

Formatif 3

Question 1

Déterminer la valeur des constantes A, B, C, \dots telles que

$$\frac{4x^3 + 6x^2 + x + 2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Question 2

Donner la forme de la décomposition en fractions partielles sans déterminer les valeurs des constantes.

a) $\frac{1}{x^2 + 2x + 1}$

b) $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2(x^2 - x + 3)^2}$

c) $\frac{x - 1}{x^4 - x^3 - x + 1}$

(indice : $1^4 - 1^3 - 1 + 1 = 0$)

Question 3 (70 points)

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4x^2 - 9}} dx$

b) $\int \frac{x^2 - x + 3}{(x - 2)(x^2 + 1)} dx$

c) $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 10} dx$

d) $\int_0^2 \frac{1}{x - 2} dx$

e) $\int_{\pi/117}^{\infty} \cos(x) dx$

f) $\int_0^{\pi/2} \tan(x) dx$

g) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

Question 4

Sans faire aucun calcul, décrivez les étapes possibles du calcul de l'intégrale

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 2x - 4}{(x - 1)(x^2 + 2x + 3)} dx$$

en supposant que les résultats sont les pires possibles pour compliquer le calcul. Donner les techniques d'intégrations et les manipulations algébriques importantes qui seraient à utiliser.

Solutions

Question 1

Les valeurs sont $A = 1, B = 2, C = 3$ et $D = 4$.

Question 2

a) $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$

b) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+3} + \frac{Ex+F}{(x^2-x+3)^2}$

c) $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$

Question 3

a) Substitution trigonométrique avec

$$x = \frac{3}{2} \sec(\theta).$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4x^2-9}} dx =$$

$$\frac{(\sqrt{4x^2-9})^3}{48} + \frac{9\sqrt{4x^2-9}}{16} + C$$

b) Décomposition en fractions partielles.

$$\int \frac{x^2-x+3}{(x-2)(x^2+1)} dx = \ln|x-2| - \arctan(x) + C$$

c) Compléter le carré au dénominateur donne $(x-1)^2+9$ et utiliser la substitution trigonométrique $\tan(\theta) = \frac{x-1}{3}$.

$$\int \frac{1}{x^2-2x+10} dx = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$$

d) Intégrale impropre, A.V. en $x = 2$.

$$\lim_{b \rightarrow 2^-} \int_0^b \frac{1}{x-2} dx = -\infty$$

e) Intégrale impropre divergente car $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x) \nexists$.

f) Intégrale impropre, A.V. en $\pi/2$.

$$\int_0^{\pi/2} \tan(x) dx = \infty$$

g) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx = -1$ (il faut trouver une

primitive avec l'intégration par partie et il faut utiliser la règle de l'Hospital pour évaluer la limite).

Question 4

Division polynomiale et décomposition en fraction partielle. Comme on a un facteur premier d'ordre deux, on aura une intégrale de la forme

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+2x+3} dx$$

que l'on doit faire à l'aide d'une substitution trigonométrique après avoir complété le carré en bas. Le résultat sera une intégrale contenant du sin et du cos ou du sec et du tan, que l'on pourra calculer à l'aide des techniques d'intégration pour les fonctions trigonométriques, peut-être à l'aide d'identités trigonométriques.