

Examen formatif 2

Question 1

Répondre aux questions suivantes. Il n'est pas nécessaire de justifier vos réponses.

- a) Vrai ou faux ? Si $f(x)$ n'est pas continue en $x = a$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \nexists$.
- b) Vrai ou faux ? Si en évaluant une limite on obtient la forme indéterminée « 0/0 », la limite n'existe pas.
- c) Vrai ou faux ? Si deux fonctions $F(x)$ et $G(x)$ sont identiques près de a (sauf peut-être en a), alors

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} G(x),$$

si la limite du membre de droite existe.

- d) Donner un exemple de graphe de fonction où $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$, mais où $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \exists$ et $a \in \text{dom}(f)$.
- e) Donner un exemple de graphe de fonction où $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \nexists$ mais où $f(a)$ est défini.
- f) Évaluer la limite : $\lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{4 - x^2}$

Question 2

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes à l'aide des propriétés de la dérivée. Simplifier les résultats obtenus.

a) $y = (3x - 1)^{12}(x^2 + 1)^{20}$ b) $y = \frac{(2x - 3)^{10}}{(3x - 2)^{10}}$

Question 3

Calculez les dérivées suivantes. Il n'est pas nécessaire de simplifier les résultats, mais on ne doit pas laisser d'exposants fractionnaires ou négatifs.

a) $f(x) = (1 + 2x)^2 \sqrt[3]{1 - x^2}$ b) $f(x) = \frac{(3x - 2)^2}{(x - 1)\sqrt{x}}$

Question 4

Donner l'esquisse d'une fonction f qui satisfait toutes les conditions suivantes (Il n'est pas nécessaire de justifier).

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 4 & -1 \notin \text{Dom}(f) & \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty & f(1) = 3 & \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \nexists \end{array}$$

Question 5

Évaluer les limites suivantes, si elles existent. Indiquez quand vous utilisez la continuité.

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^5 + 2x^4 + x + 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + 25}$ d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{16} - \frac{1}{x^2}}{(x + 1)^2 - 25}$

Question 6

Soit f la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{si } x < -1, \\ 0 & \text{si } x = -1, \\ x + 1 & \text{si } -1 < x \leq 2, \\ 3 & \text{si } 2 < x < 3, \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

- a) Déterminer si f est continue en $x = -1$.
- b) Déterminer si f est continue en $x = 2$.
- c) Est-ce que f est continue sur l'intervalle $[-1, 2]$?

Question 7

Soit C la courbe définie par l'équation

$$(x^3 - 1)y^2 = 1.$$

- a) Déterminer la pente de la tangente en un point quelconque (x, y) sur la courbe au point à l'aide de la dérivation implicite.
- b) L'affirmation suivante est-elle vraie ? Expliquer votre réponse.
 « Comme y' vaut $6/7$ au point $(2, 1)$, la pente de la tangente à C au point $(2, 1)$ est $6/7$. »

Question 8

Prouver que si $f'(x)$ existe, alors $(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$. Utilisez la définition de la dérivée et les propriétés des limites (sans utiliser les propriétés de la dérivée). (Indice : utilisez le conjugué)

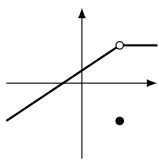
Question 9

Montrer que la fonction $\sqrt{(x - 1)^2}$ n'est pas dérivable en $x = 1$.

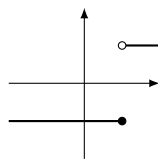
Solutions

Question 1

- a) Faux.
- b) Faux.
- c) Vrai.
- d) Par exemple :



e) Par exemple :



$$f) \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{(2-x)(2+x)} = \sqrt{(2-2^-)(2+2^-)} = \sqrt{4(0^-)\sqrt{0^-}} = 0$$

Question 2

a)

$$y' = ((3x-1)^{12}(x^2+1)^{20})'$$

$$= ((3x-1)^{12})'(x^2+1)^{20} + (3x-1)^{12}((x^2+1)^{20})'$$

$$= 12(3x-1)^{11}(3x-1)'(x^2+1)^{20} + (3x-1)^{12}(20)(x^2+1)^{19}(x^2+1)'$$

$$= 12(3x-1)^{11}(3)(x^2+1)^{20} + (3x-1)^{12}(20)(x^2+1)^{19}(2x)$$

$$= 36(3x-1)^{11}(x^2+1)^{20} + 40x(3x-1)^{12}(x^2+1)^{19}$$

$$= (3x-1)^{11}(x^2+1)^{19}(36(x^2+1) + 40x(3x-1))$$

$$= (3x-1)^{11}(x^2+1)^{19}(36x^2 + 36 + 120x^2 - 40x)$$

$$= (3x-1)^{11}(x^2+1)^{19}(156x^2 - 40x + 36)$$

b)

$$y' = \left(\frac{2x-3}{3x-2}\right)^{10}'$$

$$= \left(\left(\frac{2x-3}{3x-2}\right)^{10}\right)'$$

$$= 10 \left(\frac{2x-3}{3x-2}\right)^9 \left(\frac{2x-3}{3x-2}\right)'$$

$$= 10 \frac{(2x-3)^9}{(3x-2)^9} \frac{(2x-3)'(3x-2) - (2x-3)(3x-2)'}{(3x-2)^2}$$

$$= 10 \frac{(2x-3)^9(2(3x-2) - (2x-3)(3))}{(3x-2)^{11}}$$

$$= 10 \frac{(2x-3)^9(5)}{(3x-2)^{11}}$$

$$= \frac{50(2x-3)^9}{(3x-2)^{11}}$$

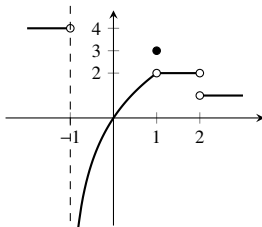
Question 3

a) $f'(x) = 4(1+2x) \sqrt[3]{1-x^2} - \frac{2x(1+2x)^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$

b) $f'(x) = \frac{6(3x-2)(x-1)\sqrt{x} - (3x-2)^2\left(\sqrt{x} + \frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)}{x(x-1)^2}$

Question 4

Il y a plusieurs solutions possibles. En voici une.



Question 5

- a) C'est une forme « $\frac{0}{0}$ ». Factoriser $(x+2)$ au numérateur et au dénominateur. Numérateur $x^2-4 = (x+2)(x-2)$.
Dénominateur (en divisant) :
 $x^5 + 2x^4 + x + 2 = (x+2)(x^4 + 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^5+2x^4+x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x^4+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)}{(x^4+1)}$$

$$\stackrel{\text{cont}}{=} \frac{((-2)-2)}{((-2)^4+1)}$$

$$= -\frac{4}{17}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{x^2+25} \stackrel{\text{cont}}{=} \frac{0}{50} = 0$

- c) C'est une forme « $0/0$ ». Il faut donc simplifier le facteur $(x-3)$ au numérateur et au dénominateur pour lever l'indétermination.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+16}-5}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+16}-5}{x-3} \frac{\sqrt{x^2+16}+5}{\sqrt{x^2+16}+5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+16-25}{x-3} \frac{1}{\sqrt{x^2+16}+5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} \frac{1}{\sqrt{x^2+16}+5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \frac{1}{\sqrt{x^2+16}+5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{1} \frac{1}{\sqrt{x^2+16}+5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+16}+5}$$

$$\stackrel{\text{cont}}{=} \frac{3}{5}$$

- d) Forme « $0/0$ ». On veut simplifier le facteur commun $(x-4)$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{16} - \frac{1}{x^2}}{(x+1)^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\left(\frac{x^2-16}{16x^2}\right)}{((x+1)-5)((x+1)+5)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\left(\frac{(x-4)(x+4)}{16x^2}\right)}{(x-4)(x+6)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{(x-4)(x+4)}{16x^2}\right) \frac{1}{(x-4)(x+6)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{(x+4)}{16x^2}\right) \frac{1}{(x+6)}$$

$$\stackrel{\text{cont}}{=} \frac{1}{320}$$

(ind. Simplifier le plus possible les fractions dans les calculs au lieu de multiplier les facteurs ensembles.)

Question 6

- a) La fonction f n'est pas continue en $x = -1$: prendre la limite à gauche (attention, c'est un cas « $0/0$ ») et à droite quand $x \rightarrow -1$ pour montrer que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ n'existe pas. La fonction n'est donc pas continue en $x = -1$.
- b) La fonction f est continue en $x = 2$: prendre la limite à gauche et à droite quand $x \rightarrow 2$ pour montrer que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. Comme on a aussi que $f(2) = 3$, la fonction est continue en $x = 2$.
- c) Non, car elle n'est pas continue en $x = -1$; pour être continue sur $[-1, 2]$, f doit être continue en chaque $x \in [-1, 2]$.

Question 7

- a) On dérive chaque membre de l'équation $(x^3-1)y' = 1$ pour obtenir

$$3x^2y' + 2(x^3-1)yy' = 0.$$

En isolant y' , on trouve que $y' = -\frac{3x^2y}{2(x^3-1)}$.

- b) Même si on peut évaluer y' au point $(2, 1)$, la valeur obtenue n'est pas la pente de la tangente à C car le point $(2, 1)$ n'est pas sur la courbe C : en substituant dans l'équation qui définit C , on trouve

$$(2^3-1)1^1 \neq 1.$$

L'expression obtenue pour y' est valable uniquement pour les (x, y) qui satisfont l'équation définissant C .

Question 8

$$(\sqrt{f(x)})' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(x+\Delta x)} - \sqrt{f(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sqrt{f(x+\Delta x)} - \sqrt{f(x)}\right) \frac{1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sqrt{f(x+\Delta x)} - \sqrt{f(x)}\right) \frac{\sqrt{f(x+\Delta x)} + \sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x+\Delta x)} + \sqrt{f(x)}} \frac{1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x+\Delta x) - f(x)) \frac{1}{\sqrt{f(x+\Delta x)} + \sqrt{f(x)}} \frac{1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{f(x+\Delta x)} + \sqrt{f(x)}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{f(x+\Delta x)} + \sqrt{f(x)}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x).$$

Question 9

La dérivée de la fonction est (selon la définition) :

$$(\sqrt{(x-1)^2})' = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(1-1)^2}}{x-1}$$

On montre que la limite du membre de droite n'existe pas en comparant les limites à droite et à gauche.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(1-1)^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1$$

$$= 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(1-1)^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} -1$$

$$= -1$$

Comme les limites $x \rightarrow 1^+$ et $x \rightarrow 1^-$ ne sont pas les mêmes, la limite

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(1-1)^2}}{x-1}$$

n'existe pas. Ainsi la fonction $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$ n'est pas dérivable en $x = 1$.