Résumé – Vecteurs

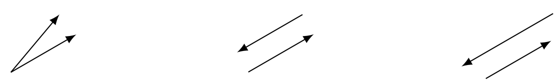
1 Vecteurs

1.1 Définitions

Un **vecteur** $\vec{v}$ est une quantité orientée. Un vecteur a les trois caractéristiques suivantes :

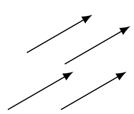
Longueur : $\|\vec{v}\|$
Direction : droite qui supporte le vecteur
Sens : le sens de parcourt de la droite support

Même longueur sens et direction différents	Même longueur, Même direction sens différents	Même direction Même sens Longueur différentes



Deux vecteurs sont égaux quand ils ont la même longueur, la même direction et le même sens.

Note : on peut penser à un vecteur comme à un *déplacement* qui n'a pas d'origine spécifiée. Tous les vecteurs suivants sont égaux car ils ont la même longueur, la même direction et le même sens.

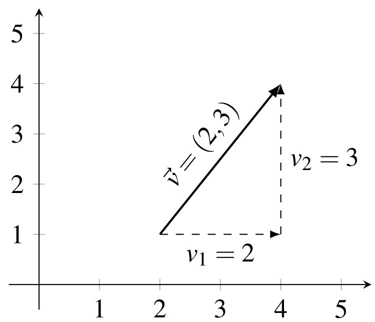


1.2 Forme cartésienne

La forme cartésienne d'un vecteur $\vec{v}$ est la suivante :

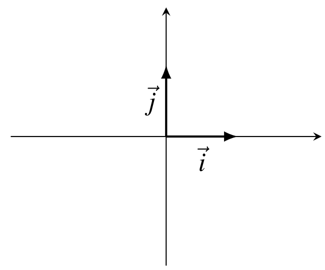
$$\vec{v} = (v_1, v_2) \text{ dans } \mathbb{R}^2 \qquad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

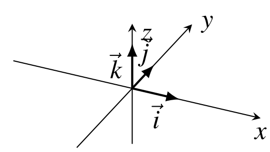
Les nombres v_1,v_2, v_3, etc, sont les **composantes** du vecteur $\vec{v}$.



1.3 Vecteurs de base

Dans $\mathbb{R}^2$: $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$
Dans $\mathbb{R}^3$: $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$





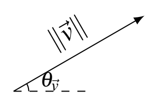
Prop

$$(v_1, v_2, v_3) = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$

1.4 Forme polaire

$$\|\vec{v}\| = \text{ longueur de } \vec{v}$$

$$\theta_{\vec{v}} = \text{ angle de } \vec{v}$$



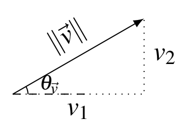
$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \angle \theta_{\vec{v}}$$

1.4.1 Forme cartésienne à polaire

Si $\vec{v} = (v_1, v_2)$,

$$\text{longueur } = \|\vec{v}\|$$

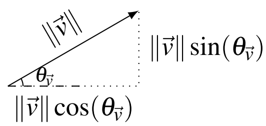
$$\text{angle } = \theta_{\vec{v}} = \arctan\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$



1.4.2 Forme polaire à cartésienne

Si $\vec{v} = \|\vec{v}\| \angle \theta$, alors

$$v_1 = \|\vec{v}\| \cos(\theta), \qquad v_2 = \|\vec{v}\| \sin(\theta).$$



1.5 Opérations

1.5.1 Vecteur nul

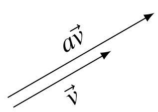
Le vecteur nul est le vecteur $\vec{0} \overset{\text{def}}{=} (0,0)$ (ou $(0,0,0)$ dans $\mathbb{R}^3$).

1.5.2 Produit par un scalaire

Un **Scalaire** a est un nombre réel $a \in \mathbb{R}$. Le produit d'un vecteur $\vec{v}$ par un scalaire a est défini de la manière suivante :

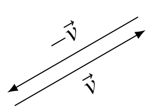
$$a\vec{v} = a(v_1, v_2) \overset{\text{def}}{=} (av_1, av_2)$$

Multiplier un vecteur $\vec{v}$ par un scalaire a change sa longueur par un facteur a :



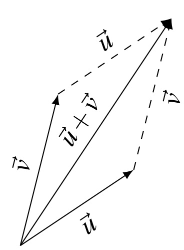
Note

$$-\vec{v} = (-1)\vec{v}$$



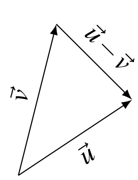
1.5.3 Somme de vecteurs

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) \overset{\text{def}}{=} (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$



1.5.4 Différence de vecteurs

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\vec{v} = (u_1, u_2) - (v_1, v_2) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$$

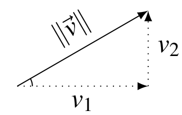


1.6 Norme

La **norme** d'un vecteur est sa longueur. Si les composantes d'un vecteur sont connues, on calcule sa norme de la manière suivante :

$$\|\vec{v}\| = \|(v_1, v_2)\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \text{ dans } \mathbb{R}^2$$

$$\|\vec{v}\| = \|(v_1, v_2, v_3)\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \text{ dans } \mathbb{R}^3$$



Normalisation de $\vec{v}$ (même sens et direction, longueur 1)

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

Prop

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1, \|0\| = 0$$

$$\|a\vec{v}\| = |a|\|\vec{v}\|$$

Prop

$$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

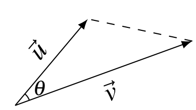
1.7 Produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) \overset{\text{def}}{=} u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Prop (Loi des cos)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta)$$

où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Prop

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)$$

1.7.1 Projection

$$\text{proj}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$