# Limites et dérivées de fonctions trigonométriques

## Révision fonctions trigonométriques

**Question 1**
Localiser les points correspondants aux angles suivants sur un cercle.

a) $\frac{\pi}{6}$
b) $\frac{5\pi}{6}$
c) $\frac{8\pi}{6}$
d) $\frac{\pi}{4}$
e) $\frac{3\pi}{4}$
f) $\frac{7\pi}{4}$

**Question 2**
Évaluer et simplifier les expressions suivantes.

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
b) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$
c) $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)$
d) $\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)$
e) $\csc\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
f) $\cot\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$
g) $\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)$
h) $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$
i) $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
j) $\cot\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$
k) $\sec\left(\frac{4\pi}{3}\right)$
l) $\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
m) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$
n) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

**Question 3**

a) Démontrer l'identité $\cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta)$ à l'aide du cercle trigonométrique.
b) Démontrer la même identité à l'aide des identités trigonométriques pour les sommes d'angles.

**Question 4**
Démontrer les identités trigonométriques suivantes.

a) $\sin(-x) = -\sin(x)$
b) $\cos(-x) = \cos(x)$
c) $\sin(x) = -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
d) $\cos(x) = \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
e) $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$
f) $\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$
g) $\sin^4(\theta) - \cos^4(\theta) = \cos(2\theta)$
h) $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$

## Limites

**Question 5**
Évaluer les limites suivantes

a) $\lim_{x\to\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$
b) $\lim_{x\to\pi/3} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
c) $\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{3x}{2}\right)$
d) $\lim_{x\to\pi^+} \tan\left(\frac{x}{2}\right)$
e) $\lim_{x\to-\pi^-} \tan\left(\frac{x}{2}\right)$
f) $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{1}{\cos(x)}$
g) $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{\tan(x)}$
h) $\lim_{x\to\pi^-} \frac{1}{\tan(x)}$
i) $\lim_{x\to\pi} \sec(x)$
j) $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sec(x)$
k) $\lim_{x\to-\frac{\pi}{8}} \tan(2x)$
l) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} x\sin(x)$
m) $\lim_{x\to0} \frac{\sin(-2x)\tan(4x)}{2x^2}$
n) $\lim_{x\to0} \frac{\cos(x)}{x-1}$
o) $\lim_{x\to0} \frac{\sec(x)\tan(x)}{x^2\csc(x)}$

## Dérivées

**Question 6**
Démontrer les formules de dérivation suivantes à l'aide des formules de dérivation des fonctions sinus et cosinus, des formules de dérivations pour les produits, sommes et quotients et des définitions des fonctions trigonométrique impliquées. (Autrement dit : dériver !)

a) $\left(\cot(x)\right)' = -\csc^2(x)$
b) $\left(\sec(x)\right)' = \sec(x)\tan(x)$
c) $\left(\csc(x)\right)' = -\csc(x)\cot(x)$

**Question 7**
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \sin(5x)$
b) $y = \cos(3x)$
c) $y = \tan\left(x^2\right)$
d) $y = \sec\left(x^2\right)$
e) $y = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{3}$
f) $y = x^3\sin(x)$
g) $y = \cos(3x) - 3\cos(x)$
h) $y = \sec^2(x)$
i) $y = \cot(3x)\csc(3x)$
j) $y = \tan\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$
k) $y = e^{\sin(3x)}$

**Question 8**
Trouver $\frac{dy}{dx}$ à l'aide de la dérivation implicite.

a) $x\sin(x) + y\cos(y) = 0$
b) $\sin^4(xy) + xy = 0$
c) $\sec\left(y^3\right) + y^2 = 3x^4$
d) $x\tan\left(e^y\right) + \ln y = 3$

**Question 9**
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \cos(\mathrm{e}^{-x})$
b) $y = \sin^3(x) + 3^{\sin(x)}$
c) $y = \ln(\sec(x) + \tan(x))$
d) $y = \dfrac{1+\csc(x^2)}{1-\cot(x^2)}$
e) $y = \cos\left(\tan(x^2)\right)$
f) $y = \mathrm{e}^{x^3}\sec^2(2x)$
g) $y = \mathrm{e}^{\tan(x)} - \sin(x)\cos(x)$
h) $y = \cot\left(\dfrac{x-1}{x-4}\right)$

**Question 10**
Démontrer que $(\cos(x))' = -\sin(x)$

a) En utilisant la définition de la dérivée.
b) En utilisant l'identité $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$.
c) En utilisant les identités $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

# Applications

**Question 11**
Trouver l'équation de la droite tangente à la courbe de $f(x) = \ln(\sin(x))$ au point $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

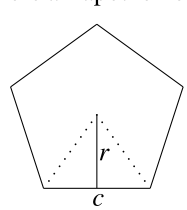
**Question 12**
Étudier la croissance et la concavité des fonctions suivantes et tracer leur graphique.

a) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \sin(x)$, où $x \in [0,\ 2\pi]$
b) $f(x) = \sin x + \cos(x)$, où $x \in [0,\ 2\pi]$

**Question 13**
Trouver les extremums absolus des fonctions données sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

a) $f(x) = \cos^2(2x)$
b) $f(x) = 5\sin(x) + 12\cos(x)$

**Question 14**
Un polygone régulier à $n$ côtés est une figure formée de $n$ côtés et angles congrus (carré, pentagone régulier, hexagone régulier, etc.). Plus le nombre de côtés augmente, plus le polygone ressemble à un cercle. On peut dire qu'un cercle est la limite d'un polygone régulier lorsque le nombre $n$ de côtés tend vers l'infini. Le rayon de ce cercle correspondra alors à l'apothème $r$ illustrée dans la figure.




a) Trouver l'aire d'un polygone régulier à $n$ côtés en fonction de $r$ et de $c$.
b) Exprimer $c$ en fonction de $n$ (vous aurez besoin de trigonométrie ici).
c) Utiliser les deux résultats pour trouver une formule générale pour l'aire d'un polygone à $n$ côtés en fonction uniquement de $n$ et de $r$.
d) En déduire la formule de l'aire d'un cercle (Remarquons que $r$ est une constante dans le processus). Indice : il faut adapter le résultat $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ à la situation. *Vous venez de démontrer la formule de l'aire du cercle ! Cette formule a été démontrée pour la première fois par Archimède (287 av. J.C. – 212 av. J.C.), mais sans utiliser le concept moderne de limite.*

**Question 15**
Déterminer quel est le rectangle de périmètre maximum pouvant être inscrit dans le cercle unité.

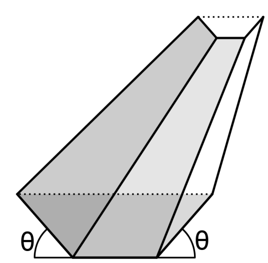
**Question 16**
On lance un projectile avec un canon selon une vitesse initiale de $v_0$ m/s. Si on néglige la résistance de l'air, la portée (la distance horizontale parcourue par le projectile) est donnée par la fonction

$$R(\theta) = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

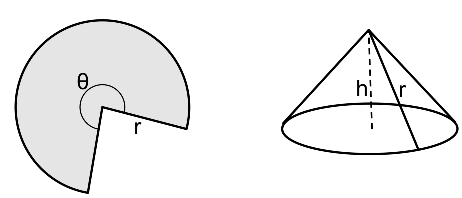
où $g = 9,8$ m/s$^2$ et $\theta$ est l'angle d'inclinaison du canon. Selon quel angle doit-on placer le canon pour avoir une portée maximale ?

**Question 17**
Les côtés congrus d'un triangle isocèle mesurent 5 cm. Trouver l'angle $\theta$ entre ces deux côtés qui maximise l'aire du triangle.

**Question 18**
On fabrique une auge à partir d'une feuille de métal de 120 cm de largeur. De chaque côté, on replie une bande de 40 cm selon un angle $\theta$. Quel doit être cet angle pour que l'auge puisse contenir un volume maximal ?




**Question 19**
On forme un cône en supprimant un secteur d'un disque de rayon égal $r$. Trouver la valeur de l'angle $\theta$ pour lequel le volume du cône obtenu est maximal.

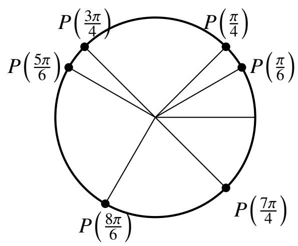



**Question 20**
Trouver les extremums locaux des fonctions suivantes.

a) $y = \ln^2\left(2x^2 - x\right)$.
b) $y = \sin^2 x + 2\cos x$.

# Solutions

### Question 1

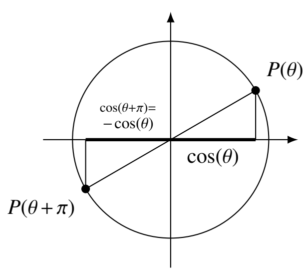



### Question 2

a) 1
b) $-\sqrt{3}/2$
c) 1
d) 2
e) $\sqrt{2}$
f) $1/\sqrt{3}$
g) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
h) 0
i) $-1$
j) $\sqrt{3}$
k) $-\sqrt{2}$
l) $-2$
m) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ou utiliser le fait que $\pi/3 + \pi/4 = 7\pi/12$
n) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

### Question 3

a)

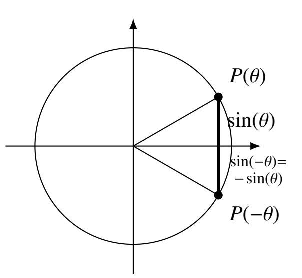



b)

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\pi) &= \cos(\theta)\cos(\pi) - \sin(\theta)\sin(\pi)\\ &= \cos(\theta)(-1) - \sin(\theta)(0)\\ &= -\cos(\theta)\end{aligned}$$

### Question 4

a)




b) Voir formulaire trigo.
c) Voir formulaire trigo.
d) Utiliser l'identité pour cosinus d'une somme d'angles et évaluer $\cos(\pi/2)$.
e) Utilisez l'identité donnant le cosinus d'une somme de deux angles.
f) Utilisez l'identité donnant le sinus d'une somme de deux angles à deux reprises.
g) Laissé à l'étudiant·e.
h) Laissé à l'étudiant·e.

### Question 5

a) 1
b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\nexists$
d) $-\infty$
e) $+\infty$
f) $+\infty$
g) $+\infty$
h) $-\infty$
i) $-1$
j) $\infty$
k) $-1$
l) $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$
m) $-4$
n) $-1$
o) 1

### Question 6

a)

$$\begin{aligned}\left(\cot(x)\right)' &= \left(\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)'\right.\\ &= \frac{(-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x)}{\sin^2(x)}\\ &= \frac{-1}{\sin^2(x)}\\ &= -\csc^2(x)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\left(\sec(x)\right)' &= \left((\cos(x))^{-1}\right)'\\ &= -\left(\cos(x)\right)^{-2}(-\sin(x))\\ &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\frac{1}{\cos(x)}\\ &= \sec(x)\tan(x)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\left(\csc(x)\right)' &= \left((\sin(x))^{-1}\right)'\\ &= -\left(\sin(x)\right)^{-2}(\cos(x))\\ &= -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\frac{1}{\sin(x)}\\ &= -\csc(x)\cot(x)\end{aligned}$$

### Question 7

a) $y' = 5\cos(5x)$
b) $y' = -3\sin(3x)$
c) $y = 2x\sec^2\left(x^2\right)$
d) $y = 2x\sec\left(x^2\right)\tan\left(x^2\right)$
e) $y = -\frac{1}{6}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$
f) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2\sin(x) + x^3\cos(x)$
g) $\dfrac{dy}{dx} = 3\sin(x) - 3\sin(3x)$
h) $\dfrac{dy}{dx} = 2\sec^2(x)\tan(x)$
i) $\dfrac{dy}{dx} = 3\csc(3x)\left(1 - 2\csc^2(3x)\right)$
j) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(x^2+2x\right)\sec^2\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}{(x+1)^2}$
k) $\dfrac{dy}{dx} = 3e^{\sin(3x)}\cos(3x)$

### Question 8

a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin(x) + x\cos(x)}{\cos(y) - y\sin(y)}$
b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$
c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{12x^3}{3y^2\sec(y^3)\tan(y^3) + 2y}$
d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y\tan(e^y)}{xye^y\sec^2(e^y) + 1}$

### Question 9

a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x}\sin e^{-x}$
b) $\dfrac{dy}{dx} = \cos x\left(3sin^2(x) + 3^{\sin(x)}\ln(3)\right)$
c) $\dfrac{dy}{dx} = \sec(x)$
d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x\csc(x^2)\left(1+\cot(x^2)+\csc(x^2)\right)}{(1-\cot(x^2))^2}$
e) $\dfrac{dy}{dx} = -2x\sec^2(x^2)\sin\left(\tan(x^2)\right)$
f) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x^3}\sec^2(2x)\left(3x^2 + 4\tan(2x)\right)$
g) $\dfrac{dy}{dx} = e^{\tan(x)}\sec^2(x) - \cos(2x)$
h) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{x-4}\csc^2\left(\dfrac{x-1}{x-4}\right)$

### Question 10

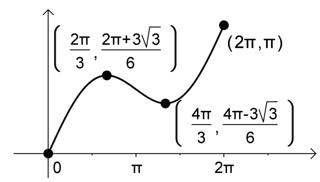
a) S'inspirer de la preuve de $(\sin(x))' = \cos(x)$ ; vous pouvez utiliser les deux lemmes démontrés en classe sans les redémontrer.
b) Dériver directement.
c) Fait en classe, tentez de le refaire par vous même.

### Question 11

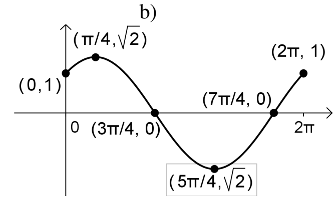
$$y = x + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$$

### Question 12

a)




b)




### Question 13

a) max=1, atteint en $x \in \left\{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$, min=0, atteint en $x \in \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$

### Question 14

a) $A = \frac{ncr}{2}$
b) $c = 2r\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$
c) Laissé à l'étudiant.
d) Laissé à l'étudiant.

### Question 15

Si on pose que $x$ est la base d'un rectangle inscrit dans le cercle unité et $y$ sa hauteur, le périmètre du rectangle est $p = 2x + 2y$.

La diagonale du rectangle étant le double du rayon unité, celle-ci est de longueur 2. De plus, si $\theta$ est l'angle formé par la diagonale du rectangle et sa base, alors $x = 2\cos(\theta)$ et $x = 2\sin(\theta)$.

On peut donc exprimer le périmètre $p$ en fonction de l'angle $\theta$ :

$$p(\theta) = 4\cos(\theta) + 4\sin(\theta).$$

L'angle $\theta$ doit être compris entre 0 et $\pi/2$.

En dérivant, on trouve que

$$p'(\theta) = 4(-\sin(\theta) + \cos(\theta))$$

$p'(\theta) = 0$ si

$$-\sin(\theta) + \cos(\theta) = 0$$

donc si

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta) = 1,$$

ce qui est le cas quand $\theta = \pi/4$ ou $\theta = 3\pi/4$. On rejette cette seconde solution car elle n'est pas entre 0 et $\pi/4$.

On vérifie avec la dérivée seconde laquelle de cette solution donne un maximum de $p(\theta)$.

$$p'(\theta) = 4(-\cos(\theta) + -\sin(\theta))p'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + -\frac{\sqrt{2}}{2}\right.$$

Comme la dérivée seconde $p'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est négative, le périmètre est maximum en $\pi/4$.

### Question 16

$\theta = \frac{\pi}{4}$

### Question 17

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$

**Question 18**

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ rad

**Question 19**

$\theta = \sqrt{2}\pi$ rad $\approx 254,56°$

**Question 20**

a) Aucun max. local, min. local en $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et en $(1, 0)$.

b) max. local en $(2k\pi, 2)$, min. local en $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, -2\right)$.