Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep de Saint-Laurent
Calcul différentiel — 201-NYA — Hiver 2020

Examen formatif 1

Calculatrices et documentation interdites. Justifier les réponses.

Question 1
Vrai ou faux ? Il n'est pas nécessaire de justifier vos réponses.

a) Considérons un polynôme $P(x)$. Si $P(a) = 0$, alors $(x+a)$ est un facteur de $P(x)$.

b) Tout polynôme se factorise comme un produit de facteurs premiers la forme $(ax-b)$.

c) Tout polynôme de degré plus grand ou égal à 3 a au moins un zéro.

Question 2
Sachant que -1 est un zéro de $P(x) = x^4 + x^3 - x - 1$, factoriser le polynôme $P(x)$ le plus possible.

Question 3
Déterminer le domaine des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{(x-2)^2\sqrt{3x-2}}$

Question 4
Voici quatre des propriétés de base pour la dérivée.

(D1) $\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ (D3) $\dfrac{d(Cu)}{dx} = C\dfrac{du}{dx}$

(D2) $\dfrac{d(C)}{dx} = 0$ $(C \in \mathbb{R})$ (D4) $\dfrac{u+v}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

Calculez la dérivée de la fonction $y = 3x^2 - 2x^3$ en n'utilisant que les propriétés (D1) à (D4) et en spécifiant à chaque étape du calcul quelle propriété est utilisée.

Question 5
Déterminer, à l'aide de la définition, $\frac{dy}{dx}$ pour les fonctions suivantes à la valeur de x indiquée.

a) $y = f(x) = x^3 - 1$ en $x = 1$ b) $y = f(x) = \sqrt{x+3}$ en $x = 0$

Question 6
Déterminer la dérivée des fonctions suivantes (à l'aide des propriétés).

a) $y = \dfrac{3}{4\sqrt[3]{x^4}}$

b) $y = (x^4 + 1)\sqrt{x}$

c) $y = \dfrac{(x^2 + 1)}{\sqrt[3]{x}}$

Question 7
Déterminer, à l'aide des propriétés de la dérivée, la fonction dérivée $\frac{dy}{dx}$ pour les fonctions suivantes et se servir du résultat obtenu pour donner l'équation de la droite tangente en $x = 1$.

a) $y = f(x) = \frac{x^{22}}{11}$ b) $y = f(x) = \sqrt{x^3}$

Question 8
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - x - 1$.

a) Déterminer pour quelle valeur de x la tangente au graphe de f est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{26x}{27} + 31$.

b) Donner un exemple graphique qui montre qu'il est possible d'avoir plus d'une solution à ce problème, c'est-à-dire plus d'une droite tangente de même pente.

Question 9

a) Expliquer par un graphique comment on défini la pente de la tangente au graphe d'une fonction. Le graphique doit expliquer les éléments importants de la définition.

b) Montrer que $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = -\frac{1}{2}$ pour la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{2x}$$

.

c) À l'aide du résultat précédent, déterminer l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction au point $(1, f(1))$.

Solutions

Question 1

a) Faux. Le facteur correspondant au zéro est de la forme $(x-a)$

b) Faux. Il y a aussi des facteurs premiers de la forme ax^2+bx+c.

c) Faux. Il pourrait être un produit de facteurs premiers de la forme ax^2+bx+c sans zéro, comme x^2+1.

Question 2

Comme -1 est un zéro de $P(x)$, on sait que $(x+1)$ est un facteur de $P(x)$. En divisant, on trouve que

$$x^4+x^3-x-1=(x+1)(x^3-1).$$

Comme 1 est un zéro de x^3-1 (que l'on trouve par inspection), on sait que $(x-1)$ est un facteur de x^3-1. En disant encore, on trouve que

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

On ne peut pas factoriser davantage car x^2+x+1 est un polynôme premier (il n'a pas de zéros car $\Delta=1^2-4(1)(1)<0$).

En combinant les deux résultats, on trouve enfin que

$$x^4+x^3-x-1=(x+1)(x-1)(x^2+x+1).$$

Question 3

a)
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-2x+1}\text{def} &\iff x^2-2x+1\geq 0\\ &\iff (x-1)^2\geq 0\end{aligned}$$

Comme $(x-1)^2$ est toujours positif ou nul, la fonction est définie pour tout $x\in\mathbb{R}$.

$\operatorname{dom}(f)=\mathbb{R}$.

b)
$$\begin{aligned}\frac{x^2-4}{(x-2)^2\sqrt{3x-2}}\text{ def}\\ &\iff (x-2)^2\sqrt{3x-2}\neq 0\\ &\iff (x-2)\neq 0 \text{ et } \sqrt{3x-2}\neq 0\\ &\iff x\neq 2 \text{ et } (3x-2)\neq 0\\ &\iff x\neq 2 \text{ et } x\neq 2/3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{3x-2}\text{ def} &\iff 3x-2\geq 0 \text{ En}\\ &\iff 3x\geq 2\\ &\iff x\geq 2/3\end{aligned}$$

combinant les conditions obtenues, on obtient que $\operatorname{dom}(f)=]2/3,\infty[\setminus\{2\}$.

Question 4

$$\begin{aligned}\left(3x^2-2x^3\right)' &= \left(3x^2+(-2)x^3\right)'\\ &= \left(3x^2\right)'+\left((-2)x^3\right)' && (D4)\\ &= 3\left(x^2\right)'+(-2)\left(x^3\right)' && (D3)\\ &= 3\left(2x\right)+(-2)\left(3x^2\right) && (D1)\\ &= 6x-6x^2.\end{aligned}$$

Question 5

a)
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{f(1+dx)-f(1)}{dx}\\ &= \frac{\left((1+dx)^3-1\right)-0}{dx}\\ &= \frac{(1+3\,dx+3\,dx^2+dx^3-1)}{dx}\\ &= \frac{3\,dx+3\,dx^2+dx^3}{dx}\\ &= \frac{dx(3+3\,dx+dx^2)}{dx}\\ &= 3+3\,dx+dx^2\\ &\approx 3 \quad \text{car } dx \text{ infinitésimal.}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{f(0+dx)-f(0)}{dx}\\ &= \frac{\sqrt{(0+dx)+3}-\sqrt{3}}{dx}\\ &= \frac{\sqrt{dx+3}-\sqrt{3}}{dx}\\ &= \frac{\sqrt{dx+3}-\sqrt{3}}{dx}\,\frac{\sqrt{dx+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{dx+3}+\sqrt{3}}\\ &= \frac{(dx+3)-3}{dx}\,\frac{1}{\sqrt{dx+3}+\sqrt{3}}\\ &= \frac{dx}{dx}\,\frac{1}{\sqrt{dx+3}+\sqrt{3}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{dx+3}+\sqrt{3}}\\ &\approx \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} \quad \text{car } dx \text{ infinitésimal}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Question 6

a)
$$\begin{aligned}y' &= \left(\frac{3}{4\sqrt[3]{x^4}}\right)'\\ &= \left(\frac{3}{4}x^{-4/3}\right)'\\ &= \frac{3}{4}\left(x^{-4/3}\right)'\\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{-4}{3}x^{-4/3-1}\right)\\ &= \frac{3}{4}\,\frac{-4}{3}x^{-7/3}\\ &= -\frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}.\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}y' &= \left((x^4+1)\sqrt{x}\right)'\\ &= (x^4+1)'\sqrt{x}+(x^4+1)\left(\sqrt{x}\right)'\\ &= 4x^3\sqrt{x}+(x^4+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}\\ &= \frac{4x^3\sqrt{x}(2\sqrt{x})+(x^4+1)}{2\sqrt{x}}\\ &= \frac{8x^4+(x^4+1)}{2\sqrt{x}}\\ &= \frac{9x^4+1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}y' &= \left(\frac{(x^2+1)}{\sqrt[3]{x}}\right)'\\ &= \frac{(x^2+1)'\sqrt[3]{x}-(x^2+1)\left(\sqrt[3]{x}\right)'}{(\sqrt[3]{x})^2}\\ &= \frac{2x\sqrt[3]{x}-(x^2+1)\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right)}{(\sqrt[3]{x})^2}\\ &= \left(2x\sqrt[3]{x}-\frac{x^2+1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2}\\ &= \frac{2x\sqrt[3]{x}(3\sqrt[3]{x^2})-(x^2+1)}{3\sqrt[3]{x^2}}\,\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2}\\ &= \frac{6x^2-(x^2+1)}{3\sqrt[3]{x^2}}\,\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2}\\ &= \frac{6x^2-(x^2+1)}{3\sqrt[3]{x^2}\,(\sqrt[3]{x})^2}\\ &= \frac{5x^2-1}{3\sqrt[3]{x^2}\,(\sqrt[3]{x})^2}\\ &= \frac{5x^2-1}{3\sqrt[3]{x^4}}.\end{aligned}$$

Question 7

a) $\frac{dy}{dx}=\frac{22x^{21}}{11}=2x^{21}$. Le point de tangence est $(1,f(1))$, c'est à dire $(1,1/11)$. La droite tangente est de pente $2(1)^{21}=2$. On trouve l'équation de la droite :

$$y=2x-\frac{21}{11}.$$

b) $\frac{dy}{dx}=\left(x^{3/2}\right)'=\frac{3\sqrt{x}}{2}$. Le point de tangence est $(1,f(1))$, c'est à dire $(1,1)$. La droite tangente est de pente $\frac{3\sqrt{1}}{2}=\frac{3}{2}$. On trouve l'équation de la droite :

$$y=\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}.$$

Question 8

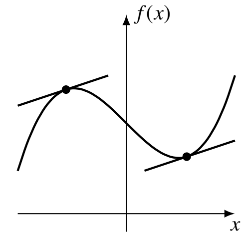
a) La pente de la droite donnée est $-\frac{26}{27}$. On veut donc les points du graphe de f tels que $f'(x)=-\frac{26}{27}$. En dérivant, on trouve que $f'(x)=3x^2-1$. On doit donc résoudre

$$3x^2-1=-\frac{26}{27}.$$

En isolant, on trouve que

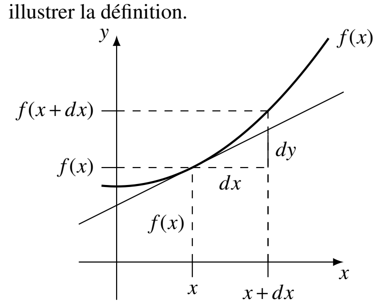
$$x=\pm\frac{1}{9}.$$

b) Voici le graphe d'une fonction qui a deux solutions au problème.



Question 9

a) Un graphique possible pour illustrer la définition.



b)
$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} &= \frac{dy}{dx}\\ &= \frac{f(1+h)-f(1)}{dx}\\ &= \frac{\frac{1}{2(1+dx)}-\frac{1}{2}}{dx}\\ &= \frac{\frac{1-(1+dx)}{2(1+dx)}}{dx}\\ &= \frac{\frac{1-(1+dx)}{2(1+dx)}}{dx}\\ &= \frac{-dx}{2(1+dx)}\,\frac{1}{dx}\\ &= \frac{-1}{2(1+dx)}\\ &\approx \frac{-1}{2(1)}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

c) Comme $f'(1)$ est la pente de la tangente au graphe de f au point $(1,f(1))$, on doit avoir que $y=f'(1)x+b$. En utilisant le point $(1,f(1))$, on doit avoir que $\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(1)+b$, ce qui implique que $b=1$. L'équation de la droite est donc

$$y=-\frac{1}{2}x+1.$$