Notes de cours

# Calcul différentiel

Yannick Delbecque, Hiver 2020

# Chapitre 1

# Notions préalables

## 1.1 Questions notations et abréviations

### 1.1.1 Ensembles

Un **ensemble** est une collection d'éléments. Si $x$ est un élément de de l'ensemble $A$, on écrit $x \in A$. Sinon, on écrit $x \notin A$. On ne tient pas compte des répétitions dans les ensembles : $\{1,2,3\}$ est le même ensemble que $\{1,2,3,3,3,3\}$ !

On peut décrire un ensemble de plusieurs manières.

**Compréhension** Par un condition qui doit être satisfaite pour qu'un $x$ soit élément de l'ensemble.

$$\{x \mid \text{ condition sur } x\}$$

**Extension** En donnant une liste des éléments de l'ensemble

$$\{-2,1,\pi,10\}$$

Un même ensemble peut être décrit de plusieurs manières :

$$A = \{0,2,4,6,8\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ est un nombre naturel pair plus petit que} 10\}$$

Les ensembles $A$ et $B$ sont identiques car ils contiennent les mêmes éléments. On écrit $A = B$ pour dire que deux ensembles sont **égaux**, c'est à dire qu'ils contiennent les mêmes éléments.

L'**ensemble vide** est l'ensemble qui ne contient aucun élément. On dénote l'ensemble vide par le symbole « $\emptyset$ ». Autrement dit,

$$\emptyset = \{\}$$

**Remarque 1.1.** Le symbole « $\emptyset$ » est parfois utilisé à tord pour signifier » aucune solution » ou « impossible ».

On peut dire que « l'ensemble solution » d'un problème donnée est l'ensemble vide, ce qui signifie effectivement qu'il n'y a aucune solution. Cependant, on ne peut pas écrire

$$\sqrt{-1} = \emptyset \text{ ou } \sqrt{-1}\,\emptyset$$

car $\emptyset$ est un ensemble et $\sqrt{-1}$, si ce nombre était défini, serait justement un nombre.

**Cardinalité**

Un ensemble peut être **infini** comme l'ensemble des nombres pairs ou celui des nombres premiers, ou **fini** comme l'ensemble des facteurs entiers du nombre 12. On appelle la taille d'un ensemble sa **cardinalité**.

**Opérations de base sur les ensembles**

**Union**

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} \qquad \text{« } A \text{ union } B \text{ »}$$

**Intersection**

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\} \qquad \text{« } A \text{ intersection } B \text{ »}$$

**Différence**

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} \qquad \text{« } A \text{ sauf } B \text{ »}$$

**Exemple 1.1.**

$$\{1,2,3\} \cup \{2,3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$$
$$\{1,2,3\} \cap \{2,3,4,5\} = \{2,3\}$$
$$\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4,5\} = \{1\}$$
$$\{1,2\} \cap \{3,4,5\} = \emptyset$$
$$\{2,3\} \setminus \{2,3,4,5\} = \emptyset$$

**Sous-ensemble**

Si chaque élément d'un ensemble $A$ est aussi un élément d'un ensemble $B$, alors on dit que $A$ est un **sous-ensemble** de $B$. On écrit alors

$$A \subseteq B.$$

**Remarque 1.2.** Ne pas confondre $\in$ (« est élément de ») avec $\subseteq$ (« est sous-ensemble de »).

Par exemple

$$2 \in \{1,2,3,4\}$$

mais l'énoncé « $2 \subseteq \{1,2,3,4\}$ » n'a pas de sens.

De même

$$\{2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\}$$

mais

$$\{2,3\} \in \{1,2,3,4\}$$

est faux.

**Ensembles souvent utilisés dans ce cours**

Certains ensembles sont très importants en mathématiques et on des noms et notations standard. Dans ce cours, nous utiliserons régulièrement les ensembles de nombres suivants :

$\mathbb{N}$ : les nombres naturels ;

$\mathbb{Z}$ : les nombres entiers ;

$\mathbb{Q}$ : les nombres rationnels ;

$\mathbb{R}$ : les nombres réels.

Ces ensembles importants seront décrits plus loin. Il existe d'autres ensembles de nombres utilisés ou étudiés en mathématiques que nous ne verrons pas dans ce cours : les nombres complexes ($\mathbb{C}$), les nombres algébriques ($\mathbb{A}$), les nombres transcendants, et plusieurs autres.

Nous utiliserons aussi les intervalles de nombres réels :

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (intervalle **fermé**)

$]a,b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalle **ouvert**)

$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a,b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

## 1.2 Logique et abréviations

Un **énoncé** est une affirmation pouvant être vraie ou fausse.

**Exemple 1.2.** Les affirmations suivantes sont des énoncés.

« 2+2=5 »

« 5 est un nombre premier » « $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ » « La fonction définie par $f(x) = x^2$ est croissante si $x \geq 0$.

**Remarque 1.3.** Ne pas confondre un énoncé avec une expression. Par exemple

$$2x + 3 = 5$$

est un énoncé (pouvant être vrai ou faut selon la valeur de $x$), mais

$$2x + 3$$

est une expression algébrique qui représente un nombre. Cela n'a pas de sens de dire que le nombre $2x+3$ est vrai ou est faux. En mathématique élémentaire, les énoncés comportent le plus souvent le symbole « = » ou un symbole d'inégalité.

Voici quelques symboles logiques que nous utiliserons dans ce cours.

**« non-$A$ »** Négation de $A$. Diverses notations sont utilisées, par exemple $\neg A$

**« si $A$, alors $B$ »** Notation : $A \implies B$. $A$ est l'**hypothèse**, $B$ est la **conclusion**. On dit aussi que $A$ est une condition suffisante pour $B$ et que $B$ est une condition nécessaire pour $A$.

**« $A$ si et seulement si $B$ »** Notation : $A \iff B$ ou $A$ ssi $B$. $A \iff B$ est équivalent à dire que $A \implies B$ et $B \implies A$.

« $\forall A$ » « Pour tout $A$. » On écrit par exemple

$$\forall n \in \mathbb{Z}. n \text{ est pair ou impair}$$

pour dire qu'un nombre entier quelconque est pair ou impair.

« $\exists A$ » « Il existe $A$ ». On écrit par exemple

$$\exists n \in \mathbb{Z}. n \text{ est un nombre premier}$$

pour dire qu'il y a (au moins) un nombre entier qui est premier.

Notons que, donné par écrit, l'énoncé d'une implication n'est pas toujours exactement la forme « si ... alors ... ». Par exemple :

> « Un nombre entier est divisible par 2 s'il se termine par 0,2,4,6 ou 8 »

est le même énoncé que

> « S'il se termine par 0,2,4,6 ou 8, un nombre entier est divisible par 2. »

En utilisant le symbole $\implies$, cela revient à dire que

$$A \implies B \text{ et } B \impliedby A$$

sont des énoncés équivalents.

La **contraposée** d'une implication de la forme $A \implies B$ est l'implication non $-B \implies$ non $-A$. La contraposée est équivalente à l'implication originale.

**Exemple 1.3.** L'énoncé

> « Un nombre entier n'est pas divisible par 2 s'il ne se termine pas par 0,2,4,6 ou 8. »

est la contraposée de

> « Si un nombre entier se termine par 0,2,4,6 ou 8, alors il est divisible par 2. »

**Exemple 1.4.** L'énoncé

> « Si un nombre est premier, alors il n'a pas de diviseurs autre que 1 et lui-même. »

est la contraposée de

> « Si un nombre a d'autres diviseurs que 1 et lui-même alors il n'est pas premier. »

Une **tautologie** est une affirmation qui est toujours vraie pour des raisons logiques.

**Exemple 1.5.** Les énoncés des formes suivantes sont toujours vrais.

$$A \implies A$$

> « Si $n$ est un nombre entier, alors $n$ est un nombre entier. »

$$A \text{ et } B \implies A$$

> « Si $n$ est un nombre entier et $q$ est un nombre rationnel, alors $n$ est un nombre entier. »

$$A \implies B \text{ ou non-}B$$

« Si $n$ est un nombre entier, alors $n$ est pair ou $n$ est impair. »

### 1.2.1 Division du discours mathématique

Pour clarifier la lecture, un texte est normalement divisés en plusieurs parties de différents niveaux hiérarchiques : chapitres, sections, paragraphes, phrases, etc. Pour clarifier la lecture d'un texte mathématique, on utilise en plus des divisions spéciales associées au différents éléments du discours mathématique.

**Axiome** Propriété qui est acceptée sans démonstration, considérée comme assez évidente pour être le fondement d'une théorie mathématique.

**Définition** Propriété ou identité qui défini le sens d'une notation ou d'un terme nouveau.

**Théorème** Résultat important, dont la validité est établie par une démonstration ou une preuve, et qui a une grande importance dans un domaine donné des mathématiques étant donné ses multiples conséquences. Abréviation en classe : « thm ».

**Proposition** Résultat important, dont la validité est établie par une démonstration ou une preuve. Abréviation en classe : « prop ».

**Lemme** Résultat servant à démontrer un ou plusieurs autres résultats.

**Corrolaire** Résultat qui est déduit facilement d'un résultat précédant, une conséquence immédiate d'un théorème ou d'une proposition.

**Preuve** (ou **démonstration**) Suite de déduction logiques dont la conclusion est un théorème, une proposition ou un lemme. Une preuve répond à la question « pourquoi c'est vrai. » On indique habituellement la fin d'une preuve à l'aide de CQFD (« ce qu'il fallait démontrer »), QED (« *quod erat demonstrandum* », CQFD en latin) ou par un signe comme « $\square$ ». Il existe plusieurs formes de preuves (directes, par induction, par contradiction ou par l'absurde, etc.) que nous verrons à l'œuvre au cours de la session.

Note importante : « démontrer » ne veut pas dire « donner un exemple ». Un cas particulier n'établit pas la vérité pour tous les cas.

Cependant, un seul cas particulier peut réfuter une affirmation générale. On appelle un tel exemple un **contre exemple**.

**Exemple 1.6.** Le fait que
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
est un cas particulier qui ne démontre pas que
$$x^2 + y^2 = z^2$$
pour n'importe quel nombres $x, y$ et $z$. Par exemple,
$$2^2 + 3^2 \neq 4^2.$$
Ce dernier exemple démontre cependant que
$$x^2 + y^2 = z^2$$
n'est pas toujours vrai !

**Exemple 1.7.** Démontrer à l'aide d'un contre-exemple qu'il n'est pas vrai que

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2$$

pour tout choix de nombres entier $x, y$ et $z$.

On peut prendre le cas particulier $x = 2$ et $y = 3$.

$$(2+3)^2 = 25, \text{ mais } 2^2 + 3^2 = 13.$$

## 1.3 Ensembles de nombres

Dans ce qui suit, on passe en revue les différents ensembles de nombres étudiés en mathématiques. Nous donnons pour chacun quelques propriétés mathématiquement importantes qui font que l'on considère important de considérer ces types de nombres.

**Nombres naturels**

L'ensemble des nombres naturels est

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Ces nombres sont caractérisés par le fait que chaque nombre naturel $n$ a un successeur $n+1$ ; il y a toujours un nombre naturel encore plus grand qu'un nombre naturel donné.

Un principe important qui est souvent considéré comme une partie essentielle de la définition des nombres naturels :

**Hypothèse 1** (principe d'induction)**.** *Si $A(n)$ est une proposition impliquant une variable $n$ représentant un nombre entier*

*(1) est vraie pour le nombre naturel $n = 0$ et*

*(2) lorsqu'elle est vraie pour $n > 0$ et ses prédécesseurs, alors elle l'est aussi pour $n+1$,*

*alors la proposition est vraie pour tout $n$.*

**Nombres entiers**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Quelques concepts liés aux nombres naturels et aux nombres entiers.

**Définition 1.1.** $n$ est un nombre pair s'il existe un nombre $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k.$$

**Définition 1.2.** $n$ est un nombre impair s'il existe un nombre naturel $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k+1.$$

Cela est peut être contre-intuitif, mais l'essence de la division est une propriété des nombres entiers, souvent connue comme la « division avec reste ». Les mathématiciennes et mathématiciens préfèrent plutôt nommer cette propriété « division Euclidienne ».

**Théorème 1.1** (Division Euclidienne)**.** Pour tous nombres entiers $n$ et $d$, il existe deux nombres entiers uniques $q$ (quotient) et $r$ (reste) tels que $0 \leq r < d$

$$n = qd + r.$$

**Exemple 1.8.** Si $n = 10$ et $d = 4$, alors $q = 2$ et $r = 2$ sont les quotients et restes de division.

$$10 = 2(4) + 2.$$

La division Euclidienne fonctionne aussi pour les nombres négatifs. Par exemple, si $n = -3$ et $d = 2$, alors $q = -2$ et $r = 1$ sont les quotients et restes de division.

$$-3 = 2(-2) + 1.$$

Le théorème suivant est un des plus importants résultats concernant les nombres entiers.

**Théorème 1.2** (Théorème fondamental de l'arithmétique)**.** Tout nombre entier $n$ peut se factoriser de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme un produit de facteur premiers.

**Exemple 1.9.**

$$234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$$

$$-24 = (-1)2^3 \cdot 3$$

**Nombres rationnels**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$$

Une propriété fondamentale pour la manipulation des fraction est l'existence d'une unique version simplifiée de chaque fraction :

**Théorème 1.3.** Pour tout nombre rationnel $\frac{m}{n}$, avec $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$ et $m \neq 0$, il existe un unique $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ telle que

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$$

et que $a$ et $b$ n'ont pas de facteurs communs.

On peut caractériser les nombres rationnels par leur développement décimaux.

**Théorème 1.4.** Un nombre $a$ peut s'écrire comme une fraction si et seulement si son développement décimal est périodique.

**Nombres réels**

En mathématques, il y a plusieurs manières de définir les nombres réels, mais celle-ci est probablement celle qui est la plus familière :

$$\mathbb{R} = \begin{array}{l}\text{ensemble de tous les développements décimaux}\\ \text{quelconques (possiblement infini non-périodique)}\end{array}$$

Les nombres peuvent être combinés à l'aide des opérations de base : addition, soustraction, multiplication, division, exposants et racines, c'est à dire que le résultat de ces opérations, s'il est défini, est aussi un nombre réel. Quand une expression combine plusieurs opérations, on doit les effectuer dans l'ordre conventionnel déterminé par la « priorité des opérations ».

On suppose que les opérations de base ont les propriétés vu au secondaire (voir formulaire d'algèbre) : associativité, distributivité, commutativité, etc.

Un fait important au sujet des nombres réels, c'est qu'ils comportent des nombres ne pouvant s'écrire sous forme de fractions. Il est généralement assez difficile de démontrer qu'un nombre n'est pas un nombre rationnel. Voici un des exemples les plus simple et la première preuve historique de l'existence d'un nombre ne pouvant s'écrire comme une fraction de nombre entiers.

**Théorème 1.5.** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

**Lemme 1.1.**

$$n \text{ pair} \iff n^2 \text{ pair.}$$

*Preuve du lemme.* ($\implies$) Si $n$ est pair, alors $n$ est le double d'un certain nombre $k$. On peut donc écrire que $n = 2k$. Dans ce cas,

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

ce qui montre que $n^2$ est bien le double d'un nombre entier.

($\impliedby$) On démontre la contraposée : si $n$ est impair, alors $n^2$ est aussi impair. Supposons que $n$ est impair ; il peut donc s'écrire comme $n = 2k+1$ pour un certain nombre $k$. Dans ce cas,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

ce qui établi que $n^2$ est impair. □

*Preuve du théorème.* Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Nous allons montrer que cette hypothèse mène à un résultat absurde et qu'elle ne peut pas être vraie, donc que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Si $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, il existe deux entiers $a$ et $b \neq 0$ tel que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Comme on peut toujours simplifier une faction, on peut simplifier $\frac{a}{b}$ pour obtenir une fraction simplifiée $\frac{m}{n}$. On a donc

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

où $m$ et $n$ n'ont aucuns facteurs communs.

En multipliant chaque membre de l'égalité $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ par $n$, on obtient

$$n\sqrt{2} = m.$$

En mettant au carré, on a que

$$n^2(2) = m^2$$

$m^2$ doit donc être pair. Par le lemme précédant, on a que $m$ doit être pair lui aussi. $m$ peut donc s'écrire comme $m = 2k$ pour un certain entier $k$. En remplaçant $m$ par $2k$ dans l'égalité précédente

$$n\sqrt{2} = m,$$

on obtient que

$$n\sqrt{2} = 2k.$$

On met au carré pour obtenir

$$2n^2 = 4k^2.$$

En divisant par 2, on trouve

$$n^2 = 2k^2.$$

$n^2$ est donc pair, ce qui implique par le lemme précédant que $n$ est pair lui aussi.

La fraction $\frac{m}{n}$ peut donc être simplifiée car le numérateur $m$ et le dénominateurs $n$ sont tous les deux pairs ! Cela contredit le fait que $\frac{m}{n}$ est une faction simplifiée. L'hypothèse « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel » est donc fausse et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

## 1.4 Algèbre

L'objectif principal de l'algèbre élémentaire est de déterminer une valeur inconnue dans une relation numérique. On peut poser ce genre de questions sous forme « écrite », par exemple

> (Problème vieux de quelques millénaires figurant sur la tablette cunéiforme AO 8862)
> J'ai multiplié longueur et largeur pour obtenir l'aire. J'ai additionné ce par quoi la longueur dépasse la largeur à l'aire et j'ai obtenu 183. La somme de la longueur et de la largeur est 27. Quelles sont la longueur, la largeur et l'aire ?

Les géomètres et mathématiciens ont développé au fil du temps différentes manière de représenter ce genre de problème afin de les résoudre plus facilement. La notation moderne, malgré le fait qu'elle exige plusieurs années d'entrainement, est de loin la plus efficace. Si $x$ est la longueur et $y$ la largeur, le problème se traduit en notation moderne comme

$$\begin{aligned} x-y+xy &= 183 \\ x+y &= 27 \end{aligned}$$

L'algébriste moderne applique ensuite quelques principes simples de manière astucieuse pour déterminer les valeurs inconnue. On peut même décrire la méthode de solution avec ces techniques : (1) exprimer $y$ en fonction de $x$ dans la seconde équation : $y = 27-x$ (2) substituer la valeur trouvée dans la première équation $x-(27-x)+x(27-x) = 183$ (3) résoudre l'équation obtenue en regroupant : $-x^2+29x-210 = 0$. On trouve deux solutions : $x = 14$ et $x = 15$, et donc les valeurs de $y$ correspondantes : $y = 13$ et $y = 12$. L'aire correspondante est respectivement 182 et 180.

Si la solution de cet ancien problème vous semble complexe, en comparant avec une solution n'utilisant aucune des idées modernes comme des variables, la substitution, isoler, la formule quadratique, etc, la solution serait beaucoup plus complexe.

### 1.4.1 Principes généraux

Voici les principes les plus utilisés dans les raisonnements algébriques :

**(Propriétés des variables)** Une variable représentant un nombre inconnu d'un certain type (entier, rationnel, nombre réel) a les mêmes propriétés que les nombres du même type. On peut y appliquer les mêmes opérations.

**(Transitivité de l'égalité)** $A = B$ et $B = C$ alors $A = C$.

**(Application d'une opération)** Si $f(x)$ est une opération (fonction), on a que

$$A = B \implies f(A) = f(B).$$

Si $f$ est une opération inversible, alors $A = B \iff f(A) = f(B)$.
Si $f^{-1}(x)$ est l'opération inverse de $f(x)$, alors

$$f(A) = B \iff A = f^{-1}(B).$$

**(Substitution)** Si $A(x) = B(x)$ alors $A(C) = B(C)$, où $C$ est une expression algébrique quelconque substituée à la place de la variable $x$.

Voyons maintenant des exemples où ces principes sont utilisés.

### Transitivité

La transitivité de l'égalité est très souvent utilisé sans que l'on s'en rende compte ou sans que l'on mentionne explicitement son utilisation.

**Exemple 1.10.** Par exemple, si on écrit

$$(x+2)^2 = (x+2)(x+2) = x(x+2)+2(x+2) = x^2+2x+2x+4 = x^2+4x+4.$$

On utilise (plusieurs fois) la *transitivité de l'égalité* pour conclure que

$$(x+2)^2 = x^2+4x+4.$$

Note : on écrit souvent verticalement une telle suite d'égalité quand elle est trop longue :

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= (x+2)(x+2)\\ &= x(x+2)+2(x+2)\\ &= x^2+2x+2x+4\\ &= x^2+4x+4.\end{aligned}$$

### Substitution

On utilise le principe de *substitution* quand on prend une identité algébrique simple pour en trouver une plus complexe.

**Exemple 1.11.** Voici l'identité générale pour les différences de carré

$$x^2-y^2 = (x-y)(x+y),$$

Cette identité est vraie peu importe les valeurs de $x$ et $y$. On peut déduite une nouvelle identité en *substituant* (par exemple) $x^2$ à $x$ et $2x$ à $y$ :

$$(x^2)^2-(2x)^2 = \big((x^2)-(2x)\big)\big((x^2)+(2x)\big),$$

Cette dernière égalité est donc déduite de la première à l'aide du principe de substitution.

En simplifiant l'identité obtenue, on obtient que

$$x^4-4x^2 = (x^2-2x)(x^2+2x).$$

### Application d'une même opération

L'application d'une même opération sur chaque membre d'une égalité est probablement le premier principe algébrique appris dans les cours d'algèbre élémentaire et est une généralisation du principe ayant donné son nom à l'algèbre.

**Exemple 1.12.** Si on a que $2x = 5$, on obtient que

$$\frac{2x}{2} = \frac{5}{2}$$

en appliquant l'opération « diviser par deux » sur chaque membre de l'égalité initiale.

Comme « diviser par deux » est une opération inversible (dont l'inverse est « multiplier par deux », on peut écrire

$$2x = 5 \iff \frac{2x}{2} = \frac{5}{2}.$$

L'opération « mettre au carré » n'est pas inversible. Par exemple, si on met $-2$ au carré, on obtient 4. L'opération inverse est ambigüe : on pourra obtienir un carré de 4 à partir de 2 ou de $-2$.

Si on applique une opération non inversible, comme mettre au carré, on ne peut pas obtenir une équivalence entre les identités. Par exemple, l'implication

$$2x = 5 \implies 4x^2 = 25$$

est vraie, mais l'équivalence

$$2x = 5 \iff 4x^2 = 25$$

est fausse !

### 1.4.2 Propriétés algébriques utiles

Les identités algébriques suivantes sont très souvent utilisées. On les suppose connues. Elles peuvent être démontrées par des preuve directes à l'aide de manipulation algébriques simples.

$$AB + AC = A(B + C) \qquad \text{(mise en évidence simple)}$$

$$AC + AD + BC + BD = (A + B)(C + D) \qquad \text{(mise en évidence double)}$$

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \qquad \text{(rationalisation)}$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) \qquad \text{(différence de carrés)}$$

$$\left(\sqrt{A} \pm \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}\right) = A - B \qquad \text{(conjugué)}$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2) \qquad \text{(différence de cubes)}$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \qquad \text{(binôme carré parfait)}$$

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \qquad \text{(développement du binôme degré 3)}$$

$$(A + B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4 \qquad \text{(développement du binôme degré 4)}$$

#### Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal est un truc permettant de déterminer rapidement les coefficients du développement d'un binôme de degré quelconque : si on développe une expression de la forme $(A + B)^n$, les coefficients du développement sont donnée par la $n$-ième ligne du triangle de Pascal.

**Triangle de Pascal**

| | |
|---|---|
| $(A+B)^0$ | 1 |
| $(A+B)^1$ | 1 1 |
| $(A+B)^2$ | 1 2 1 |
| $(A+B)^3$ | 1 3 3 1 |
| $(A+B)^4$ | 1 4 6 4 1 |
| $(A+B)^5$ | 1 5 10 10 5 1 |
| $(A+B)^6$ | 1 6 15 20 15 6 1 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

**Exemple 1.13.** Le développement de $(x+2)^5$ a la forme suivante :

$$C_0x^5 + C_1x^4 2^1 + C_2x^3 2^2 + C_3x^2 2^3 + C_4x^1 2^4 + C_5 2^5$$

Les coefficients $C_0$, $C_1$, ..., $C_5$ sont donnés par la ligne correspondant à $(A+B)^5$ du triangle de Pascal, soit

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1.$$

On a donc que

$$(x+2)^5 = x^5 + 5x^4 2 + 10x^3 2^2 + 10x^2 2^3 + 5x2^4 + 2^5$$

La preuve que les coefficients données par le triangle de Pascal sont bien ceux des développement du binôme fût le premier exemple d'une preuve utilisant explicitement le principe d'induction sur les nombres naturels.

### 1.4.3 Propriétés fréquemment utilisées pour résoudre des équations

(EQ1) $ABC = 0 \implies A = 0$ ou $B = 0$ ou $C = 0$

(EQ2) $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \iff AD = BC$ et $B, D \neq 0$

Le premier de ces principes permet de résoudre des équations sous forme factorisée. Par exemple, si on a l'équation

$$(x-2)(x+1) = 0$$

On a une expression de la forme $AB = 0$. Il faut donc que $A = 0$ ou que $B = 0$. Dans ce cas particulier, il faut donc que

$$x - 2 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0.$$

Cela implique que $x = 2$ ou $x = -1$.

Ce principe s'applique à un produit d'un nombre de facteurs aussi grand que l'on veut : si un produit de facteurs est nul, un des facteurs doit être nul. Ainsi, les zéros de

$$(x-3)(x+\sqrt{33})(x-\log_2(3)) = 0$$

sont $x = 3$, $x = -\sqrt{33}$ et $x = \log_2(3)$.

La simplicité de la solution d'une équation factorisée est évidente si on la compare avec même équation non-factorisée :

$$x^3 - x^2\log_2(3) + \sqrt{33}x^2 - \sqrt{33}x\log_2(3) - 3x^2 + 3x\log_2(3) - 3\sqrt{33}x + 3\sqrt{33}\log_2(3) = 0.$$

C'est une des raisons principales pour lesquelles les techniques de factorisations de polynômes sont importantes : elles permettent de prendre une équation polynômiale de degré élevé et de la transformer (en la factorisant et en utilisant EQ1) en plusieurs équations de degrés moins élevés (donc plus faciles à résoudre).

Le second principe permet de résoudre facilement des équations comportant des expressions rationnelles factorisée comme l'équation suivante

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x-6} = 0.$$

Par (EQ2), cette équation est équivalente à

$$(x-3)(x+1) = 0(x-6) = 0.$$

On est donc ramené à une situation où le produit de facteurs est nul. L'équation a donc comme solution les zéros de $(x-3)(x+1)$, soit $x=3$ et $x=-1$. Ainsi, seul le numérateur détermine les zéros d'une expression de la forme $A/B$. Cependant, le dénominateur ne peut pas s'annuler car il ne peut par y avoir de division par zéro. Ainsi, dans une équation comme

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x^2+2x+1} = 0$$

$x=3$ et $x=-1$ sont les zéros du numérateur, mais $x=-1$ annule le dénominateur (ce qui cause une division par zéro !). La valeur $x=-1$ n'est donc par un zéro de l'équation.

### 1.4.4 Opérations inverses usuelles

En algèbre, on utilise souvent le « principe de la balance » : on peut faire la même opération de « chaque côté » d'une égalité. Les opérations inverses les plus souvent utilisée sont indiquées dans la liste suivante, avec les restrictions faisant en sorte que les opérations soient inversibles.

$A + C = B \iff A = B - C$

$CA = B \iff A = \frac{1}{C}B$ si $C \neq 0$.

$A^n = B \implies A = \pm\sqrt[n]{B}$ si $n$ pair.

$A^n = B \iff A = \sqrt[n]{B}$ si $n$ impair.

$b^A = B \iff \log_b(B) = A$ si $B > 0$.

$\sin(A) = B \iff A = \arcsin(B)$ si $-\frac{\pi}{2} \leq A \leq \frac{\pi}{2}$

$\cos(A) = B \iff A = \arccos(B)$ si $0 \leq A \leq \pi$

$\tan(A) = B \iff A = \arctan(B)$ si $-\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2}$

**Remarque 1.4.** Il faut faire la différence entre résoudre une équation comportant un carré et appliquer l'opération racine carrée. Si on résout une équation de la forme

$$x^2 = a,$$

qui a comme solutions $x = \pm\sqrt{a}$ si $a \geq 0$, donc deux solutions. Si on applique la fonction racine carrée sur $a$, il y a une seule valeur, le résultat de l'opération $\sqrt{a}$, qui est toujours positif.

Par exemple :

$$x^2 = 2 \implies x = \pm\sqrt{2} \text{ (deux solutions)}$$

$$\text{La racine carrée de 2 est } \sqrt{2} \text{ (une seule valeur)}$$

### 1.4.5 Factorisation

Comme nous l'avons dit précédemment, la factorisation est une stratégie importante pour simplifier une équation afin de la résoudre.

**Exemple 1.14.** Considérons l'équation

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

En factorisant le membre de gauche, on obtient

$$(x+1)(x-5) = 0.$$

Comme un produit de facteur est nul si un de ses facteur est nul, soit $(x+1) = 0$, soit $(x-5) = 0$. Les solutions sont donc $x = -1$ ou $x = 5$.

On voit dans cet exemple que chaque facteur de degré un, donc de la forme $x - a$, correspond à une solution de l'équation originale. Il y a en fait une correspondance entre les facteurs de degré 1 et les zéro : si $x = a$ est un zéro d'une équation polynômiale $P(x) = 0$, alors $(x - a)$ est un facteur de $P(x)$.

Le résultat suivant dit que chaque zéro d'un polynôme est lié à un « facteur coupable » lui correspondant et réciproquement.

**Proposition 1.1** (Factorisation)**.** Si $P(x)$ est un polynôme quelconque, alors $a$ est un zéro de $P(x)$ si et seulement si $(x - a)$ est un facteur de $P(x)$.

Autrement dit :

$$P(a) = 0 \iff P(x) = (x-a)Q(x).$$

Sous forme de « slogan « :

« zéro si et seulement si facteur (de degré 1). »

**Exemple 1.15.** Si $P(x) = x^2 - x - 2$, on a que

$$P(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0.$$

La valeur $a = 2$ est donc un zéro de $P(x)$. Le théorème de factorisation dit que $P(x)$ doit avoir $(x-2)$ ( c'est à dire le facteur ($x$-le zéro) ) comme facteur. Si on divise $P(x) = x^2 - x - 2$ par $(x-2)$, on trouve que

$$P(x) = (x-2)(x+1),$$

ce qui est est bien de la forme donnée par le théorème :

$$P(x) = (x-a)Q(x).$$

**Exemple 1.16.** La valeur $x = 1$ est un zéro de $x^3 - 1$. On sait donc par le théorème de factorisation que $x^3 - 1 = (x-1)Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme à déterminer. On peut toujours déterminer $Q(x)$ en divisant :

$$Q(x) = \frac{x^3 - 1}{(x-1)}.$$

En divisant, trouve que $Q(x) = x^2 + x + 1$, et donc

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

*Démonstration.* Comme le résultat à démontrer est de la forme « $A \iff B$ », on fait les démonstration de chacune des deux implications $A \implies B$ et $A \impliedby B$.

( $\implies$ ) Supposons que $P(a) = 0$. On peut diviser $P(x)$ par $(x-a)$ pour obtenir un expression de la forme

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R(x),$$

où $R(x)$ est le reste de la division et $Q(x)$ le quotient.

Le degré de $R(x)$ doit être zéro car on divise par le polynôme $(x-a)$ qui est de degré 1. (Le degré du reste est toujours strictement inférieur au degré du polynôme par lequel on divise.) Comme un polynôme de degré 0 est en fait une constante $R \in \mathbb{R}$, en divisant on a donc réécrit $P(x)$ comme suit :

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R$$

Si on évalue chaque membre de cette dernière égalité en $a$, on obtient

$$P(a) = (a-a)Q(a) + R$$

Par hypothèse, $P(a) = 0$. De plus, le facteur $a - a$ est toujours nul. On a donc

$$0 = 0 + R.$$

La seule valeur de $R$ satisfaisant cette équation est zéro. On a donc établit que

$$P(x) = (x-a)Q(x) + 0 = (x-a)Q(x),$$

c'est à dire que $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$.

( $\impliedby$ ) Pour démontrer la réciproque, on fait l'hypothèque que $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$. Dans ce cas, on peut écrire $P(x)$ comme un produit de facteur de la forme

$$P(x) = (x-a)Q(x)$$

où $Q(x)$ est le quotient de la division de $P(x)$ par $(x-a)$.

On veut montrer que $P(a) = 0$. Il suffit d'évaluer la forme factorisée :

$$P(a) = (a-a)Q(a) = (0)Q(a) = 0. \qquad \square$$

On peut conclure du théorème de factorisation que pour un polynôme $P(x)$,

$$P(a) \neq 0 \iff P(x) \text{ n'a pas de facteur de la forme } (x-a).$$

Cela permet de vérifier qu'un polynôme n'a pas de facteur de la forme $x - a$ sans chercher montrer directement que la factorisation est impossible. Il suffit plutôt d'évaluer $P(a)$.

**Théorème 1.6.** Les polynômes réels irréductibles sont de l'une des deux formes suivantes :

- degré 1 de la forme $c(x-a)$ ($a$ est nécessairement un zéro)
- degré 2 de la forme $ax^2+bx+c$, où $b^2-4ac<0$. (polynôme de degré deux sans zéros).

**Théorème 1.7** (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** Tout polynôme réel peut s'écrire comme un produit d'une constante réelle et de polynômes irréductibles, produit unique à l'ordre des facteurs près.

Comme chaque solution d'une équation polynômiale de la forme $P(x)=0$ correspond à un facteur de degrée un de $P(x)$, on déduit du théorème fondamental de l'algèbre le corolaire suivant.

**Corollaire 1.1.** Une équation polynômiale de degré $n$ de la forme

$$P(x)=0$$

a au plus $n$ solutions.

### 1.4.6 Fractions algébriques

**Définition 1.3.** Une **fraction algébrique** est une expression de la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes. Autrement dit, c'est une fraction de la forme

$$\frac{\text{polynôme}}{\text{polynôme}}.$$

Comme on peut factoriser des polynômes (à cause du théorème fondamental de l'algèbre), certaines opérations que l'on peut faire avec des fractions peuvent aussi être effectuées avec des polynômes : simplification de fractions, plus grand commun dénominateur, plus petit commun multiples, etc.

**Exemple 1.17.** Simplifions la fraction algébrique

$$\frac{x^2+x-2}{x^3-1}.$$

Pour simplifier la fraction algébrique, on cherche des facteurs communs au numérateur et au dénominateur. Il faut donc factoriser ces deux polynômes.

$$\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

(On utilise la technique « produit-somme » pour le numérateur et le théorème de factorisation pour le dénominateur, sachant que 1 est un zéro de $x^3-1$.)

On peut maintenant simplifier le facteur commun $(x-1)$.

$$\frac{x^2+x-2}{x^3-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)} = \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

On ne peut simplifier davantage car le numérateur et le dénominateur ne peuvent plus être factorisés ($x^2+x+1$ est un polynôme premier car $\Delta = 1^1 - 4(1)(1) < 0$.

## 1.5 Fonctions, graphes et domaines

**Définition 1.4.** Une **fonction** $f\colon A \to B$ allant d'un ensemble $A$ à un autre ensemble $B$ est une règle quelconque associant à des éléments $a$ de l'ensemble $A$ un unique élément $b$ de l'ensemble $B$.

On dénote $f(a)$ l'élément de l'ensemble $B$ associé à $a$.

### 1.5.1 Définition d'une fonction

On peut définir une fonction $f$ de plusieurs manières.

On peut le faire en donnant explicitement une expression algébrique pour déterminer $f(x)$ à partir de la valeur de $x$, par exemple

$$f(x) = x^2.$$

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

On peut aussi définir une fonction *implicitement* à l'aide d'une égalité algébrique, par exemple une des égalités suivantes :

$$y = x^2$$

$$x^2 - y = 0$$

Dans ce cas, il faut spécifier quelle variable est déterminée en fonction de l'autre variable. La variable « entrée » est appelée **variable indépendante** et la « sortie » est appelé **variable dépendante** — elle dépend de la valeur de la variable indépendante.

Une équation ne définit pas toujours une fonction : il arrive qu'une valeur donnée de la variable indépendante corresponde à plusieurs valeurs de la variable dépendante. Par exemple

$$y^2 = x$$

ne définie par une fonction si on considère $y$ comme variable dépendante. En effet, pour $x = 1$, les valeurs $y = 1$ et $y = -1$ satisfont toutes deux l'équation donnée. Il n'y a donc pas une valeur unique de $y$ associée à la valeur $x = 1$. Cette relation ne défini pas une fonction.

### 1.5.2 Évaluation d'une fonction

La valeur d'un fonction définie par une expression algébrique est déterminée par substitution. Par exemple, si $f(x) = x^2+1$, on détermine $f(2)$ en remplaçant $x$ par 2 dans l'expression $x^2+1$ définissant la fonction :

$$f(2) = (2)^2 + 1.$$

On dit que $f(2)$ est la valeur de la fonction en $x = 2$.

En général, dans l'expression $f(x)$, on appelle 2 l'**argument** de la fonction.

On peut évaluer une fonction en y substituant une expression algébrique. Par exemple, si $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, on a que

$$f(x+1) = \frac{(x+1)}{(x+1)+2}.$$

On note que toutes les occurrences de $x$ dans l'expression définissant $f$ sont remplacées par l'expression argument de la fonction.

**Remarque 1.5.** La notation $f(x)$ n'est pas un produit : $f(x)$ n'est pas le produit de $f$ par $x$. En conséquence, la simplification suivante n'a pas de sens :

$$\frac{\cancel{f}(x)}{\cancel{f}(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$

car $f$ n'est pas un nombre.

### 1.5.3 Composition

Si on a deux fonctions $f \colon A \to B$ et $g \colon B \to C$ on peut créer une nouvelle fonction en appliquant la règle de $f$ et ensuite la règle de $g$. On appelle cette fonction la **composée** de $f$ et $g$.

**Définition 1.5.** Si $f \colon A \to B$ et $g \colon B \to C$, alors la composition de $f$ et $g$ est définie par

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$$

La notation $g \circ f$ se lit « $g$ rond $f$ »

**Exemple 1.18.** Par exemple, si

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ et } g(x) = x + 1,$$

la composée de $f$ et $g$ est

$$g(f(x)) = g(x^2+1) = (x^2+1)+1$$

On note cette nouvelle fonction $g \circ f$ (lire « $g$ rond $f$ »). Ainsi

$$g \circ f(x) = (x^2+1)+1 = x^2+2.$$

La composée de $g$ et $f$ est

$$f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2+1$$

Ainsi

$$f \circ g(x) = (x+1)^2+1.$$

Dans ce dernier exemple, on voit qu'en génral $f \circ g \neq g \circ f$.

### 1.5.4 Fonctions inverses

**Définition 1.6.** On dit que les fonctions $f$ et $g$ sont **inverses** ou **réciproques** l'une de l'autre si

$$g(f(x)) = x \quad f(g(y)) = y$$

pour toutes les valeurs où ces expressions sont définies.

**Exemple 1.19.** Les fonctions

$$f(x) = \frac{x-2}{3} \text{ et } g(x) = 3x+2$$

sont des fonctions inverses l'une de l'autre. En effet,

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g\left(\frac{x-2}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{x-2}{3}\right)+2 \\ &= (x-2)+2 \\ &= x. \end{aligned}$$

De même, on a que

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(3x+2) \\ &= \frac{(3x+2)-2}{3} \\ &= \frac{3x}{3} \\ &= x \end{aligned}$$

Si la fonction est définie par une équation, on peut trouver la fonction inverse en isolant la variable indépendante en fonction de la variable dépendante. Cependant, cela ne donne pas toujours une fonction.

**Exemple 1.20.** Trouvons la fonction inverse de la fonction définie par $y = 3x+1$. On isole $x$.

$$x = \frac{y-1}{3}$$

Pour exprimer la fonction inverse en utilisant $x$ comme variable indépendante, on interchange les variables $x$ et $y$ :

$$y = \frac{x-1}{3}.$$

**Exemple 1.21.** Trouvons la fonction inverse de la fonction définie par $y = x^2+1$. On isole $x$.

$$x = \pm\sqrt{y-1}$$

Pour exprimer la fonction inverse en utilisant $x$ comme variable indépendante, on interchange les variables $x$ et $y$ :

$$y = \pm\sqrt{y-1}.$$

Cette expression ne définie par une fonction car pour une valeur de $x$ donnée on a deux valeurs différentes de $y$. La fonction définie par $y = x^2 + 1$ n'a donc pas de fonction inverse.

### 1.5.5 Domaine d'une fonction

**Définition 1.7.** Le **domaine de définition** d'une fonction $f : A \to B$ est l'ensemble des éléments de $A$ où $f(a)$ est défini. Notation :

$$\mathrm{dom}(f) = \{a \mid f(a) \text{ est défini}\}.$$

Les fonctions qui seront étudiées dans ce cours sont des **fonctions réelles**, c'est-à-dire les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On détermine le domaine d'une fonction réelle définie à l'aide des opérations dites « élémentaires » en utilisant les principes suivants.

$\cancel{(\div 0)}$ Il ne peut y avoir de division par zéro.

$$\frac{A}{B} \text{ est défini} \iff B \neq 0$$

$\cancel{\left(\sqrt{<0}\right)}$ Il ne peut y avoir de racine paire de nombre négatifs.

$$\sqrt{A} \text{ est défini} \iff A \geq 0$$

$\cancel{\left(\log_b(\leq 0)\right)}$ Le logarithme d'un nombre négatif ou nul n'est pas défini (peu importe la base)

$$\log_b(A) \text{ est défini} \iff A > 0$$

**Exemple 1.22.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x-3}$. Le domaine de $f$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ où $f(x)$ est défini. Comme il y a une racine carrée dans la définition de $f$, on a que

$$\begin{aligned} f(x) \text{ def} &\iff \sqrt{2x-3} \text{ def} \\ &\iff 2x-3 \geq 0 \\ &\iff 2x \geq 3 \\ &\iff x \geq 3/2 \end{aligned}$$

On a donc que $f(x)$ est défini pour $x \geq 3/2$. Le domaine est donc

$$\mathrm{dom}(f) = [3/2, \infty[.$$

#### Rappels sur les inégalités

On voit dans l'exemple précédent certaines des conditions données pour déterminer le domaine d'une fonction exige de manipuler des inégalités. Voici un rappel des propriétés importantes permettant de le faire.

**Hypothèse 2.** *Pour tous nombres réels $a, b, c$, on a que*

$$a \leq b \text{ et } b \leq c \implies a \leq c$$
$$a < b \text{ et } b < c \implies a < c$$

*Additionner un constante préserve les inégalités :*

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

$$a < b \implies a + c < b + c$$

*Multiplier par une constante positive préserve les inégalités :*

$$a \leq b \implies ac \leq bc \text{ (si } c > 0\text{)}$$

$$a < b \implies ac < bc \text{ (si } c > 0\text{)}$$

*Multiplier par une constante négative inverse le sens des inégalités :*

$$a \leq b \implies ac \geq bc \text{ (si } c < 0\text{)}$$

$$a < b \implies ac > bc \text{ (si } c < 0\text{)}$$

*Inverser change de sens des inégalités :*

$$a \leq b \implies \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

$$a < b \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

**Remarque 1.6.** Une erreur fréquente consiste à imaginer faussement que certaines fonction préservent les inégalités. Par exemple si

$$4 \leq x^2,$$

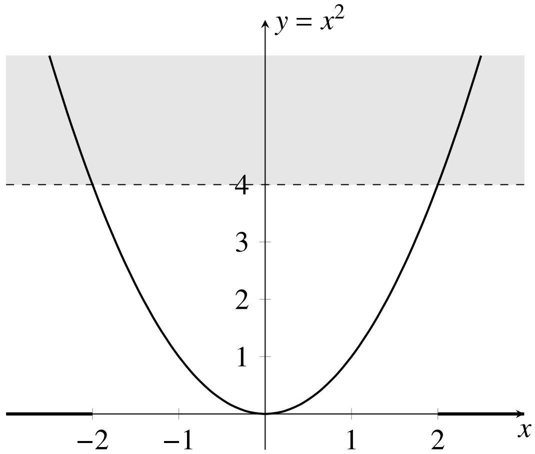
cela n'implique pas que

$$2 \leq x.$$

Autrement dit, la fonction racine carré ne préserve pas les inégalités.

$$a \leq b \not\Longrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

On peut voir pourquoi dans le graphe de $y = x^2$ :




On voit que $x^2 \geq 4$ dans la région en gris dans le graphique précédent. Cela correspond aux valeurs suivantes de $x$ :

$$x \leq -2 \text{ ou } 2 \leq x$$

On peut aussi voir comprendre la situation par la loi des signes.

$$\begin{aligned} 4 \leq x^2 &\iff 0 \leq x^2 - 4 \\ &= \iff 0 \leq (x-2)(x+2) \end{aligned}$$

Pour que $4 \leq x^2$, il faut que le produit de $(x-2)$ par $(x+2)$ soit positif. Il faut donc que ceux deux facteurs soit positif, ou que ces deux facteurs soient négatifs. Dans le premier cas, on a

$$0 \leq x - 2 \iff 2 \leq x \text{ et } 0 \leq x + 2 \iff -2 \leq x$$

Ces deux inégalités sont vraies dès que $2 \leq x$, car si $2 \leq x$, on a automatiquement que $-2 \leq x$.

Dans le second cas, on a

$$x - 2 \leq 0 \iff x \leq 2 \text{ et } x + 2 \leq 0 \iff x \leq -2$$

Ces deux inégalités sont vraies dès que $-22 \leq x$, car si $x \leq -2$, on a automatiquement que $x \leq 2$.

Ainsi, on a que $4 \leq x^2$ dès que $x \leq 2$ ou $x \leq -2$.

**Exemple 1.23.** Trouvons le domaine de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$. La seule opération pouvant limiter le domaine de la fonction est la racine carrée.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 4x - 5} \text{ est défini } &\iff x^2 - 4x - 5 \geq 0 \\ &\iff (x-5)(x+1) \geq 0 \end{aligned}$$

Le produit $(x-5)(x+1)$ est positif si ses deux facteurs sont de même signe. On doit donc traiter des deux cas.

Si les deux facteurs sont positifs, on a

$$x-5 \geq 0 \text{ et } x+1 \geq 0.$$

Dans ce cas, $x \geq 5$ et $x \geq -1$. Les deux conditions sont satisfaites quand $x \geq 5$.

Si les deux facteurs sont négatifs ou nuls, on a

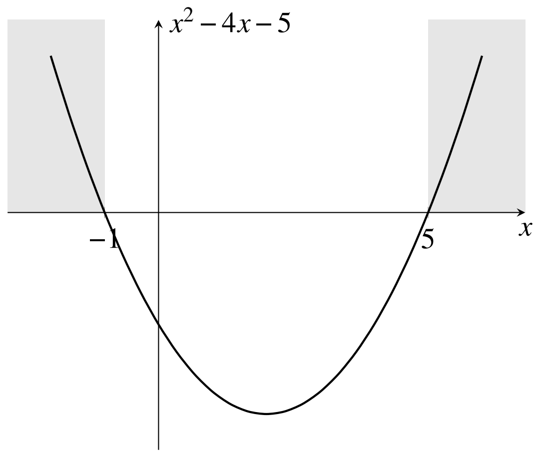
$$x-5 \leq 0 \text{ et } x+1 \leq 0.$$

Dans ce cas, $x \leq 5$ et $x \leq -1$. Les deux conditions sont satisfaites quand $x \leq -l$.

La racine $\sqrt{x^2-4x-5}$ est donc définie quand $x \leq -1$ ou $5 \leq x$. On a donc que

$$\text{dom}(f) = ]-\infty, -1] \cup ]5, \infty[.$$

On peut aussi déterminer la région où $x^2-4x-5 \geq 0$ l'aide du graphe de $y = x^2-4x-5 = (x+1)(x-5)$. (On peut faire une esquisse de cette fonction rapidement car on connait ses deux zéros grâce à la forme factorisée et on connait l'orientation de la parabole par le coefficient de $x^2$ est positif.




Ce graphe permet de déterminer que $x^2-4x-5 \geq 0$ si

$$x \in ]-\infty, -1] \cup ]5, \infty[.$$

**Domaine de fonctions plus complexes**

On détermine le domaine d'une fonction définie par composition de plusieurs fonction élémentaires en vérifiant que chacune des opérations utilisée est définie.

**Exemple 1.24.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x-1}}$. Le domaine de $f$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ où $f(x)$ est défini. Comme il y a une racine carrée dans la définition de $f$, on a que

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} \text{ def} &\iff x-1 \geq 0 \\ &\iff x \geq 1 \end{aligned}$$

On a donc que pour que $f(x)$ soit défini, il faut que $x \geq 1$.

Il y a une seconde opération problématique, la division.

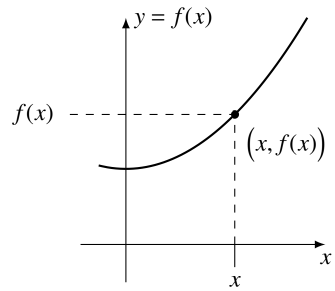
$$\begin{aligned}\frac{3x}{\sqrt{x-1}} \text{ est défini } &\iff \sqrt{x-1} \neq 0 \\ &\iff x-1 \neq 0 \\ &\iff x \neq 1\end{aligned}$$

La fonction est donc définie quand $x \geq 1$ et $x \neq 1$. En combinant ces deux condition, on a donc

$$\mathrm{dom}(f) = ]1, \infty[.$$

**Graphe d'une relation ou d'une fonction**

Le graphe d'une fonction $f$ est l'ensemble des « points » $(x, f(x))$. Dans le cas des fonctions réelles, ces points peuvent être placés dans le plan cartésien pour obtenir une représentation graphique de $f$. Par exemple, si $f(x) = x^2 + 1$, on obtient




On peut déterminer les coordonnées exacte d'un point du graphe d'une fonction en évaluant la fonction. Par exemple, si $f(x) = x^2 + 1$, le point

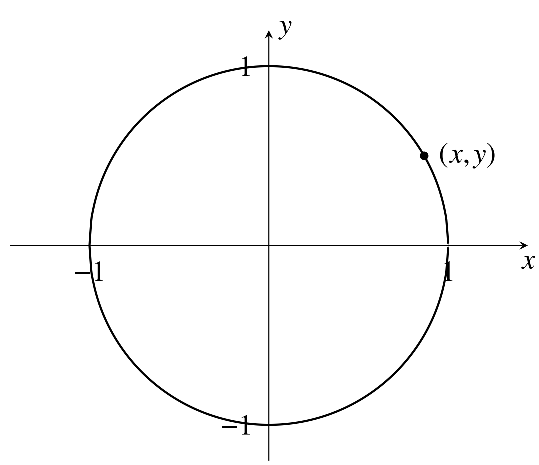
$$(1, f(1)) = (1, 2)$$

fait partie du graphe de la fonction.

On peut aussi faire le graphe d'une relation qui n'est pas nécessairement une fonction. Dans ce cas, le graphe est l'ensemble de tous les points satisfaisant la relation donnée. Par exemple, la relation

$$x^2 + y^2 = 1$$

est constituée de tous les points sur le cercle unité :



On peut trouver un point sur le graphe d'une relation en donnant une valeur à une variable et en isolant pour trouver la valeur de l'autre variable.

**Exemple 1.25.** Trouvons un point sur le graphe de la relation

$$2x^2 + 3y^2 = 1.$$

Si on prend $x = 0$, on obtient

$$2(0)^2 + 3y^2 = 1.$$

En simplifiant

$$3y^2 = 1.$$

On isole $y$ :

$$y^2 = \frac{1}{3}.$$

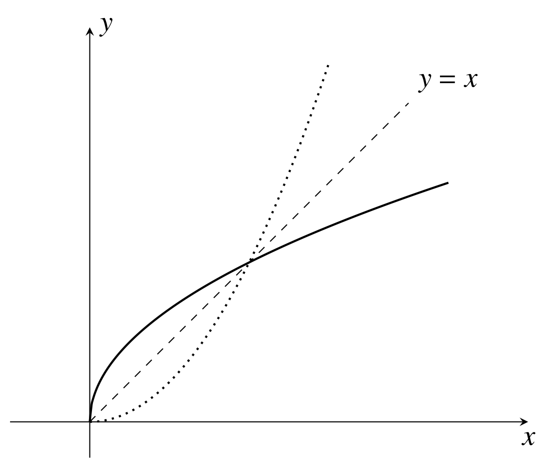
$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Il y a donc deux points correspondant à $x = 0$ sur le graphe de la relation donnée :

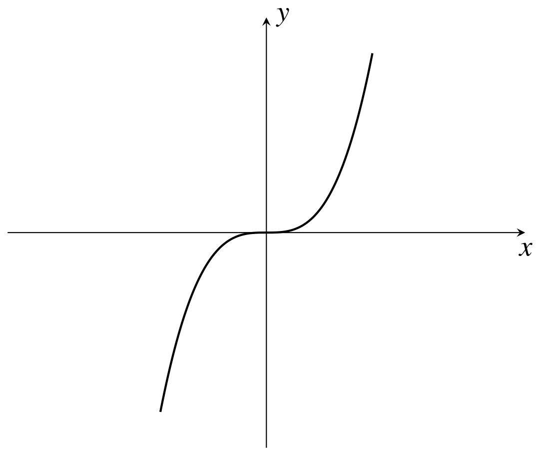
$$\left(0, 1/\sqrt{3}\right) \text{ et } \left(0, -1/\sqrt{3}\right).$$

**Graphe d'une fonction réciproque**

Si $f^{-1}$ est la fonction inverse de $f$, sont graphe est le résultat de la symétrie par rapport à la droite $y = x$ dans le plan cartésien.




**Exemple 1.26.** Le graphe de la fonction $f(x) = x^3$ est




La fonction inverse de $f(x) = x^3$ est $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$. On trouve le graphe de $f^{-1}$ par symétrie par rapport à la droite $y = x$.