

Études complètes de fonctions

Pour chacune des fonctions suivantes, faire une étude complète de la fonction $f(x)$ donnant tous les éléments suivants :

domaine et signe de $f(x)$;

croissance de $f(x)$ et minimum/maximum relatifs ;

concavité de $f(x)$ et points d'inflexion ;

asymptote de $f(x)$;

esquisse du graphe de $f(x)$.

- a) $f(x) = 2x(4-x)^3$ g) $f(x) = (5-x)^{\frac{2}{3}} + 3$
 b) $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ h) $f(x) = \sqrt[3]{5-x} + 3$
 c) $f(x) = \frac{-x^2}{x^2+1}$ i) $f(x) = \frac{2x^2-8}{x^2-1}$
 d) $f(x) = \frac{x^3+1}{x}$ j) $y = \frac{(x-2)^2 + 1}{(x-2)^2}$
 e) $y = (x-3)\sqrt{9+x}$ k) $f(x) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2-1}}$
 f) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ l) $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x-6)$

Solutions

- a) Signe de $f(x) = 2x(4-x)^3$ $D_f = \mathbb{R}$

x		0		4		
f		-		+		-

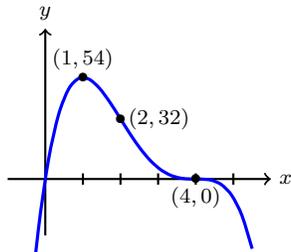
Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = 8(4-x)^2(1-x)$

x		1		4		
f'		+		-		-
f		↗		↘		↘

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = -24(4-x)(2-x)$

x		2		4		
f''		-		+		-
f		∩		∪		∩

Aucune asymptote.



Maximum relatif en $(1, 54)$;
 Aucun minimum relatif ;
 Points d'inflexion en $(2, 32)$ et $(4, 0)$.

- b) Signe de $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

x		0		
f		-		+

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \frac{3(x^4-1)}{x^2}$

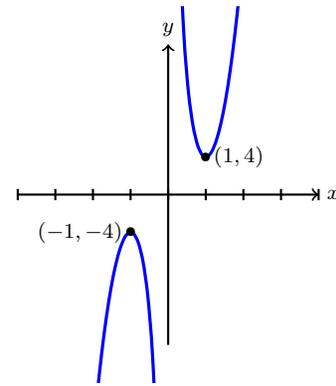
x		-1		0		1		
f'		+		-		-		+
f		↗		Max		↘		Min

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \frac{6(x^4+1)}{x^3}$

x		0		
f''		-		+
f		∩		∪

A.V. en $x=0$ car $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \frac{3}{0^\pm} = \pm\infty$;

Aucune A.H. car $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$;



Maximum relatif en $(1, 4)$;
 Minimum relatif en $(-1, -4)$;
 Aucun point d'inflexion.

- c) Signe de $f(x) = \frac{-x^2}{x^2+1}$ $D_f = \mathbb{R}$

x		0		
f		-		-

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

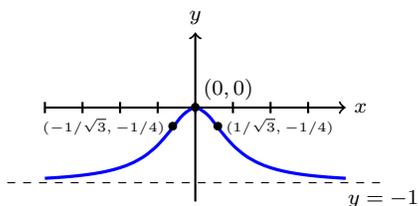
x		0		
f'		+		-
f		↗		Max

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \frac{-2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$

x		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		
f''		+		-		+
f		∩		P.I		∪

Aucune A.V.

A.H. en $y = -1$ car $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{x^2+1} = -1$;



Maximum relatif en $(0,0)$;
 Aucun minimum relatif;
 Points d'inflexion en $(-1/\sqrt{3}, -1/4)$ et $(1/\sqrt{3}, -1/4)$

d) Signe de $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

x		-1		0		
f		+	0		-	+

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$

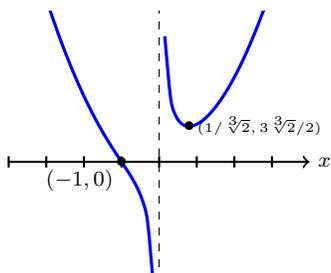
x		0		$1/\sqrt[3]{2}$		
f'		-		0		+
f		↘		Min		↗

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \frac{2(x^3 + 1)}{x^3}$

x		-1		0		
f''		+	0		-	+
f		∪	P.I		∩	∪

A.V. en $x = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \frac{1}{0} = \pm\infty$;

Aucune A.H.



Aucun maximum relatif;
 Minimum relatif en $(1/\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{2}/2)$;
 Points d'inflexion en $(-1,0)$

e) Signe de $f(x) = (x-3)\sqrt{9+x}$ $D_f = [-9, +\infty)$

x		-9		3		$+\infty$
f		0		-		+

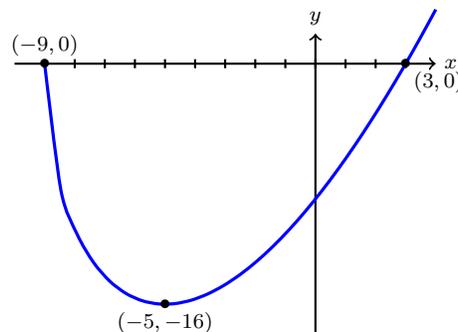
Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \frac{3(x+5)}{2\sqrt{9+x}}$

x		-9		-5		
f'				0		+
f		Max		↘		Min ↗

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \frac{3(x+13)}{4\sqrt{(9+x)^3}}$

Toujours concave vers le haut car $f'' > 0 \quad \forall x \in D_f$

Aucune A.V. et aucune A.H.



Maximum relatif en $(-9,0)$;
 Minimum relatif en $(-5,-16)$;
 Aucun point d'inflexion.

f) Signe de $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

x		-2		0		2		
f		-		+		-		+

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \frac{-(x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2} < 0$

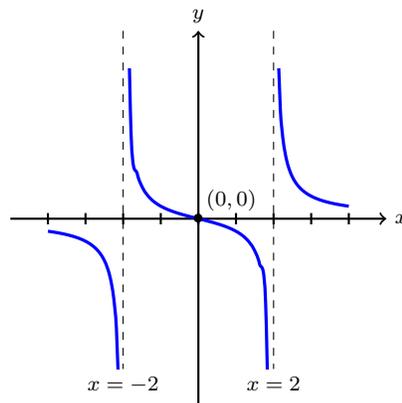
On remarque que $f(x)$ est décroissante, si $x \in D_f$.

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \frac{2x(2x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^4}$

x		-2		0		2		
f''		-		+		-		+
f		∩	A.V.		∪	P.I		∩

A.V. en $x = \pm 2$ car $\lim_{x \rightarrow \pm 2} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{\pm 2}{0} = \pm\infty$;

A.H. en $y = 0$ car $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0$;



Aucun maximum relatif;
 Aucun minimum relatif;
 Point d'inflexion en $(0,0)$.

g) Signe de $f(x) = (5-x)^{2/3} + 3$ $D_f = \mathbb{R}$

On remarque que $f(x)$ est toujours positive.

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{5-x}}$

x	$-\infty$	5	$+\infty$
f'	$-$	$\frac{0}{0}$	$+$
f	\searrow	Min	\nearrow

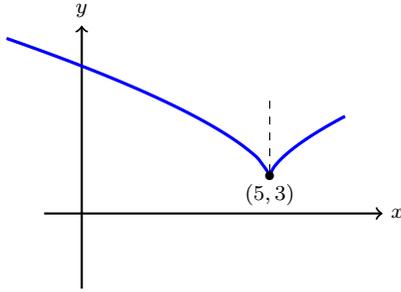
On conclut que $f(x)$ a un pic (la tangente est verticale) en $x = 5$, puisque

$$f'(5) = \frac{-2}{0} = \pm\infty$$

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(5-x)^4}} < 0$

On remarque que $f(x)$ est concave vers le bas si $x \neq 5$.

Aucune A.V. et aucune A.H.



Aucun maximum relatif ;
Minimum relatif en $(5, 3)$;
Aucun point d'inflexion

h) Signe de $f(x) = \sqrt[3]{5-x} + 3 > 0$ $D_f = \mathbb{R}$

x	32
f	0

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(5-x)^2}} < 0$

x	5
f'	$\frac{0}{0}$
f	??

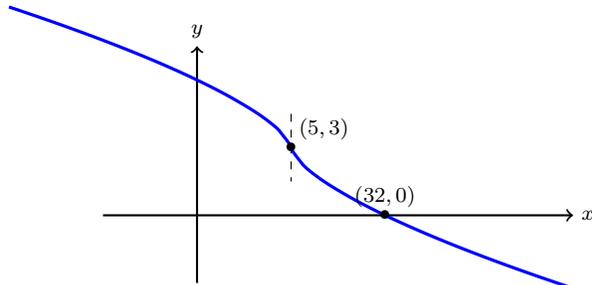
On conclut que la tangente est verticale en $x = 5$, puisque $f(x)$ est décroissante (aucun pic) et

$$f'(5) = \frac{-1}{0} = \pm\infty$$

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(5-x)^5}}$

x	5
f''	$\frac{0}{0}$
f	P.I

Aucune A.V. et aucune A.H.



Aucun maximum relatif ;
Aucun minimum relatif ;
Point d'inflexion en $(5, 3)$

i) Signe de $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 1}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

x	-2	-1	1	2
f	0	$\frac{0}{0}$	0	0

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \frac{12x}{(x^2 - 1)^2}$

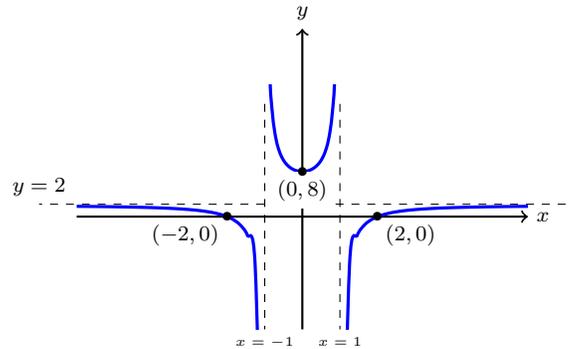
x	-1	0	1
f'	$\frac{0}{0}$	0	$\frac{0}{0}$
f	A.V.	Min	A.V.

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \frac{-12(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$

x	-1	1
f''	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
f	A.V.	A.V.

A.V. en $x = \pm 1$ car, $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{-6}{0} = \pm\infty$.

A.H. en $y = 2$ car, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} = 2$.



Aucun maximum relatif ;
Minimum relatif en $(0, 8)$;
Aucun point d'inflexion.

j) Signe de $f(x) = (x-2)^2 + \frac{1}{(x-2)^2} > 0$,
 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

On remarque que $f(x)$ est positive si $x \neq 2$.

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = 2(x-2) - \frac{2}{(x-2)^3}$

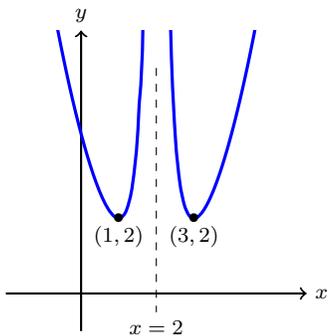
x	1	2	3
f'	0	$\frac{0}{0}$	0
f	Min	A.V.	Min

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = 2 + \frac{6}{(x-2)^4}$

On conclut que $f(x)$ est concave vers le haut si $x \neq 0$.

A.V. en $x = 2$, car

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$



Aucun maximum relatif;
Minimum relatif en $(1, 2)$ et $(3, 2)$;
Aucun point d'inflexion.

k) Signe de $f(x) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2-1}}$

On a $D_f = -\infty, -1[\cup]1, +\infty$

x		-1		1		
f'		+				-

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$

x		-1		1		
f'		+				+
f		↗		A.V.		↗

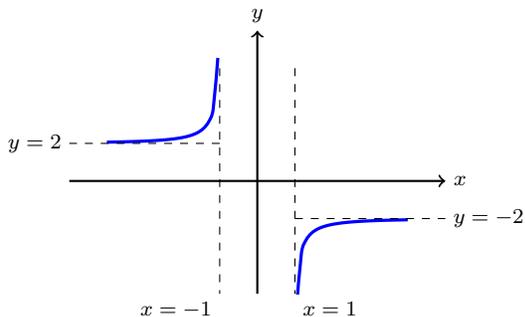
Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \frac{-6x}{\sqrt{(x^2-1)^5}}$

x		-1		1		
f''		-				+
f		∩		A.V.		∪

A.V. en $x = \pm 1$ car, $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pm 1}{0} = \pm \infty$.

A.H. en $y = 2$ si $x \rightarrow -\infty$ et
A.H. en $y = -2$ si $x \rightarrow +\infty$ car,

$\sqrt{x^2-1} \approx |x|$, lorsque x est grand.



Aucun maximum relatif;
Aucun minimum relatif;
Aucun point d'inflexion.

1) Signe de $f(x) = (x-2)^{2/3}(x-6)$, $D_f = \mathbb{R}$

x		1		6		
f		-		0		+

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \frac{5(x-3)}{3\sqrt[3]{x-1}}$

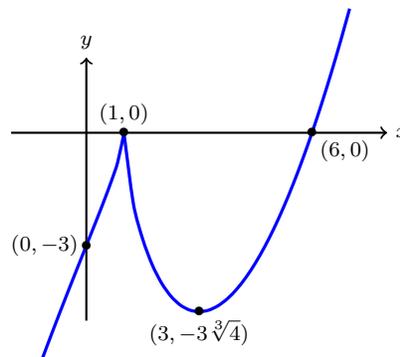
x		1		3		
f'		+				+
f		↗		Max		↘
				Min		↗

On conclut que $f(x)$ a un pic en $x = 1$ (la tangente est verticale), puisque $f'(1)$ n'existe pas bien que $1 \in D_f$.

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \frac{10x}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}}$

x		0		1		
f''		-				+
f		∩		P.I.		∪
				??		

Aucune asymptote



Maximum relatif en $(1, 0)$;
Minimum relatif en $(3, -3\sqrt[3]{4})$;
Point d'inflexion en $(0, -3)$.