivant : c'est l'écart entre un carré de côté x et un carré de côté $x + dx$. Quand dx est très petit, l'aide du petit carré dx^2 est négligée.



On peut voir dans ce graphique que

$$dy = xdx + xdx + dx^2 \approx 2xdx.$$

Ainsi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xdx}{dx} = 2x. \quad \square$$

Proposition 3.2. La dérivée de la fonction racine carrée est

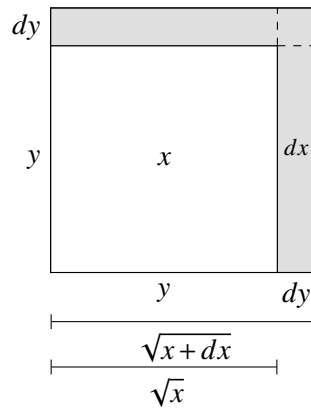
$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\sqrt{x})}{dx} &= \frac{\sqrt{x+dx} - \sqrt{x}}{dx} \\
 &= \frac{\sqrt{x+dx} - \sqrt{x}}{dx} \frac{\sqrt{x+dx} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+dx} + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{(x+dx) - x}{dx(\sqrt{x+dx} + \sqrt{x})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x+dx} + \sqrt{x}} \\
 &\approx \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

car $\sqrt{x+dx} \approx \sqrt{x}$ si dx très petit.

Preuve graphique. si x est l'aire d'un carré, alors le côté est $y = \sqrt{x}$. Si l'aire du carré change de x à $x+dx$ (donc varie de la partie en gris dx), alors la variation approximative dy du côté du carré est approximativement $dy = \sqrt{x+dx} - \sqrt{x}$.



D'après la figure, l'aire dx (en gris) peut s'écrire comme

$$dx = ydy + ydy + dy^2.$$

Si on néglige dy^2 qui est très petit par rapport à dy , on trouve

$$dx = 2ydy,$$

donc, en isolant,

$$dy = \frac{1}{2y}dx.$$

Enfin, comme $y = \sqrt{x}$, on doit avoir que

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx. \quad \square$$

Proposition 3.3. Si $y = \frac{1}{x}$, alors

$$dy = -\frac{1}{x^2} dx.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x}}{dx} \\ &= \frac{\frac{x-(x+dx)}{x(x+dx)}}{dx} \\ &= \frac{-1}{x^2+xdx} dx \\ &= \frac{-1}{x^2 + xdx} \\ &\approx \frac{-1}{x^2} \quad \text{car } x^2 + xdx \approx x^2. \quad \square \end{aligned}$$

3.2 Linéarité et dérivée de puissances

Pour alléger, à partir de ce point nous utiliserons souvent la notation « $(y)'$ » pour désigner la dérivée de y . Par exemple, on écrit directement

$$(x^2)' = 2x$$

plutôt que

$$y = x^2 \quad \frac{dy}{dx} = 2x.$$

Comme une fonction constante a comme graphe une droite de pente 0, la tangente à cette droite en n'importe quel point est aussi une droite de pente nulle.

Proposition 3.4 (Dérivée d'une constante). Si $y = C$, où C est une constante réelle quelconque, alors

$$\frac{d(C)}{dx} = 0$$

Exemple 3.1.

$$(2)' = 0 \quad (-3)' = 0 \quad (0)' = 0 \quad (\pi)' = 0$$

Démonstration. Comme $y = f(x) = C$ peut importe la valeur de x , on a que

$$\begin{aligned} \frac{d(C)}{dx} &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\ &= \frac{C - C}{dx} \\ &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

De manière similaire au cas où y est une fonction constante, la dérivée de $y = x$ coïncide avec l'intuition : $y = x$ est une droite de pente 1, donc toute tangente à cette droite doit être de pente 1.

Proposition 3.5. Si $y = x$, alors

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

Démonstration.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + dx) - x}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1 \quad \square$$

Proposition 3.6 (linéarité 1 – dérivée d'un multiple d'une fonction). Si $y = Cu$, où $u = f(x)$ est une fonction de x , alors

$$\frac{d}{dx}(Cu) = C \frac{du}{dx}$$

Exemple 3.2.

$$(3x^5)' = 3(x^5)' \quad \left(\frac{x^3}{5}\right)' = \frac{1}{5}(x^3)' \quad (10 \sin(x))' = 10(\sin(x))'$$

Démonstration. Preuve algébrique directe : si $u = f(x)$, alors $du = f(x + dx) - f(x)$, donc, comme $f(x) = u$, on a que

$$u + du = f(x + dx)$$

et donc

$$C(u + du) = C f(x + dx)$$

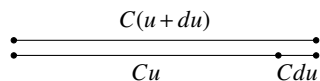
La différentielle $d(Cu)$ peut se calculer comme

$$d(Cu) = C f(x + dx) - C f(x) = C(u + du) - Cu.$$

On a donc que

$$\begin{aligned} \frac{d(Cu)}{dx} &= \frac{C(u + du) - Cu}{dx} \\ &= \frac{Cu + Cdu - Cu}{dx} \\ &= \frac{Cdu}{dx} \\ &= C \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

Preuve graphique :



□

Proposition 3.7 (Linéarité 2 : additivité). Si u et v sont toutes deux des fonctions d'une même variable, alors

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

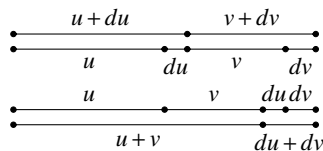
Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{d(u+v)}{dx} &= \frac{((u+du) + (v+dv)) - (u+v)}{dx} \\ &= \frac{du+dv}{dx} \\ &= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \end{aligned}$$

Ainsi, on a que

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Preuve graphique :



□

Note : les deux dernières propriétés considérées ensemble forment une propriété appelée *linéarité* de la dérivée. Les limites et plusieurs autres constructions mathématiques étudiées au collégial ont cette propriété de « linéarité », qui est le sujet d'étude central du cours d'algèbre *linéaire*.

Exemple 3.3.

$$(-x^2 + 3x)' = (-x^2)' + (3x)' \quad (x^2 - 3x)' = (x^2 + (-3x))' = (x^2)' + (-3x)'$$

Proposition 3.8 (Puissances). Si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}.$$

Exemple 3.4.

$$(x^3)' = 3x^2 \quad (x^{10})' = 10x^9 \quad (x^{743})' = 743x^{742} \quad (x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1 \quad (1)' = (x^0)' = 0 \cdot x^{-1} = 0.$$

Démonstration. Pour cette preuve, nous utiliserons le triangle de Pascal pour développer $(x+dx)^n$. Ce développement débute ainsi :

$$(x+dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + (\text{termes où } dx \text{ apparait avec un exposant } \geq 2).$$

Notons qu'on peut mettre dx en évidence d'une somme dont les termes tous un facteur dx^2 . On trouve ainsi la dérive directement à partir de la définition :

$$\begin{aligned} \frac{d(x^n)}{dx} &= \frac{(x+dx)^n - x^n}{dx} \\ &= \frac{(x^n + nx^{n-1}dx + (\text{termes})dx^2) - x^n}{dx} \\ &= \frac{nx^{n-1}dx + (\text{termes})dx^2}{dx} \\ &= \frac{(nx^{n-1} + (\text{termes})dx)dx}{dx} \\ &= nx^{n-1} + (\text{termes})dx \\ &\approx nx^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Exemple 3.5. À l'aide des propriétés précédentes, on peut déterminer la dérivée d'une fonction polynômiale quelconque. Par exemple

$$\begin{aligned} (3x^2 - 2x + 4)' &= (3x^2)' - (2x)' + (4)' \\ &= 3(x^2)' - 3(x)' + (4)' \\ &= 3(x^2)' - 3(x)' + (4)' \\ &= 3(2x^1) - 3(1) + (0) \\ &= 6x - 3 \end{aligned}$$

Par la suite, nous ne donnerons pas autant de détails pour la dérivée des polynômes. La plupart du temps, nous donnerons directement le résultat.

3.3 Dérivée d'un produit et d'un quotient

Proposition 3.9 (Dérivée d'un produit, formule de Leibniz). Si u et v sont toutes deux des fonctions de x , alors sous forme différentielle

$$d(uv) = vdu + udv.$$

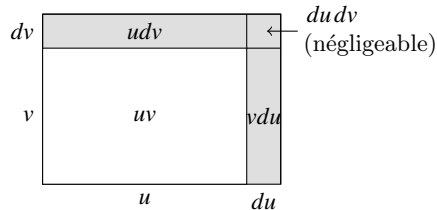
Le taux de variation instantané est donc

$$\frac{d(uv)}{dx} = \frac{vdu + udv}{dx}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{d(uv)}{dx} &= \frac{((u+du)(v+dv)) - (uv)}{dx} \\ &= \frac{(uv + vdu + udv + dudv) - uv}{dx} \\ &= \frac{vdu + udv + dudv}{dx} \\ &\approx \frac{vdu + udv}{dx} \quad \text{car } dudv \text{ est très petit quand } du \text{ et } dv \text{ sont petits} \\ &= v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} \end{aligned}$$

Preuve graphique :



La région en gris est $d(uv)$, la variation de uv quand u varie de du et v varie de dv . Selon le graphique, on a que

$$d(uv) = u dv + v du + dudv,$$

ce qui est approximativement

$$d(uv) \approx u dv + v du$$

car le produit $dudv$ est très petit par rapport à du et dv . □

Exemple 3.6. En utilisant la formule de Leibniz ??, on trouve que

$$\begin{aligned}
 ((x^4 + 1)(x^6 + 1))' &= (x^4 + 1)'(x^6 + 1) + (x^4 + 1)(x^6 + 1)' \\
 &= (4x^3)(x^6 + 1) + (x^4 + 1)(6x^5) \\
 &= (4x^9 + 4x^3) + (6x^9 + 6x^5) \\
 &= 10x^9 + 6x^5 + 4x^3
 \end{aligned}$$

Proposition 3.10 (Dérivée d'un quotient). Si u et v sont toutes deux des fonctions de x , alors, partout où $\frac{1}{v}$ est définie :

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$$

Sous forme de taux de variation instantané

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Démonstration. On utilise directement avec la définition $dy = f(x + dx) - f(x)$. La fonction à dériver est $f(x) = \frac{u}{v}$. Si x varie de dx , alors u et v varient respectivement de du et dv pour devenir $u + du$ et $v + dv$.

$$\begin{aligned}
 d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{u + du}{v + dv} - \frac{u}{v} \\
 &= \frac{v(u + du) - u(v + dv)}{v(v + dv)} \\
 &= \frac{(vu + v du) - (uv + u dv)}{v^2 + v dv} \\
 &= \frac{vu + v du - uv - u dv}{v^2 + v dv} \\
 &= \frac{v du - u dv}{v^2 + v dv} \\
 &\approx \frac{v du - u dv}{v^2}
 \end{aligned}$$

On peut diviser par dx pour obtenir le résultat voulu :

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v du - u dv}{v^2 dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Preuve graphique

dv	$\frac{udv}{v}$	$dud(u/v)$
v	u	$vd(u/v)$
	u/v	$d(u/v)$

$$du \approx \frac{udv}{v} + vd(u/v)$$

$$vd(u/v) = \frac{udv}{v} - du$$

$$d(u/v) = \frac{udv - vdu}{v^2}$$

On divise enfin par dx comme dans l'argument algébrique. □

Exemple 3.7. En utilisant la propriété 3.10 permettant de calculer la dérivée d'un quotient, on trouve que

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} \right)' &= \frac{(x^4 + 1)'(x^6 + 1) - (x^4 + 1)(x^6 + 1)'}{(x^6 + 1)^2} \\ &= \frac{4x^3(x^6 + 1) - (x^4 + 1)(6x^5)}{(x^6 + 1)^2} \\ &= \frac{(4x^9 + 4x^3) - (6x^9 + 6x^5)}{(x^6 + 1)^2} \\ &= \frac{-2x^9 + 6x^5 + 4x^3}{(x^6 + 1)^2} \end{aligned}$$

Proposition 3.11 (Inverse d'une puissance).

$$\frac{d(x^{-n})}{dx} = -nx^{-n-1}$$

Démonstration. On détermine $(x^{-n})'$ de deux manière différentes en utilisant l'identité algébrique et à l'aide de la formule pour la dérivée d'un produit.

$$x^n x^{-n} = 1.$$

En calculant la dérivée de chaque membre de cette égalité, on trouve que

$$(x^n x^{-n})' = (1)' = 0$$

parce que $(C)' = 0$ pour n'importe quelle constante.

On peut aussi utiliser la formule donnant la dérivée d'un produit :

$$\begin{aligned}(x^n x^{-n})' &= x^{-n}(x^n)' + x^n(x^{-n})' \\ &= x^{-n}(nx^{n-1})dx + x^n(x^{-n})'.\end{aligned}$$

Comme on calcule la différentielle d'une même expression de deux manières différentes, les deux résultats doivent être égaux. On doit donc avoir que

$$x^{-n}nx^{n-1}dx + x^n(x^{-n})' = 0$$

On isole $d(x^{-n})'$ dans cette dernière égalité :

$$(x^{-n})' = -n \frac{x^{-n}x^{n-1}}{x^n} dx$$

On trouve enfin, en simplifiant l'expression obtenue :

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1} dx,$$

ce qui est le résultat désiré. □

Démonstration. Preuve à l'aide de la formule de dérivation d'un quotient.

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx} &= \frac{(1)'x^n - (1)(x^n)'}{(x^n)^2} \\ &= \frac{(0)x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= -nx^{(n-1)-2n} \\ &= -nx^{-n-1}\end{aligned}$$
□

Exemple 3.8.

$$\left(\frac{3}{x^5}\right)' = 3(x^{-5})' = 3(-5)x^{-6} = -\frac{15}{x^6}$$

On peut remarquer que les formules trouvées dans les propositions 3.8, 3.11 et 3.2 sont toutes des cas particuliers d'un schéma plus général :

$$d(x^r) = rx^{r-1}$$

pour r un exposant rationnel quelconque. On fera l'hypothèse suivante : cette formule est aussi valable pour n'importe quel exposant réel r .

Hypothèse 1. *La formule*

$$\frac{d(x^r)}{dx} = rx^{r-1}$$

est valable pour tout nombre réel r .

Exemple 3.9.

$$(x^\pi)' = \pi x^{\pi-1}.$$

3.3.1 Règle de chaîne

Proposition 3.12. Si z est fonction de y fonction de x , alors le taux de variation total est le produit des taux de variations :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

Démonstration.

$$\frac{dz}{\cancel{dy} dx} = \frac{dz}{dx} \quad \square$$

Exemple 3.10. Soient $z = y^3$ et $y = \sqrt{x}$ deux fonctions. On aimerait connaître le taux de variation de z par rapport à x . On utilise la règle de chaîne. Noter que l'on veut le taux de variation en fonction de x . Il faut donc exprimer $\frac{dz}{dy}$ en fonction de

x en substituant \sqrt{x} pour y .

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= (3y^2) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= \left(3(\sqrt{x})^2 \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= (3x) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{3x}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3\sqrt{x}}{2}\end{aligned}$$

3.4 Dérivation implicite

Il est possible de définir une fonction par une équation. Par exemple :

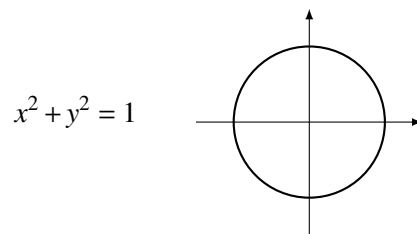
$$y = \frac{1}{x} \quad y = x^2$$

On pourrait aussi définir ces fonctions par les équations suivantes

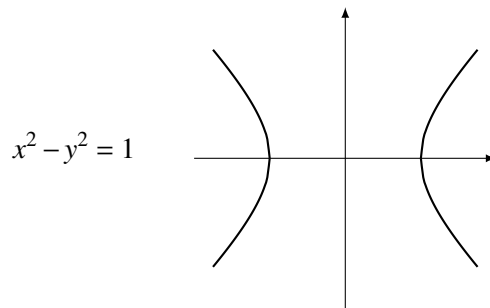
$$xy = 1 \quad x^2 - y = 0.$$

Dans une telle définition implicite, il faut cependant spécifier quelle variable est fonction de l'autre. Par habitude, nous prenons souvent y comme fonction de x .

Nous savons cependant qu'une équation ne peut pas toujours être vue comme une définition implicite d'une fonction. Par exemple l'équation du cercle de rayon 1



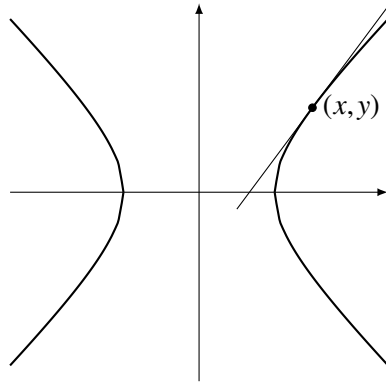
ou encore celle d'une hyperbole



Même si ces équations établissent des relations entre les variables x et y sans que ces relations soient des fonctions, il est possible de déterminer la pente des tangentes à ces courbes à l'aide de la dérivée en supposant qu'il est possible *localement* de supposer que ces courbes sont le graphe d'une fonction définie implicitement.

Exemple 3.11. Prenons l'hyperbole définie par l'équation $x^2 - y^2 = 1$. On veut

connaître la pente de la tangente au point (x,y) .



On suppose que « localement » y est une fonction de x , que l'on pourrait écrire comme $y = f(x)$.

Comme le point (x,y) est sur la courbe, on doit avoir que

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Si on considère chaque membre de cette égalité comme une fonction, on peut les dériver et on obtient le même résultat :

$$(x^2 - y^2)' = (1)'$$

$$2x - 2yy' = 0.$$

Notez le « y' » : c'est la « dérivée de l'intérieur » dans l'application de la règle de chaîne. En effet, on pourrait écrire y^2 comme $(f(x))^2$ puisque $y = f(x)$. En dérivant sous cette forme avec la règle de chaîne on obtient

$$((f(x))^2)' = 2f(x)f'(x).$$

Comme $2f(x)f'(x) = 2yy'$, on voit que la dérivée de y^2 par rapport à x est bien $2yy'$.

Enfin, on isole y' dans l'égalité $2x - 2yy' = 0$ pour obtenir une expression donnant la pente de la tangente en fonction des coordonnées x et y du point (x,y) :

$$y' = \frac{-2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

On peut utiliser ce résultat pour déterminer la pente de la tangente au point $(2, \sqrt{3})$. On vérifie que ce point est bien sur l'hyperbole :

$$2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1.$$

(Si le point n'était pas sur l'hyperbole, l'hypothèse de départ de ce calcul serait fausse et la conclusion $y' = \frac{x}{y}$ le serait aussi!)

La pente de la tangente au point donné est donc

$$y' = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

On peut utiliser la dérivation implicite dans les preuves de certaines propositions — cela arrivera dans la suite du cours. Voyons un exemple typique.

Proposition 3.13.

$$(x^{1/n})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Démonstration. On a la relation suivante :

$$(x^{1/n})^n = x.$$

Si on dérive chaque membre de cette égalité, on a

$$((x^{1/n})^n)' = (x)',$$

c'est-à-dire, en utilisant la règle de chaîne :

$$n(x^{1/n})^{n-1}(x^{1/n})' = 1.$$

On isole la dérivée recherchée :

$$(x^{1/n})' = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}}.$$

On simplifiant le membre de droite, on trouve la formule désirée :

$$(x^{1/n})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}. \quad \square$$

3.4.1 Taux liés

La règle de chaîne permet l'étude de taux de variation de variables liées entre elles par une relation, comme dans la section précédente.

Exemple 3.12. Imaginons un cercle dont le rayon r varie dans le temps. Si le rayon varie, l'aire du cercle doit varier elle aussi car les deux quantités sont reliées par l'équation

$$A = \pi r^2.$$

On a donc une situation où l'aire A est fonction du rayon r , lui-même fonction du temps. Pour connaître le taux de variation de l'aire en fonction du temps, on utilise la règle de chaîne :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

Si le taux de variation du rayon $\frac{dr}{dt}$ est de 55 cm/s et que le rayon du cercle est de 10 cm , le taux de variation de l'aire est

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r|_{r=10\text{cm}}(5 \text{ cm/s}) = 2\pi(10\text{cm})(5 \text{ cm/s}) = 100\pi \text{ cm}^2/\text{s} \approx 314.16 \text{ cm}^2/\text{s}.$$

Notons que pour le taux de variation du rayon $\frac{dr}{dt}$ est de 55 cm/s et que le rayon du cercle est différent, par exemple de 100 cm , le taux de variation de l'aire est

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r|_{r=100\text{cm}}(5 \text{ cm/s}) = 2\pi(100\text{cm})(5 \text{ cm/s}) = 1000\pi \text{ cm}^2/\text{s} \approx 3141.59 \text{ cm}^2/\text{s}$$

On voit que le taux de variation de l'aire dépend du rayon du cercle. On explique cela géométriquement par le fait que pour un petit cercle, un accroissement de son rayon de 5 cm aura un grand effet sur l'aire, alors que pour un grand cercle, un même accroissement du rayon aura peu d'effet sur l'aire.

3.5 Dérivée d'ordre supérieur

Le « taux de changements du taux de changement » est une autre quantité importante pouvant nous donner de l'information sur le comportement d'une fonction. En dynamique, elle correspond à l'**accélération**, qui est le taux de changement de la vitesse, elle même le taux de changement de la position.

Comme le taux de changement d'une fonction un point de son graphe est donnée par la dérivée de la fonction, le taux de changement du taux de changement est donnée par la *dérivée de la dérivée*. On peut voir la dérivée d'une fonction comme une nouvelle fonction, que l'on peut dériver elle aussi.

Par exemple, si on prend $f(x) = x^3$, le taux de changement est donnée par $f'(x) = 3x^2$. Le taux de changement de f' est donc donné par la **dérivée seconde** $f''(x) = 6x$.

Définition 3.1. On appelle **dérivée seconde** d'une fonction la dérivée de sa dérivée

$$f''(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f'(x))'.$$

On défini de manière similaire la **dérivée troisième** $f'''(x) = (f''(x))'$, la **dérivée quatrième** $f''''(x) = (f'''(x))'$, etc.

On appelle ces dérivées les **dérivées d'ordre supérieur**.

Exemple 3.13. Calculer la dérivée troisième de $f(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{x} \\
 f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 f''(x) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}(x^{-1/2})' = -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)x^{-3/2} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \\
 f'''(x) &= \left(-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right)' = -\frac{1}{4}(x^{-3/2})' = -\frac{1}{4}\left(\frac{-3}{2}\right)x^{-5/2} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}
 \end{aligned}$$

Comme on peut répéter la dérivation autant de fois que l'on veut, l'accumulation de « ' » peut alourdir la notation. Il est plus pratique d'avoir une notation qui indique plus simplement le nombre de fois qu'une fonction est dérivée.

Définition 3.2.

$$\begin{aligned}
 \text{Dérivée première : } f^{(1)}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f'(x) \\
 \text{Dérivée seconde : } f^{(2)}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f''(x) = (f'(x))' \\
 \text{Dérivée troisième : } f^{(3)}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f'''(x) = (f^{(2)}(x))' \\
 \text{Dérivée quatrième : } f^{(4)}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f^{(4)}(x) = (f^{(3)}(x))' \\
 \text{Dérivée cinquième : } f^{(5)}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} (f^{(4)}(x))' \\
 &\vdots \\
 \text{Dérivée } n\text{-ième : } f^{(n)}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} (f^{(n-1)}(x))'
 \end{aligned}$$

La dérivée d'ordre quelconque $f^{(n)}$ est appelée **dérivée n -ième**. Par convention, la « dérivée 0-ième » est la fonction elle-même : $f^{(0)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$.

Les dérivées d'ordre supérieur ont une notation dans toute les variantes de la notation pour la dérivée. Le tableau suivant offre un panorama de ces notations.

Notations pour la dérivée seconde						
$f''(x)$	$f^{(2)}(x)$	y''	$(x^2)''$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$	$\frac{d^2 x^2}{dx^2}$
$f''(a)$	$f^{(2)}(a)$	$y'' _{x=a}$	$(x^2)'' _{x=a}$	$\frac{d^2y}{dx^2} _{x=a}$	$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} _{x=a}$	$\frac{d^2 x^2}{dx^2} _{x=a}$

Chapitre 4

Limites et continuité

4.1 Définition du concept de limite

On écrit $x \rightarrow a$ pour signifier que « x est aussi près que l'on veut de a ». De même manière, on écrit que $f(x) \rightarrow L$ pour dire que « $f(x)$ aussi près que l'on veut de L en choisissant les bonnes valeurs de x ».

Une manière d'interpréter la notation $x \rightarrow 2$ par exemple, est d'imaginer une suite quelconque de nombre qui s'approche de 2. On pourrait par exemple considérer

$$2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, \dots$$

ou encore

$$1.9, 1.99, 1.999, \dots$$

et même

$$2.1, 1.9, 2.01, 1.99, 2.001, 1.999, 2.0001, \dots$$

Définition 4.1. La notation $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ signifie :

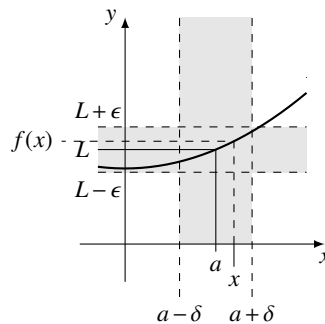
« $f(x)$ peut être aussi près de L que l'on veut si $x \in \text{dom}(f)$ est assez près de a , mais différent de a . »

On peut aussi dire : $f(x) \rightarrow L$ si $x \rightarrow a$ et $x \neq a$.

Note : la *manière* de se rapprocher de a ne change rien à la limite. Peu importe comment x se rapproche de a , si la limite existe, $f(x)$ se rapproche toujours de la limite L .

Version précise cette définition (où $d(x, y) = |y - x|$ est la distance entre x et y) :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. d(x, a) < \delta \implies d(f(x), L) < \epsilon$$



Enfin, la spécification d'une limite ne dépend pas du nom de la variable utilisée comme argument de fonction. On peut la changer comme on veut : les expressions $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{y \rightarrow a} f(y)$ et $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ désignent toutes la même quantité : la limite de la fonction quand son argument tend vers a .

4.1.1 Existence d'une limite

On dit que la limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe quand il y a un L tel que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L;$$

on peut écrire $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \exists$ pour dire que la limite existe sans spécifier la valeur de cette limite.

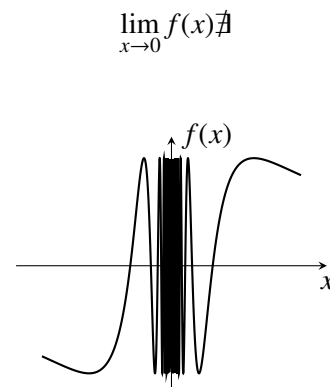
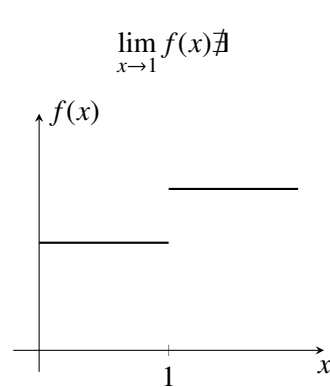
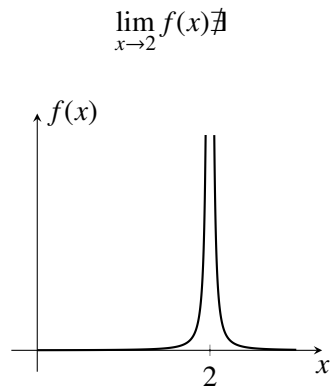
Une limite n'existe pas quand il n'y a pas de L tel que $f(x)$ puisse être aussi près de L que l'on veut si on prend des x assez près de a . Dans ce cas, on écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \nexists$.

Voici trois exemples où une limite n'existe pas.

Si la valeur de la fonction devient indéfiniment grande ou petite. Dans ce cas, on écrit habituellement $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$.

S'il y a un « saut » dans le graphe de la fonction faisant en sorte qu'en s'approchant d'un côté de a ou de l'autre, on trouverait des limites différentes.

Si la valeur de la fonction « oscille » entre différentes valeurs sans jamais s'approcher d'aucune valeur particulière.



4.1.2 Déterminer « expérimentalement » la limite d'une fonction

La limite de certaines fonctions peut être déterminée en observant le comportement des valeurs $f(x)$ quand on choisit des x de plus en plus près de a .

Exemple 4.1. On veut déterminer la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ si $f(x) = 2x + 1$. On prend des valeurs de x de plus en plus près de 0 (la colonne x du tableau suivant). Par chacune de ces valeurs, on calcule la valeur de $f(x)$.

x	$f(x)$
1.00000	3.00000
0.0312500	1.06250
0.00411523	1.00823
0.000976562	1.00195
0.000320000	1.00064
0.000128601	1.00026
0.0000594990	1.00012
0.0000305176	1.00006
0.0000169351	1.00003
0.0000100000	1.00002

On observe que quand $x \rightarrow 0$, $f(x) = 2x + 1$ se rapproche de 1.

Notons que ce comportement ne dépend pas des nombres choisis : peu importe comment $x \rightarrow 0$, $f(x)$ se rapproche de 1. Dans le tableau suivant, on prend des valeurs de x qui « oscillent » autour de la valeur centrale 0, mais de plus en plus près de 0. Les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus près de 1, même si elles ont parfois plus grande que 1, parfois plus petite que 1.

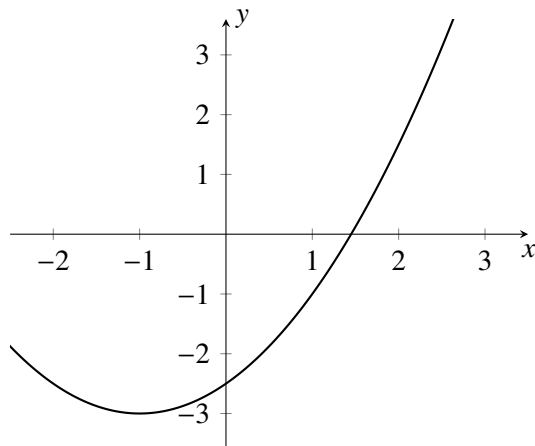
x	$f(x)$
0.0156250	1.03125
-0.00195312	0.996094
0.000578704	1.00116
-0.000244141	0.999512
0.000125000	1.00025
-0.0000723380	0.999855
0.0000455539	1.00009
-0.0000305176	0.999939
0.0000214335	1.00004
-0.0000156250	0.999969

Notons enfin que $f(0) = 1$, c'est à dire que la valeur de la fonction en $x = 0$ coïncide avec la valeur dont s'approche $f(x)$ quand $x \rightarrow 0$.

4.1.3 Évaluation d'une limite à l'aide d'un graphique

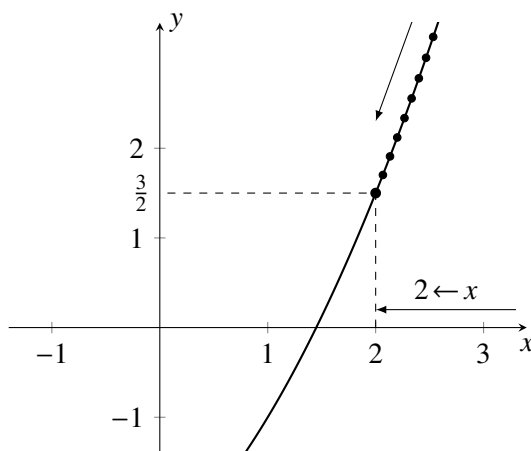
Si on connaît le graphique d'une fonction, on peut souvent deviner les valeurs des limites.

Exemple 4.2. Le graphe de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$ est le suivant.



Ajoutons les points calculés dans le tableau suivant, en prenant une suite de valeurs de x telle que $x \rightarrow 2$.

x	$f(x)$
2.0080	1.5240
2.0046	1.5139
2.0029	1.5088
2.0020	1.5059
2.0014	1.5041
2.0010	1.5030
2.0008	1.5023
2.0006	1.5017
2.0005	1.5014
2.0004	1.5011



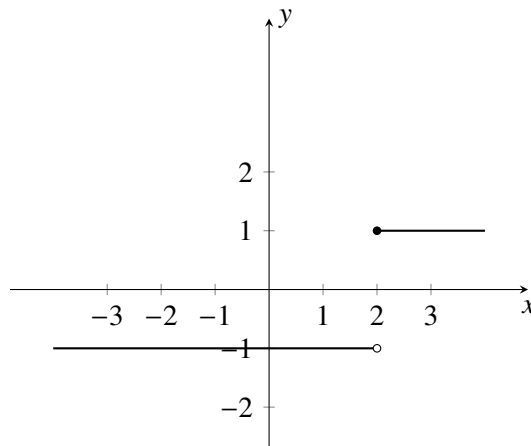
On voit sur le graphique que les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus proche de $3/2$. On a donc que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{3}{2}.$$

Cela est vrai peu importe comment la suite de valeurs de x s'approche de 2 : les valeurs de la fonction seront toujours de plus en plus près de $3/2$.

En étudiant le dernier exemple, on pourrait penser que la limite d'une fonction quand $x \rightarrow a$ est toujours $f(a)$, mais ce n'est pas le cas. Les fonction où la limite ne coïncide pas avec la valeur de la fonction sont dites **discontinues**. Tentez par

exemple de faire comme dans le dernier exemple pour deviner la valeur de la limite avec la fonction suivante.



Si on prend une suite de valeurs de x telle que $x \rightarrow 2$ et que $x > 2$, les valeurs de $f(x)$ s'approchent de 1 qui est $f(2)$. Cependant, si on prend une suite de valeurs de x qui s'approche de 2 mais telles que $x < 2$, alors les valeurs de $f(x)$ s'approchent de -1 , qui n'est pas $f(1)$. Ainsi, on voit qu'il n'est pas toujours vrai que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

4.1.4 Fonctions ayant les mêmes limites

Deux fonctions peuvent être globalement différentes, mais identiques dans certaines régions. Un principe très important pour évaluer algébriquement des limites (c'est à dire sans l'aide d'un tableau de valeurs ou d'un graphique), est de remplacer une fonction pour laquelle l'évaluation d'une limite est problématique par une autre pour laquelle la limite est plus facile à déterminer.

Nous faisons du même coup l'hypothèse que la valeur de la limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ne dépend pas du comportement de la fonction loin de $x = a$, mais uniquement des valeurs de $f(x)$ assez proche de $x = a$.

Hypothèse 2. Si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \neq a$ assez près de a , sauf peut-être en $x = a$, et si la limite du membre de droite existe, alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

4.2 Limites à gauche et limites à droite

Nous avons vu qu'une des situations faisant qu'une limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas est celle où faire s'approcher x de a par la gauche ou par la droite ne donne pas le même résultat. Pour étudier plus précisément ce type de situation, nous introduisons une version de la notion de limite où les valeurs de x sont contraintes à être « à gauche » ou « à droite » de a .

Les limites à gauche sont définies comme les limites en général, mais en limitant les valeurs possible de x « à gauche » de a .

On écrit $x \rightarrow a^-$ pour dire que x se rapproche de a par des valeurs plus petites que a . De même, on écrit $x \rightarrow a^+$ pour dire que x se rapproche de a par des valeurs plus grandes que a .

Définition 4.2.

Limites à droite : la notation $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ signifie :

« $f(x)$ peut être aussi près de L que l'on veut si $x \in \text{dom}(f)$ est assez près de a avec $x > a$. »

Limites à gauche : la notation $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ signifie :

« $f(x)$ peut être aussi près de L que l'on veut si $x \in \text{dom}(f)$ est assez près de a avec $x < a$. »

Le lien entre la limite et les limites à gauche et à droite est donné par le résultat suivant.

Hypothèse 3.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \nexists.$$

La seconde de ces hypothèses est utile pour déterminer algébriquement si une limite existe.

Exemple 4.3. Soit la fonction f définie de la manière suivante.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ (x+1)^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Déterminons si la limite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe.

D'une part, si $x \rightarrow 1$ par la droite, on a que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1^2 = 1.$$

Notez que nous utilisons l'hypothèse 2 pour remplacer $f(x)$ par x^2 quand $x \geq 1$, car les deux fonctions sont égales sur l'intervalle $[1, \infty[$ et ont donc les mêmes limites sur cette région.

D'autre part, si $x \rightarrow 1$ par la gauche, on a que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)^2 = (1+1)^2 = 4$$

En comparant les deux résultats, on voit que

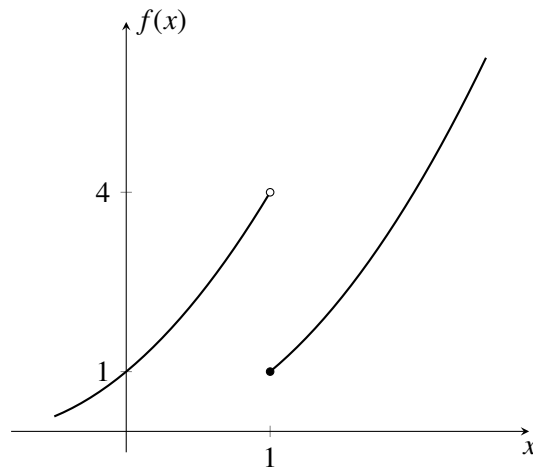
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x),$$

et donc, par l'hypothèse 3, la limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

n'existe pas.

Pour mieux comprendre l'argument algébrique, voici le graphe de la fonction f .



4.2.1 Composition de fonction

Quand on doit déterminer la limite d'une fonction composée comme $f \circ g$, la limite de la composition est trouvée à l'aide du résultat suivant.

Proposition 4.1. Si la limite $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existe, on peut poser $b = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. On a

alors que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow b} f(y).$$

Démonstration. Supposons que la limite $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existe, et posons $b = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ et $y = g(x)$. Il faut montrer que

$$\lim_{y \rightarrow b} f(y) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)).$$

Quand $x \rightarrow a$, $y = g(x) \rightarrow b$ par définition de b . Les limites $\lim_{y \rightarrow b} f(y)$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(g(x))$ sont donc égales. Comme la variable utilisée comme argument de fonction dans une limite n'a pas d'importance,

$$\lim_{x \rightarrow b} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow b} f(y) = \lim_{x \rightarrow b} f(x). \quad \square$$

Exemple 4.4. On peut évaluer

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x+1)^2$$

en considérant la fonction donnée comme la composition de $f(x) = x^2$ et de $g(x) = x+1$. Comme $\lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3$, on peut remplacer la limite originale en utilisant la dernière proposition :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x+1)^2 = \lim_{y \rightarrow 3} y^2.$$

Exemple 4.5.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x-2} = \lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{y}.$$

4.3 Limites et continuité

Le concept de *continuité* permet de mieux comprendre pourquoi certaines limites n'existent pas.

On dit qu'une fonction est continue en un point si son comportement près de ce point permet de prédire la valeur de la fonction à ce point. Plus rigoureusement, on définit la continuité de la manière suivante.

Définition 4.3. Une fonction f est continue au point a si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

la limite existe et que $f(a)$ soit défini.

4.3.1 Continuité des fonctions définies par morceaux

Exemple 4.6. Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Comme la fonction f est définie par un polynôme si $x \neq 1$, f est continue pour toute valeur de $x \neq 1$. Est-ce que f est continue en $x = 1$?

Pour que f soit continue en $x = 1$, il faut que (1) $f(1)$ soit défini, (2) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe et que

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1).$$

Par définition, $f(1) = 3$.

On vérifie $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ à l'aide des limites à droite et à gauche.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = (1)^2 = 1$$

Comme la limite à droite (2) n'est pas égale à la limite à gauche (1), $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ n'existe pas et f ne peut pas être continue en $x = 1$.

Exemple 4.7. Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 2 \\ -10 & \text{si } x = 2 \\ 2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Comme la fonction f est définie par un polynôme si $x \neq 0, 1$, f est continue pour toute valeur de $x \neq 0, 1$. Est-ce que f est continue en $x = 0$ et en $x = 1$?

En $x = 0$: $f(0) = 0^2 = 0$ est défini.

On vérifie si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe à l'aide des limites à droite et à gauche.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = (0)^2 = 0$$

Comme la limite à droite est égale à la limite à gauche et on la même valeur 0, la limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Enfin, on a que

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0;$$

la fonction est donc continue en $x = 0$.

En $x = 2$, on a que $f(2) = -10$ par définition.

On vérifie si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe à l'aide des limites à droite et à gauche.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2$$

Les deux limites existent et ont la valeur 2. On a donc que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

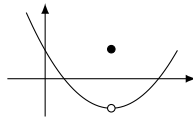
La fonction n'est cependant pas continue en $x = 2$ car $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ alors que $f(2) = -10$. On a donc que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2).$$

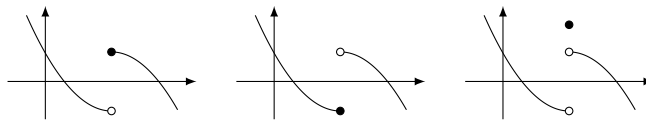
4.3.2 Différent types de discontinuités

On peut se servir de la définition de continuité (4.3) pour classifier les discontinuités : il y a quatre types de discontinuités :

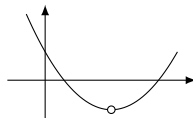
Type 1 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ mais la limite existe et $f(a)$ est définie.



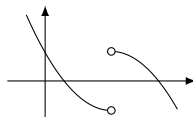
Type 2 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas mais $f(a)$ est défini.



Type 3 $f(a)$ n'est pas définie mais $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.



Type 4 $f(a)$ n'est pas définie et $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas.



Quand une fonction ait une discontinuité en $x = a$ qui ne peut pas être modifiée en fonction continue en a en modifiant la définition de $f(a)$ de manière à ce que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, la discontinuité est dite **essentielle**. Dans le cas contraire, on dit que la discontinuité est **non-essentielle**. Les discontinuités non-essentielles sont celles où la limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, c'est à dire celle de type 1 et 3.

4.3.3 Continuité sur un intervalle

Définition 4.4. On dit qu'une fonction f est continue sur un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}$ si elle est continue pour chaque x dans I .

Dans ce cours, l'ensemble I sera le plus souvent un intervalle comme $[a, b]$, $]a, b[$, $]a, b]$ ou $[a, b[$. L'ensemble I peut aussi être le domaine de la fonction f ($I = \text{dom}(f)$); si f est continue sur $\text{dom}(f)$, on dit que « f est continue sur son domaine. »

Comme une fonction n'est pas continue là où elle n'est pas définie, le domaine d'une fonction coïncide souvent avec l'ensemble des valeurs où une fonction est continue.

4.4 Propriétés des limites

Hypothèse 4. *Propriétés axiomatiques des limites acceptés sans démonstration, mais motivées par l'intuition géométrique.*

(AL1) *Si une limite existe, elle est unique.*

(AL2) $\lim_{x \rightarrow a} C = C$ ($C = \text{constante}$)

(AL3) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

(AL4) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, si les deux limites du membre de droite existent.

(AL5) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$, si les deux limites du membre de droite existent.

Proposition 4.2. Les limites ont les propriétés suivantes, pouvant être déduites des propriétés axiomatiques.

(PL1) $\lim_{x \rightarrow a} C f(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ si la limite du membre de droite existe.

(PL2) $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$.

(PL3) $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$, où $P(x)$ est un polynôme.

(PL4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, si les deux limites du membre de droite existent et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$.

(PL5) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ si $\sqrt[n]{a}$ est défini.

(PL6) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ quand $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes et quand $Q(a) \neq 0$.
 (Les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaines)

Démonstration. (PL1)

$$\lim_{x \rightarrow a} C f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} C \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \quad (AL3)$$

$$= C \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (AL1)$$

(PL2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} x^n &= \lim_{x \rightarrow a} \overbrace{x \cdots x}^{n \text{ fois}} \\ &= \overbrace{\left(\lim_{x \rightarrow a} x \right) \cdots \left(\lim_{x \rightarrow a} x \right)}^{n \text{ fois}} \\ &= \overbrace{a \cdots a}^{n \text{ fois}} \\ &= a^n \end{aligned}$$

(PL3) Comme un polynôme est une somme de monômes consistants en puissances de x multipliés par des constantes, on utilise (PL1), (PL2) et (AL3) pour démontrer l'égalité voulue.

La démonstration des autres propositions est laissée en exercice! □

4.4.1 Continuité des fonctions transcendantes

Hypothèse 5. On suppose la continuité de certaines fonctions transcendantes.

(AL6) $\lim_{x \rightarrow a} x^r = a^r$ pour un nombre réel r quelconque.

(AL7) $\lim_{x \rightarrow a} b^x = b^a$ (la fonction exponentielle est continue)

(AL8) $\lim_{x \rightarrow a} \log_b(x) = \log_b(a)$ si $\log_b(a)$ est défini. (la fonction logarithme est continue)

(AL9) $\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a)$ (la fonction sinus est continue)

(AL10) $\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a)$ (la fonction cosinus est continue)

(AL11) $\lim_{x \rightarrow a} \tan(x) = \tan(a)$ (la fonction tangente est continue)

Exemple 4.8. On peut déduire que $\cos(x)$ et $\tan(x)$ sont des fonctions continues sur leurs domaines à l'aide des autres propriétés des limites données jusqu'ici.

(PL7) $\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a)$ (la fonction cosinus est continue)

(PL8) $\lim_{x \rightarrow a} \tan(x) = \tan(a)$ (la fonction tangente est continue)

On laisse en exercice ces démonstrations, que l'on peut faire en utilisant les identités suivantes :

$$\cos(x) = \sin(x + \pi/2) \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

4.5 Continuité et composition de fonctions

Théorème 4.1. La fonction f est continue en b si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$$

pour toutes les fonctions g telle que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ existe.

Autrement dit, une fonction est continue en un point si et seulement si on peut « échanger la limite et la fonction » ou « la limite passe à travers la fonction. »

Exemple 4.9. Évaluons $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x-3}$ à l'aide du théorème 4.1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x-3} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} x-3} \\ &= \sqrt{4-3} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Exemple 4.10. Évaluons $\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{100}$ à l'aide du théorème 4.1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{100} &= \left(\lim_{x \rightarrow 2} x-1\right)^{100} \\ &= (2-1)^{100} \\ &= 1^{100} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Démonstration. Supposons que f est continue en $b = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, c'est à dire que

$$\lim_{u \rightarrow b} f(u) = f(b).$$

Si g est une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, on peut remplacer b par $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ et obtenir

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right).$$

Quand $x \rightarrow a$, $g(x) \rightarrow b$. On peut donc remplacer $\lim_{u \rightarrow b} f(x)$, en posant $u = g(x)$ qui s'approche de b quand x tend vers a . C'est une manière particulière de tendre vers a , mais comme on suppose que $\lim_{u \rightarrow b} f(u) = f(b)$ peu importe la manière que u s'approche de a , cette manière particulière ne change pas la limite qui est toujours $f(b)$. Ainsi

$$\lim_{u \rightarrow b} f(u) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)).$$

En combinant les résultats, on obtient le résultat voulu :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))\right).$$

La réciproque est plus simple à démontrer. On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))\right)$$

pour toute fonction g telle que $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existe. On peut prendre le cas particulier $g(x) = x$, car la limite existe. L'hypothèse devient

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow a} x = a$, on obtient que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

ce qui montre que f est continue en a . □

Enfin, on démontre que la composition de deux fonctions continues est elle aussi continue.

Proposition 4.3. Si f et g sont deux fonctions continues, alors la composée $f \circ g$ est aussi continue et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(g(a)).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f \circ g](x) &= \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) \\ &= f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) \quad (\text{par thm 4.1 et } f \text{ continue}) \\ &= f(g(a)) \quad (\text{car } g \text{ continue}) \\ &= [f \circ g](a) \end{aligned}$$

Ainsi, la composée $f \circ g$ est continue car $\lim_{x \rightarrow a} [f \circ g](x) = [f \circ g](a)$. □

En combinant les hypothèses (AL1) à (AL11) et les propriétés (PL1) à (PL8) et cette dernière proposition, on sait maintenant que toutes les fonctions obtenues en combinant des fonctions continues par composition, produits, quotients, puissances, racines, etc, sont elles aussi continues.

4.5.1 Limites à gauche et à droite et composition

La propriété 4.1 s'applique aux limites à droites et à gauche dans certaines conditions.

Par exemple, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x)$ si $b = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$.

On utilise habituellement les notations suivantes

$f(b^+)$ pour $\lim_{x \rightarrow a^+} f(g(x))$ quand $g(x) \rightarrow b^+$ quand $x \rightarrow a^+$.

$f(b^-)$ pour $\lim_{x \rightarrow a^-} f(g(x))$ quand $g(x) \rightarrow b^-$ quand $x \rightarrow a^-$.

Il faut donc pouvoir déterminer de quelle manière $g(x)$ approche de b quand $x \rightarrow a^+$.

On peut par exemple utiliser le résultat suivant et la factorisation :

Proposition 4.4.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} (x - a) = 0^-$$

On peut ainsi écrire que $(a^+ - a) = 0^+$ et $(a^- - a) = 0^-$.

Exemple 4.11.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5^+} \sqrt{x-5} &= \sqrt{5^+ - 5} \\ &= \sqrt{0^+} \\ &= 0 \end{aligned}$$

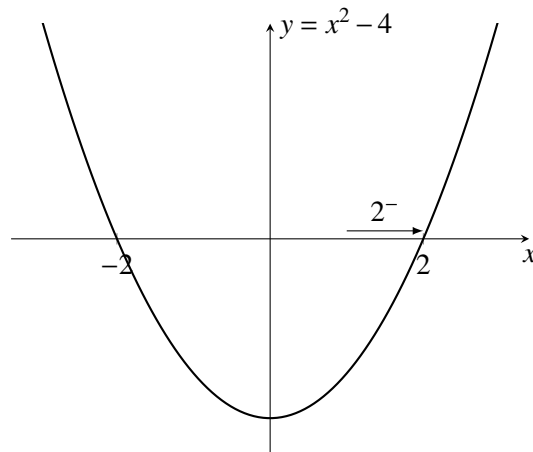
$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \sqrt{x-5} = \sqrt{5^- - 5} = \sqrt{0^-} \nexists.$$

Exemple 4.12.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{(x-2)(x+2)} \\ &= \sqrt{(2^+ - 2)(2^+ + 2)} \\ &= \sqrt{(0^+)(4)} \\ &= \sqrt{0^+} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{(x-2)(x+2)} \\
&= \sqrt{(2^- - 2)(2^- + 2)} \\
&= \sqrt{(0^-)(4)} \\
&= \sqrt{0^-} \\
&= 0
\end{aligned}$$

On peut mieux comprendre pourquoi $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 4$ à l'aide du graphe de $y = x^2 - 4$.



On voit dans ce graphe que les valeurs de y sont plus petite que 0 quand $x \rightarrow 2^+$, donc que $y \rightarrow 0^-$.

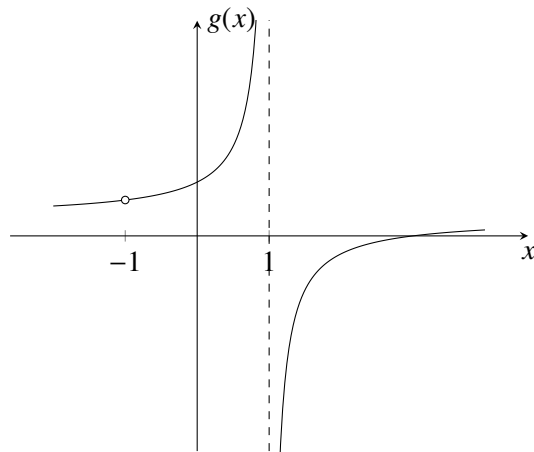
4.6 Indéterminations

Une **indétermination** de la forme « $\frac{0}{0}$ » est une situation où, en évaluant la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

on trouve que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Dans cette situation, les propriétés des limites que nous avons vu jusqu'ici ne permettent pas de déterminer la valeur de la limite (d'où le terme *indétermination* ou *forme indéterminée*).

Exemple 4.13. Considérer la fonction $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$.



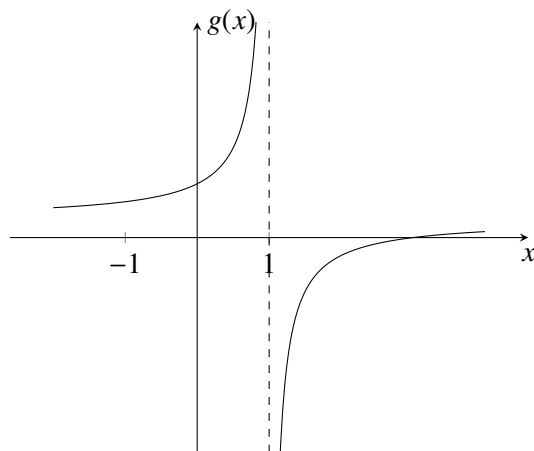
En factorisant le numérateur et le dénominateur de la fraction algébrique qui définit la fonction et en simplifiant, on trouve que

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-3}{x-1}.$$

La fonction f n'est pas définie en $x = -1$ et en $x = 1$, car ces deux valeurs entraînent des divisions par zéro. Cependant, l'expression $\frac{x-3}{x-1}$ peut s'évaluer quand $x = 1$. Si on définit

$$g(x) = \frac{x-3}{x-1},$$

on a une nouvelle fonction qui a les mêmes valeurs que f , sauf quand $x = 1$. Son graphe est le suivant :



On a donc la situation suivante : les propriétés des limites vue précédemment ne permettent pas d'évaluer

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

parce qu'il y a une discontinuité. La discontinuité de la fonction f est cependant non-essentielle. En simplifiant le facteur commun à $x^2 - 2x - 3$ et à $x^2 - 1$, on obtient une nouvelle fonction g . Comme les deux fonctions sont identiques sauf en $x = -1$, on peut remplacer f par g pour évaluer la limite :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-3}{x-1} = \frac{(-1)-3}{(-1)-1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Ces indéterminations « $\frac{0}{0}$ » sont dues à une discontinuité de la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$. Si cette discontinuité est non-essentielle, on peut « lever l'indétermination » en utilisant l'hypothèse 2. On rappelle qu'intuitivement, cette hypothèse permet de remplacer dans une limite une fonction par un autre si les deux fonctions sont identiques près d'une valeur a . Cela permet de remplacer une fonction f discontinue en a par une fonction g continue en a qui a la même limite. Comme g est continue en a , la limite $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ s'évalue plus facilement que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

4.6.1 Techniques algébriques pour lever les indéterminations

Pour utiliser l'hypothèse 2, il faut être capable de trouver la bonne fonction de remplacement ! Dans les indétermination « $\frac{0}{0}$ », on peut trouver $g(x)$ en simplifiant un facteur commun au dénominateur et au numérateur — le « facteur coupable. »

Dans le cadre de ce cours, il y aura trois techniques algébriques pour trouver le facteur commun à simplifier pour lever une indétermination « $\frac{0}{0}$ » :

- factoriser (utiliser le théorème de factorisation ou une identité connue) ;
- multiplier par le conjugué s'il y a des racines.
- mettre au dénominateur commun s'il y a des fractions.

Ces trois techniques ne permettent pas de lever toutes les indéterminations, car dans certains cas, on peut obtenir une forme « $0/0$ » sans que l'on puisse facilement trouver un facteur à simplifier. Par exemple, la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

est une indétermination « $\frac{0}{0}$ », mais comment trouver au numérateur un facteur x à simplifier avec le dénominateur ? Nous verrons plus loin que cette limite vaut 1. Cette limite est très importante en science (en physique en particulier) car elle permet d'approximer $\sin(x)$ par x quand on sait que x est près de 0.

Exemple 4.14. Dans cet exemple, on simplifie le facteur commun par factorisation polynomiale.

Premièrement, on vérifie que

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x^3 - 3x^2 - 10x + 24}$$

est donne bien une expression de la forme « $0/0$ » quand $x = 4$. On a donc que $x = 4$

est un zéro des polynômes $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ et $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$. Par le théorème de factorisation, on sait que $(x-4)$ est un facteur de chacun de ces deux polynôme. On trouve par division polynômiale que

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x^2 + x - 2) \text{ et } x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x-4)(x^2 + x - 6).$$

On utilise ces factorisation pour simplifier le facteur commun $x-4$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x^3 - 3x^2 - 10x + 24} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x^2 + x - 2)}{(x-4)(x^2 + x - 6)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{(x-4)}(x^2 + x - 2)}{\cancel{(x-4)}(x^2 + x - 6)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x - 6} \\ &= \frac{4^2 + 4 - 2}{4^2 + 4 - 6} \\ &= \frac{9}{7} \end{aligned}$$

Exemple 4.15. On vérifie pour commencer que l'on a bien une forme « 0/0 » :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{4-4}{\sqrt{4}-2} = \frac{0}{0}.$$

On utilise le conjugué de $\sqrt{x}-2$ pour éliminer la racine problématique : $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) = (x-4)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{(x-4)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x}+2 \\ &= \sqrt{4}+2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Exemple 4.16. Dans cet exemple, on utilise la mise au dénominateur commun.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{4}}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{4-x}{4x}}{x-4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{4x} \frac{1}{x-4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x-4)}{4x} \frac{1}{x-4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{-(x-4)}}{4x} \frac{1}{\cancel{(x-4)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{4x} \\
 &= -\frac{1}{16}
 \end{aligned}$$

4.7 Limites et continuité de fonctions définies par morceaux

Rappel Une fonction définie par morceaux est une fonction dont la règle de définition comporte plusieurs cas mutuellement exclusifs.

Exemple 4.17. La fonction **valeur absolue** est une fonction définie par morceaux :

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Ainsi, si on évalue $|3|$, comme $3 \geq 0$, c'est la première ligne de la définition qui doit être utilisée. Cela donne que $|3|=3$.

Si on évalue plutôt $|-3|$, comme $-3 < 0$, c'est la seconde ligne de la définition qui doit être utilisée. Cela donne que $|-3| = -(-3) = 3$.

Pour évaluer une limite avec $x \rightarrow a$, on vérifie dans quelle partie de la fonction on se trouve : est-ce que si x est assez près de a , x vérifie une des conditions ou se trouve plutôt à la « frontière » entre deux conditions ?

Exemple 4.18.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} |x| &= \lim_{x \rightarrow 2} x && \text{(hyp 2, car } |x| = x \text{ près de } x = 2) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3} |x| &= \lim_{x \rightarrow -3} -x && (\text{car } |x| = -x \text{ près de } x = -3) \\ &= -(-3) \\ &= 3\end{aligned}$$

Pour évaluer

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|$$

nous devons séparer la limite en limite à droite et limite à gauche car 0 est une valeur « frontière ».

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| &= \lim_{x \rightarrow 0} x && (\text{car } |x| = x \text{ si } x \geq 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| &= \lim_{x \rightarrow 0} -x && (\text{car } |x| = -x \text{ si } x < 0) \\ &= -0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Comme les limites à gauche et à droite coïncident,

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

4.8 Comparaisons de limites

Hypothèse 6. Si $f(x) \leq g(x)$ pour toutes valeurs de x assez près de a , on a que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

quand ces deux limites existent.

On utilise souvent la conséquence suivante de la dernière hypothèse pour déterminer la valeur de certaines limites problématiques.

Théorème 4.2 (des gendarmes ou du Sandwich). Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout les x assez près de a , on a que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \implies \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

Démonstration. En utilisant l'hypothèse 6, on a que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x).$$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, l'inégalité précédente devient

$$L \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x) \leq L.$$

Comme le seul nombre à la fois plus grand et plus petit que L est L lui-même, on doit avoir que

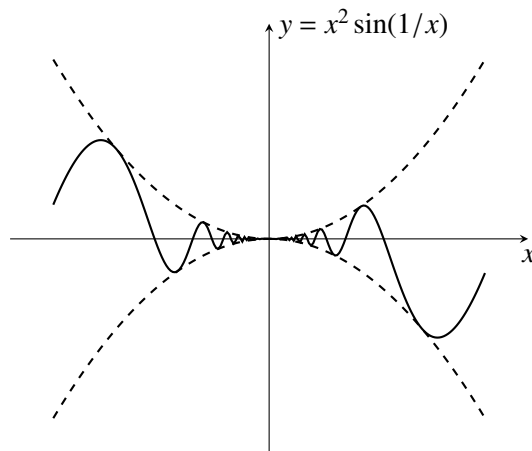
$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L. \quad \square$$

L'exemple suivant utilise la fonction sinus et le fait que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$. Nous définirons et étudierons en détail la fonction sinus plus loin.

Exemple 4.19. Évaluons la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Sur ce graphique de la fonction $x^2 \sin(1/x)$, on voit que son graphe est compris entre le graphe de $y = -x^2$ et celui de $y = x^2$.



Comme $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$, on doit avoir que

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2.$$

On doit donc avoir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2,$$

en évaluant on trouve que

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0.$$

Il faut donc que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

,