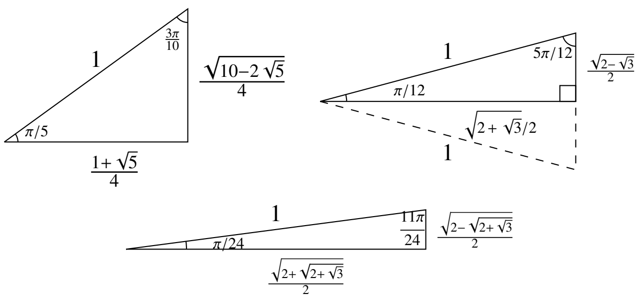
Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep de St-Laurent
Calcul différentiel — 201-NYA — Hiver 2020

Examen formatif 4

Vous pouvez utiliser les mesures des triangles suivants sans démonstration.



Question 1

Vrai ou faux ?
(Il n'est pas nécessaire de donner de démarche pour cette question.)

a) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \infty$

b) $\left(b^{f(x)}\right)' = \left(b^{f(x)}\right)' f'(x)$

c) $\left(b^x\right)' = xb^{x-1}$

d) La fonction $\ln(x)$ a une asymptote verticale en $x = 1$.

e) $\arccos(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$

Question 2

Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \sec(x)$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{3-e^{-x}}$

c) $\lim_{x\to3^+} \ln\left(x^2-9\right)$

Question 3

Déterminer l'équation de la droite tangente au point $(\pi/3, f(\pi/3))$ du graphe de la fonction

$$f(x) = \sin(x)\cos(x).$$

Question 4

Évaluer les dérivées suivantes.

a) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(2) + \pi^x + e^\pi$

b) $f(x) = \sin^3\left(\frac{x}{2}\right) + e^{x^2}$

c) $f(x) = \sec(x^2+1) + \operatorname{arcsec}\left(x^2+1\right)$

d) $f'(0)$ si $f(x) = \sin\left(x^2\right) + \sin^2(x) + 2^{\sin(x)}$

e) $f'(25\pi/24)$ si $f(x) = \operatorname{cotan}(x)$.

Question 5

Sachant que la dérivé de $\tan(x)$ est $\sec^2(x)$, utiliser l'identité $\tan^2(x)+1 = \sec^2(x)$ pour déterminer la dérivée de $\sec(x)$.

Question 6

Déterminer pour quelle valeur de $x \in [0, 2\pi]$ la différence $\sin(x) - \cos(x)$ est maximale et déterminer cette différence.

Question 7

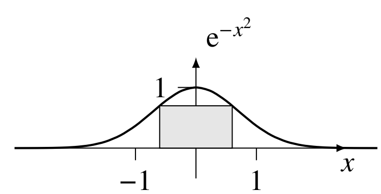
Faire le tableau de variation de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{e^x}.$$

Déterminer le domaine, les valeurs critiques, les minimums, les maximums, les points d'inflexion, les asymptotes, et esquisser la fonction. (Ind. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$ $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$)

Question 8

Voici le graphe de l'équation $y = e^{-x^2}$:



Déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale inscrit entre la courbe et l'axe des x et symétrique par rapport à l'axe des y (dont la base va de $-x$ à x).

Solutions

Question 1

a) Vrai

b) Faux (Mauvaise utilisation de la règle de chaine : $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x)$ et non $\big(f(g(x))\big)'g'(x)$)

c) Faux (La formule $(x^n)' = nx^{n-1}$ s'applique aux puissances de x et non aux fonctions exponentielles)

d) Faux (L'unique AV est en $x = 0$, $ln(x)$ a un zéro en $x = 1$)

e) Faux (Ne pas confondre la fonction réciproque de cos et l'inverse de $\cos(\theta)$.)

Question 2

a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\sec(x) &= \sec\left(\frac{\pi}{2}^+\right)\\ &= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}^+\right)}\\ &= \frac{1}{0^-}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3-e^{-x}} &= \frac{2}{3-e^{-\infty}}\\ &= \frac{2}{3-0}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3^+}\ln\left(x^2-9\right) &= \lim_{x\to3^+}\ln\left(x^2-9\right)\\ &= \lim_{x\to3^+}\ln((x-3)(x+3))\\ &= \ln\left(\left(3^+-3\right)\left(3^++3\right)\right)\\ &= \ln\left(\left(0^+\right)(6)\right)\\ &= \ln\left(0^+\right)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

Question 3

$f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. La pente est $a = f'(\pi/3) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$.

$f(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ $y = ax+b$ donc $b = y - ax = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}$. L'équation de la droite est

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}.$$

Question 4

a) $f'(x) = \frac{1}{1/x}\left(\frac{1}{x}\right)' + 0 + \pi^x\ln(\pi) + 0 = -x\frac{1}{x^2} + \pi^x\ln(\pi) = -\frac{1}{x} + \pi^x\ln(\pi)$

b) $\frac{3}{2}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2xe^{x^2}$

c) $2x\sec\left(x^2+1\right)\tan\left(x^2+1\right) + \frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)^2-1}}$

d) $f'(x) =$
$2x\cos\left(x^2\right) + 2\sin(x)\cos(x) + 2^{\sin(x)}\ln(2)\cos(x)$
$f'(0) = 2(0)\cos\left(0^2\right) + 2\sin(0)\cos(0) + 2^{\sin(0)}\cos(0)\ln(2) = 0 + 2(0)(1) + 2^0(1)\ln(2) = \ln(2)$

e) $f'(x) = -\csc^2(x)$, et donc

$$f'(25\pi/24) = -\left(-\frac{1}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}{2}}\right)^2 = -\frac{4}{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Question 5

Dériver l'identité $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$:

$$2\tan(x)\sec^2(x) = 2\sec(x)\,(\sec(x))'.$$

En isolant $\big(\sec(x)\big)'$, on obtient

$$\big(\sec(x)\big)' = \frac{2\tan(x)\sec^2(x)}{2\sec(x)} = \sec(x)\tan(x).$$

Autre possibilité :

$$\begin{aligned}\tan^2(x)+1 &= \sec^2(x)\\ \sec(x) &= \sqrt{\tan^2(x)+1}\\ (\sec(x))' &= \left(\sqrt{\tan^2(x)+1}\right)'\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\tan^2(x)+1}}\left(2\tan(x)\sec^2(x)\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\tan^2(x)+1}}\left(\tan(x)\sec^2(x)\right)\\ &= \frac{1}{\sec(x)}\left(\tan(x)\sec^2(x)\right)\\ &= \sec(x)\tan(x)\end{aligned}$$

Question 6

$f(x) = \sin(x) - \cos(x)$. $f'(x) = \cos(x) + \sin(x)$
$f'(x) = 0$ ssi

$$\begin{aligned}\cos(x)+\sin(x) &= 0\\ \cos(x) &= -\sin(x)\\ -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= 1\\ \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= -1\\ \tan(x) &= -1\\ x &= 3\pi/4 \text{ ou } 7\pi/4\end{aligned}$$

On vérifie pour laquelle de ces valeurs critiques on a un maximum. La dérivée seconde est $f''(x) = -\sin(x) + \cos(x)$.

En $x = 3\pi/4$ on a que $f''(3\pi/4) = -\sin(3\pi/4) + \cos(3\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-\sqrt{2}}{2} < 0$. Comme la dérivée seconde est négative en $3\pi/4$, on a un maximum en $x = 3\pi/4$.

En $x = 7\pi/4$ on a que $f''(7\pi/4) = -\sin(7\pi/4) + \cos(7\pi/4) = -\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$. Comme la dérivée seconde est positive en $7\pi/4$, on a un minimum en $x = 7\pi/4$.

La différence la plus grande est donc quand $x = 3\pi/4$. Elle vaut $\sin(3\pi/4) - \cos(3\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} - -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Question 7

Dérivées :

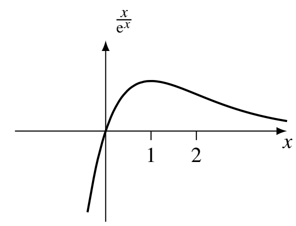
$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{(1-x)}{e^x}$$

$$f''(x) = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(-1-(1-x))}{e^{2x}} = \frac{(x-2)}{e^x}$$

Pas d'AV car $e^x > 0$.

AH : les limites nécessaires sont données.

x	∞		1		2		∞
$f'(x)$		+	0	−	−	−	
$f''(x)$		−	−	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	MAX	↘	INF	↘	0



Question 8

$A(x) = 2xe^{-x^2}$.

$A'(x) = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(1-2x^2)$.

$A'(x) = 0$ si $(1-2x^2) = 0$ ssi $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$A''(x) = 4x(2x^2-3)e^{-x^2}$.

En $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\begin{aligned}A''(1/\sqrt{2}) &= 4\frac{1}{\sqrt{2}}\left((2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3\right)e^{-(1/\sqrt{2})^2}\\ &= \frac{4}{\sqrt{2}}(2\frac{1}{2}-3)e^{-1/2}\\ &= (+)(-)(+) < 0\end{aligned}$$

et similairement $A''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$. On a donc un maximum quand $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. L'aire maximum est donc

$$2\frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2e}}.$$