Exercices Sommes de Rieman

Calcul intégral – Hiver 2020 – Yannick Delbecque

Intégrales définies

Question 1
Écrire la définition des intégrales définie suivantes, sans évaluer les sommes et les limites.

a) $\int_1^3 x^2\,dx$, rectangles à droite.

b) $\int_1^3 x^2\,dx$, rectangles à gauche.

c) $\int_{-1}^3 1 - x\,dx$, rectangles à droite.

d) $\int_1^2 x^2 - x\,dx$, rectangles à gauche.

Question 2
Déterminer la valeur des intégrales définies suivantes à l'aide de la définition.

a) $\int_0^1 x + 1\,dx$

b) $\int_0^1 1 - x^2\,dx$

Solutions

Question 1

a) $\displaystyle\int_1^3 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n}$

b) $\displaystyle\int_1^3 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2(k-1)}{n}\right)^2\frac{2}{n}$

c) $\displaystyle\int_{-1}^3 1-x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\left(-1+\frac{4k}{n}\right)\right)\frac{4}{n}$

d) $\displaystyle\int_1^2 x^2-x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{(k-1)}{n}\right)^2-\left(1+\frac{(k-1)}{n}\right)\right)\frac{1}{n}$

Question 2

a)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x+1\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(0+\frac{k}{n}\right)\Delta x\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}+1\right)\frac{1}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}+1\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}+\sum_{k=1}^{n}1\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}+n\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+1\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{2n}+1\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n(1+1/n)}{2n}+1\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)}{2}+1\\
&= \frac{(1+1/\infty)}{2}+1\\
&= \frac{1}{2}+1\\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 1-x^2\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(0+\frac{k}{n}\right)\Delta x\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1-\frac{k^2}{n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}1-\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(n-\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(n-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}1-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-(n+1)(2n+1)}{6n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(6-\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)}{6n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(6-\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)}{6}\\
&= \frac{\left(6-\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(2+\frac{1}{\infty}\right)\right)}{6}\\
&= \frac{6-2}{6}\\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$