Problèmes d'optimisation

Question 1
Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale dont le périmètre est de 36 m.

Question 2
Quelles sont les dimensions du triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle de rayon 5 cm.

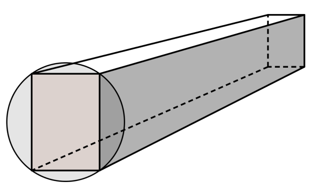
Question 3
Quelles sont les dimensions (rayon et hauteur) d'un cylindre d'aire minimale et de volume 1024π ?

Question 4
Suite à une étude, on détermine que la probabilité de guérison P d'une maladie grave dépend de la dose administrée x (en grammes) d'un médicament par la fonction

$$P(x) = \frac{3\sqrt{x}}{4(x+1)}.$$

Quelle quantité de ce médicament donne à un patient la plus grande probabilité de guérir ?

Question 5
On sait que la résistance d'une poutre est proportionnelle au produit de sa base et du carré de sa hauteur. Quelle sont les dimensions de la poutre la plus résistante que l'on peut tailler d'un tronc d'arbre de 30 cm de diamètre ?



Question 6
On veut imprimer sur une feuille de papier dont l'aire est de $2\,\text{m}^2$ en laissant des marges de 10 cm en haut et en bas et de 8 cm sur les côtés. Quelles seront les dimensions de cette feuille pour que la surface imprimée soit maximale ?

Question 7
Une entreprise a déterminé que le nombre x d'unités vendues chaque jour dépend du prix de vente p par la fonction

$$x(p) = 1000 - p.$$

Le coût de production de x unités est de

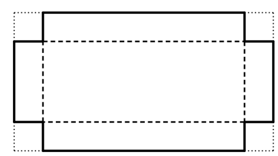
$$C(x) = 3000 + 20x.$$

a) Exprimer le revenu $R(x)$ de l'entreprise en fonction du nombre d'unités vendues x.
b) Exprimer le profit $P(x)$ de l'entreprise en fonction du nombre d'unités vendues x.
c) Si la capacité maximale de production de l'entreprise est de 1000 unités par jour. Combien d'unités doit-elle produire pour maximiser son profit ?
d) Quel est le profit maximal de l'entreprise ?
e) À quel prix doit-elle vendre chaque unité pour maximiser son profit ?

Question 8
On veut couper une corde de 200 cm en deux. L'une des deux parties servira à former un carré et l'autre, à former un cercle.

a) À quelle longueur doit-on couper la corde pour que la somme des surfaces des figures soit maximale ?
b) À quelle longueur doit-on couper la corde pour que la somme des surfaces des figures soit minimale ?

Question 9
On peut fabriquer une boîte sans couvercle en enlevant un carré de chaque coin d'une feuille de carton rectangulaire de dimensions 24 cm par 45 cm, puis en repliant chaque côté. Quelle devrait être la mesure du côté de ce carré pour que la boîte ait un volume maximal ?

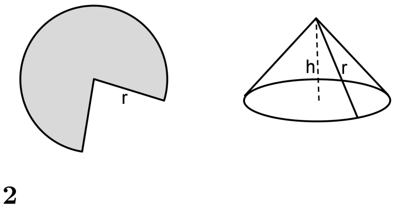


Question 10
Une compagnie fabriquant des petits pingouins de plastique estime que le coût (en \$) pour fabriquer x pingouins de plastique est donné par

$$C(x) = 6300 + 10x + \frac{x^2}{28}$$

En divisant ce coût par x, on obtient le coût unitaire de production. Combien de pingouins de plastique la compagnie doit-elle produire pour minimiser ce coût unitaire ?

Question 11
On forme un cône en supprimant un secteur d'un disque de rayon égal à 20 cm. Quelle hauteur a le cône de volume maximal ainsi formé ?



Question 12
Une entreprise vend un produit 100 \$ l'unité. Le coût total (en \$) de production quotidienne de x unités est de

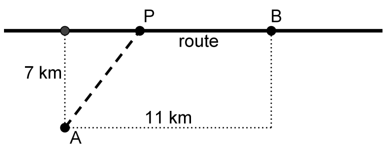
$$C(x) = 100000 + 50x + \frac{x^2}{400}.$$

a) Combien d'unités doit-elle produire chaque jour pour éviter les pertes ?

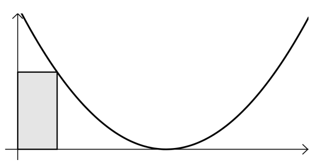
b) Si l'usine a une capacité de production de 7000 unités par jour et qu'elle vend toutes les unités qu'elle produit, combien d'unités doit-elle produire par jour afin de maximiser son profit.

c) Si l'entreprise décide d'investir pour augmenter sa capacité de production (agrandissement, machinerie, employés. . .), à quel niveau (en unités par jour) devrait-elle le faire ?

Question 13
On veut passer un fil électrique entre le point A et le point B. La réalisation de ce projet implique un coût 800 $/km le long d'une route existante et de 1200 $/km autrement. Trouver la position du point P pour que le coût soit minimal.



Question 14
Trouver les dimensions du rectangle d'aire maximale que l'on peut inscrire entre l'axe des x, l'axe des y et la courbe d'équation $(x-9)^2$.



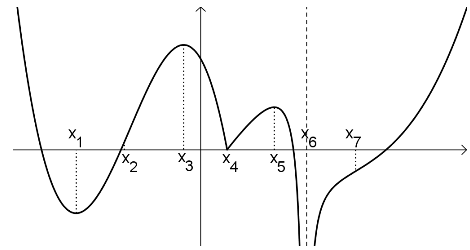
Question 15
Trouver le point de la courbe de $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ le plus près du point $(-1, 0)$.

Question 16
Le propriétaire d'un immeuble de 30 logements a déterminé que si le loyer est de 600 $, tous ses logements sont occupés et que chaque augmentation de 25 $ entraînera la perte d'un locataire. Quel doit être le prix du loyer pour que le propriétaire ait un revenu de location maximal ?

Question 17
Dans le contexte du problème précédant, considérons que chaque logement entraîne des dépenses de 40 $ par mois s'il est inoccupé et de 90 $ par mois s'il est occupé. Quel doit être le prix du loyer pour que le propriétaire maximise son profit ?

Exercices récapitulatifs

Question 18
Répondre aux questions suivante sur le graphique de la fonction f donné ci-dessous.



a) Trouver les valeurs de x où f a un minimum relatif.

b) Trouver les valeurs de x où f a un maximum relatif.

c) Trouver les valeurs de x où f a un point d'inflexion.i

d) Trouver les valeurs de x où f n'est pas dérivable.

e) Quel est le maximum absolu sur l'intervalle $[0, x_6[$?

f) Quel est le minimum absolu sur l'intervalle $[x_2, x_5]$?

g) Quels sont les extremums absolus sur l'intervalle $[x_1, x_7]$?

Question 19
Sur quel(s) intervalle(s) les fonction suivantes sont-elles croissante ?

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$

b) $y = \dfrac{2x^2 + x + 8}{x}$

c) $y = \dfrac{8-7x}{x^2-1}$

d) $y = \left(x^2-4\right)^{4/5}$

Question 20
Sur quel(s) intervalle(s) la fonction donnée est-elle concave vers le bas ?

a) $f(x) = (1-4x)^3$

b) $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$

c) $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$

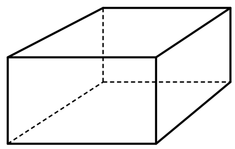
Question 21
Une compagnie lance sur le marché un nouveau modèle de cure-dents révolutionnaires. Une étude de marché révèle que le profit mensuel P de la compagnie dépend du prix de vente fixé x par la fonction

$$P(x) = -400x^3 - 380x^2 + 5600x.$$

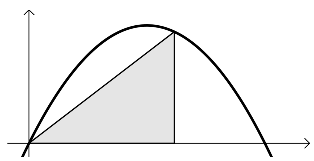
Quel prix maximise ce profit ?

Question 22
Trouver les dimensions du rectangle de périmètre maximal que l'on peut inscrire dans un cercle dont le rayon est de 10 m.

Question 23
On veut fabriquer une boîte à base carrée, avec un couvercle. Les matériaux utilisés coûtent 0,03 \$ par cm^2 pour le fond, 0,05 \$ par cm^2 pour le couvercle et 0,02 \$ pour les côtés. Si la boîte doit coûter 24 \$, quelles doivent être ses dimensions pour que son volume soit maximal ?

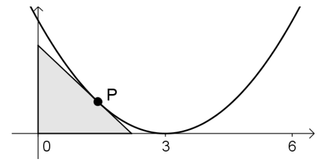


Question 24
Trouver les dimensions du triangle rectangle d'aire maximale que l'on peut inscrire sous la courbe de $y = 12x - x^2$?



Question 25
Soit la fonction
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
Trouver le point P sur la courbe de cette fonction qui minimise la pente d'une droite passant par ce point P et le point $(0, 1)$.

Question 26
Trouver le point P de la courbe d'équation
$$f(x) = (x - 3)^2$$
tel que le triangle rectangle délimité par l'axe des x, l'axe des y et la droite tangente à la courbe au point P soit d'aire maximale.



Question 27
Vrai ou faux. Trouver un contre-exemple si l'énoncé est faux.

a) Si f et g sont croissantes sur un intervalle, alors $f + g$ l'est également.
b) Si f et g sont croissantes sur un intervalle, alors $f \cdot g$ l'est également.
c) Si f et g sont concaves vers le haut sur un intervalle, alors $f + g$ l'est également.
d) Si f et g sont concaves vers le haut sur un intervalle, alors $f \cdot g$ l'est également.

Question 28
Soit un polynôme de degré trois $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a) Montrer que ce polynôme ne possède qu'un seul point d'inflexion.
b) Montrer que si ce polynôme a 3 zéros, alors la coordonnée en x de ce point d'inflexion correspond à la moyenne des 3 zéros.
c) Trouver le point d'inflexion de $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ en utilisant d'abord le résultat montré en b), puis à l'aide de la dérivée seconde.

Solutions

Question 1
9 m par 9 m.

Question 2
base de 10 cm et hauteur de 5 cm.

Question 3
Rayon de 8, hauteur de 16.

Question 4
1 g, pour une probabilité de 3/8.

Question 5
Si base $= x$ et hauteur $= h$, alors la résistance est donnée par

$$R = Kxh^2$$

où K est la constante de proportionnalité.

Par Pythagore, comme la diagonale de la poutre coïncide avec le diamètre, on doit avoir

$$x^2 + h^2 = 30^2,$$

donc, en isolant h

$$h = \sqrt{30^2 - x^2}.$$

En substituant dans R, on trouve que

$$R = Kx(30^2 - x^2) = 30^2Kx - Kx^3.$$

La dérivée est

$$\frac{dR}{dx} = 30^2K - 3Kx^2.$$

La dérivée s'annule si

$$x = 10\sqrt{3}.$$

On vérifie que l'on a bien un maximum : la dérivée seconde est

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -6Kx.$$

Comme la dérivée seconde trouvée est négative si x est positif, on a bien un maximum par le test de la dérivée seconde.

La poutre de plus grande résistance est donc celle de base $10\sqrt{3}$ cm et de hauteur $10\sqrt{6}$ cm.

Question 6
$\sqrt{\frac{8}{5}}$ m par $\sqrt{\frac{5}{2}}$ m.

Question 7
a) $R(x) = 1000x - x^2$
b) $P(x) = -x^2 + 980x - 3000$
c) 490 unités.
d) 237 100 \$ par jour.
e) 510 \$.

Question 8
a) Il est préférable de ne pas couper la corde et de ne faire que le cercle.
b) 112 cm pour faire le carré et 88 cm pour le cercle.

Question 9
$V(x) = x(45 - 2x)(24 - 2x)$. $V'(x) = 12x^2 - 276x + 1080 = 12(x - 5)(x - 18)$. $V''(x) = 24x - 276 = 12(2x - 23)$.

$V'(x) = 0$ ssi $x = 5$ ou $x = 18$.

$V''(5) < 0$ et $V''(18) > 0$, donc le max cherché est en $x = 18$. Il faut enlever un carré de 18 cm de côté.

Question 10
420 pingouins.

Question 11
$\frac{20}{\sqrt{3}}$ cm

Question 12
a) Au moins 2 255 unités.
b) 7 000 unités.
c) À 10 000 unités par jour.

Question 13
On doit rejoindre la route à $3,06$ km de la ville B.

Question 14
Base de 3 unités, hauteur de 36 unités.

Question 15
$\left(\frac{1}{2}, \frac{9\sqrt{2}}{4}\right)$.

Question 16
$R(x) = (600 + 25x)(30 - x)$ où x est le nombre de logements inoccupés. Loyer optimal : 675 \$

Question 17
700 \$

Question 18
a) x_1 et x_4.
b) x_3 et x_5.
c) x_2 et x_7.
d) x_4 et x_6.
e) $f(0)$
f) $f(x_4)$
g) Aucun, minimum absolu, max $= f(x_3)$.

Question 19
a) Croissante sur $]-\infty, -3]$ et sur $[2, \infty[$, décroissante sur $[-3, 2]$, maximum relatif en $(-3, 92)$, minimum relatif en $(2, -33)$.
b) Croissante sur $]-\infty, -2]$ et sur $[2, \infty[$, décroissante sur $[-2, 0[$ et sur $]0, 2]$, maximum relatif en $(-2,\ -7)$, minimum relatif en $(2, 9)$.
c) Croissante sur $]-\infty, -1[$, sur $]-1; 0,59]$ et sur $[1,70; \infty[$, décroissante sur $[0,59; 1[$ et sur $]1, 1,70]$, maximum relatif en $(0,59; -5,94)$, minimum relatif en $(1,70;\ -2,06)$.
d) Croissante sur $[-2, 0]$ et sur $[2, \infty[$, décroissante sur $]-\infty, -2]$ et sur $[0, 2]$, maximum relatif en $\left(0, \sqrt[5]{256}\right)$, minimums relatifs en $(-2, 0)$ et en $(2, 0)$.

Question 20
a) $[1/4,\ \infty[$
b) $[-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$
c) $[0, \sqrt{2}]$

Question 21
À 1,87 \$, pour un profit maximal de 6527,53 \$.

Question 22
$\sqrt{50}$ m par $\sqrt{50}$ m.

Question 23
Base de $\sqrt{50}$ cm par $\sqrt{50}$ cm, hauteur de $50/\sqrt{2}$ cm.

Question 24
Base de 8 unités, hauteur de 32 unités.

Question 25
$P = (9/4, 2/3)$

Question 26
$P = (1, 4)$ Indice : la base et la hauteur du triangle correspondent aux intersections avec les axes de la droite tangente au point P

Question 27
a) Vrai
b) Faux, on peut prendre $f(x) = x$ et $g(x) = x$, toutes deux croissantes sur $\mathbb{R}$, mais telles que $f(x) \cdot g(x) = x^2$ ne l'est pas.
c) Vrai
d) Faux, on peut prendre $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = x^2 - 1$, toutes deux concaves vers le haut sur $\mathbb{R}$, mais $f \cdot g(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ ne l'est pas.

Question 28
a) Laissé à l'étudiant
b) Laissé à l'étudiant
c) Laissé à l'étudiant