# 1 Le rayon d'un cercle augmente au rythme de 2cm/sec. À quel rythme la surface augmente-t-elle lorsque le rayon est de 15 cm ?

*Les variables :*

- rayon : $r$ (cm) - temps : $t$ (sec)
- aire : A et l'aire d'un cercle en fonction du rayon est de $A(r)=\pi r^2$.

*Taux de variation :* $\dfrac{dA}{dt}=\dfrac{dA}{dr}\bullet\dfrac{dr}{dt}$

- Le taux de variation de l'aire en fonction du rayon est alors : $A'(r)=\dfrac{dA}{dr}=\dfrac{d}{dr}\left(\pi r^2\right)=\pi 2r$.
- Le taux de variation du rayon par rapport au temps est de : $\dfrac{d}{dt}(r)=\dfrac{dr}{dt}=2cm/\sec$.
- Alors le taux de variation de l'aire en fonction du temps est de:

$$\frac{dA(r(t))}{dt}=\frac{dA(r)}{dr}\bullet\frac{dr}{dt}=2\pi r\bullet\frac{dr}{dt}=2\pi r(2)=4\pi r\text{ cm}^2/\text{sec}$$

Si le rayon est de 15 cm alors $\dfrac{dA(r)}{dt}=4\pi 15\text{ cm}^2/\text{sec}=60\pi\text{ cm}^2/\text{sec}$.

# 2 Une nappe de pétrole se répand circulairement sur l'océan. Le rayon de la nappe augmente de 0,05 km/jour. Calculez à quel taux augmente la surface de la nappe de pétrole lorsque celle-ci a un rayon de 1,2 km.

*Les variables :*

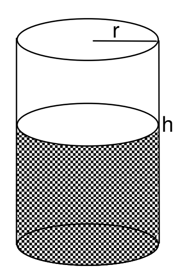
- rayon : $r$ (km) - temps : $t$ (jours)
- aire : A et l'aire d'un cercle en fonction du rayon est de $A(r)=\pi r^2$.

*Taux de variation :* $\dfrac{dA}{dt}=\dfrac{dA}{dr}\bullet\dfrac{dr}{dt}$

- $\dfrac{dA(r(t))}{dt}=\dfrac{dA(r)}{dr}\bullet\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{d\left(\pi r^2\right)}{dr}\bullet\dfrac{dr}{dt}=2\pi r(0{,}05)=0{,}1\pi r\text{ km}^2/\text{j}$ .

Si le rayon est à 1,2 km nous aurons : $\dfrac{dA}{dt}=0{,}1\pi(1{,}2)=0{,}12\pi\text{ km}^2/\text{j}$

# 3 À quelle vitesse le niveau d'un liquide à l'intérieur d'un cylindre vertical baisse-t-il si nous le vidons au taux de $3\text{m}^3/\text{min}$ ?




*Les variables :*

- rayon du cylindre : $r$ (m) - temps : $t$ (min) - hauteur du liquide : $h$ (m)
- volume : V et le volume d'un cylindre est de $V=\pi r^2 h$.

*Taux de variation :* $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dh}\bullet\dfrac{dh}{dt}$

- $\dfrac{dV}{dt}=3\text{ m}^3/\text{min}$.
- Sachant que le rayon est fixe, donc une constante : $\dfrac{dV}{dh}=\dfrac{d(\pi r^2 h)}{dh}=\pi r^2$
- Nous cherchons $\dfrac{dh}{dt}$, alors $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dh}\bullet\dfrac{dh}{dt}=\pi r^2\bullet\dfrac{dh}{dt}=3\text{ m}^3/\text{min}$ Donc : $\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{3}{\pi r^2}$ m/min .

# 4 On gonfle un ballon sphérique dont le volume en fonction du rayon est de $V = \frac{4\pi r^3}{3}$. Si le rayon augmente au rythme de 2 cm/sec, quel est le taux de variation du volume par rapport au temps ?

*Les variables :*

- rayon de la sphère: $r$ (cm) - temps : $t$ (sec)
- volume : V et le volume de la sphère en fonction du rayon est de $V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$.

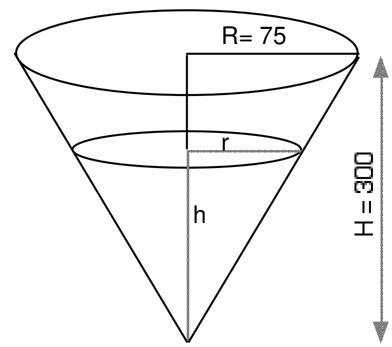
*Taux de variation :* $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \bullet \frac{dr}{dt}$

- $\frac{dr}{dt} = 2$ cm/sec - $\frac{dV}{dr} = \frac{d\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right)}{dr} = \frac{4}{3}\pi 3r^2 = 4\pi r^2$
- Donc $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \bullet 2 = 8\pi r^2$ cm$^3$/sec

# 5 On verse dans un cône droit un liquide au rythme de 6000 cm$^3$/sec. Quel est le taux de variation du rayon par rapport au temps ? Quel est le taux de variation de la hauteur ?

*Les variables :*

- rayon du cône: R = 75 cm - hauteur du cône : H = 300 cm
- rayon du liquide : $r$ (cm) - hauteur du liquide : $h$ (cm)
- volume : V et le volume d'un cône est de $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$.




Nous cherchons : $\frac{dr}{dt}$ *et* $\frac{dh}{dt}$.

*Taux de variation :* a) $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \bullet \frac{dr}{dt}$ et b) $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \bullet \frac{dh}{dt}$

Dans cette situation les deux variables $r$ et $h$ sont liées.

Dans le triangle rectangle nous pouvons dire : $\frac{r}{75} = \frac{h}{300}$. Donc $h = 4r$.

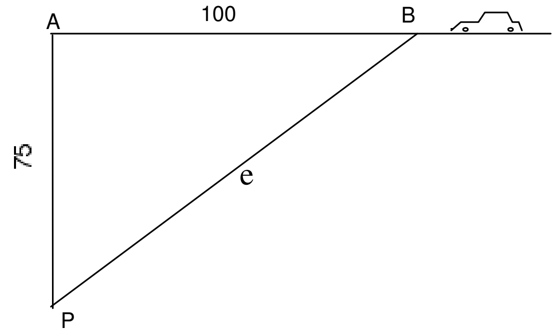
a) Le volume devient alors : $V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi r^2 4r}{3} = \frac{4\pi}{3} r^3$ et $V(r) = \frac{4\pi}{3} r^3$.

- $\frac{dV}{dt} = 6000$ cm$^3$/sec - $\frac{dV}{dr} = \frac{d\left(\frac{4\pi}{3} r^3\right)}{dr} = \frac{4\pi}{3} 3r^2 = 4\pi r^2$
- Donc : $\frac{dV}{dt} = 6000$ cm$^3$/sec $= 4\pi r^2 \bullet \frac{dr}{dt}$ En isolant : $\frac{dr}{dt} = \frac{6000}{4\pi r^2}$ cm/sec $= \frac{1500}{\pi r^2}$ cm/sec.

b) De même : $V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi\left(\frac{h}{4}\right)^2 h}{3} = \frac{\pi}{48} h^3$ et $V(h) = \frac{\pi}{48} h^3$.

- $\frac{dV}{dt} = 6000$ cm$^3$/sec - $\frac{dV}{dr} = \frac{d\left(\frac{\pi}{48} h^3\right)}{dh} = \frac{\pi}{48} 3h^2 = \frac{\pi}{16} h^2$
- Donc : $\frac{dV}{dt} = 6000$ cm$^3$/sec $= \frac{\pi}{16} h^2 \bullet \frac{dh}{dt}$ En isolant : $\frac{dh}{dt} = \frac{6000}{\left(\frac{\pi}{16} h^2\right)}$ cm/sec $= \frac{96000}{\pi h^2}$ cm/sec.

# 6 Un policier placé au point P mesure la vitesse des voitures qui se déplacent dans la direction du point A. Le policier est à 75 m du point A et la mesure se fait lorsque la voiture est à 100 m du point A, soit lorsque la voiture arrive au point B. Si la vitesse permise est de 50 km/h, quelle vitesse le policier doit-il considérer comme étant la limite de vitesse permise mesurée par son radar ?




*Les variables :*

- temps: $t$ (h)
- distance séparant la voiture du point A : $x$ (km)
- distance séparant le policier de la voiture : e (km) et $e^2 = x^2 + 75^2$

Nous cherchons : $\dfrac{de}{dt}$ la vitesse de l'automobile par rapport au policier

*Taux de variation :* $\dfrac{de}{dt} = \dfrac{de}{dx} \bullet \dfrac{dx}{dt}$

- $\dfrac{d(e^2)}{dx} = \dfrac{d(x^2 + 75^2)}{dx} \rightarrow 2e\dfrac{de}{dx} = 2x \rightarrow \dfrac{de}{dx} = \dfrac{2x}{2e} = \dfrac{x}{e}$
- $\dfrac{dx}{dt} = 50$ km/h (vitesse permise)
- Donc $\dfrac{de}{dt} = \dfrac{x}{e} \bullet 50$ et comme $x = 100$ alors $e = \sqrt{100^2 + 75^2} = 125$ et;

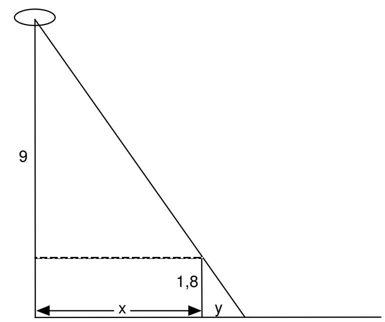
  $$\frac{de}{dt} = \frac{100}{125} \cdot 50 = 40 \text{ km/h}$$

En conséquence, si la vitesse du véhicule se dirigeant vers le point A et que la vitesse dans la direction du policier dépasse 40 km/h alors, il y aura une infraction au code de la route. Ce résultat n'est valide qu'aux positions respectives du policier et de la voiture situés au point P et au point B.

# 7 Une personne dont la taille est de 1,8 m s'éloigne à une vitesse de 2,2 m/s d'un réverbère situé à 9m du sol.

a) À quelle vitesse la longueur de son ombre varie-t-elle ?

b) À quelle vitesse l'extrémité de son ombre se déplace-telle ?




*Les variables :*

- distance entre la personne et le réverbère: $x$ (m)
- distance de l'ombre : $y$ (m)

Nous cherchons : $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{d(y+x)}{dt}$

*Taux de variation :* $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \bullet \frac{dx}{dt}$ et $\frac{d(y+x)}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt}$

- $\frac{dx}{dt} = 2,2\, m/\sec$.
- $\frac{y}{x} = \frac{1,8}{9-1,8} = \frac{1,8}{7,2} = \frac{18}{72} = \frac{9 \cdot 2}{9 \cdot 8} = \frac{1}{4}$, c'est-à-dire : $y = \frac{1}{4}x$, alors $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}$
- Donc $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \bullet \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4} \bullet 2,2 = 0,55$ m/sec .

- De plus : $\frac{d(y+x)}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = (0,55 + 2,2) = 2,75$ m/sec .


Fait par : Claude Laflèche A-06

Modifié par : Julie Tremblay A-06