Chapitre 2

Taux de variation, différentielles et dérivées

2.1 Taux de variation moyen

Définition 2.1. Soit f une fonction réelle. Si x varie de a à b, on note par Δx la **variation en** x :

$$\Delta x = b - a$$

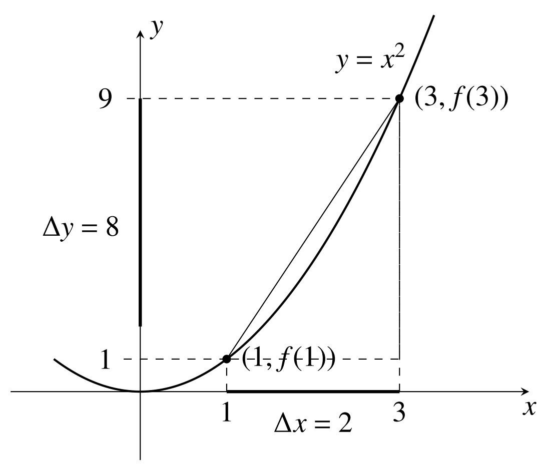
La **variation en** y correspondant à cette variation en x sur l'intervalle $[a,b]$ est définie par

$$\Delta y = f(b) - f(a).$$

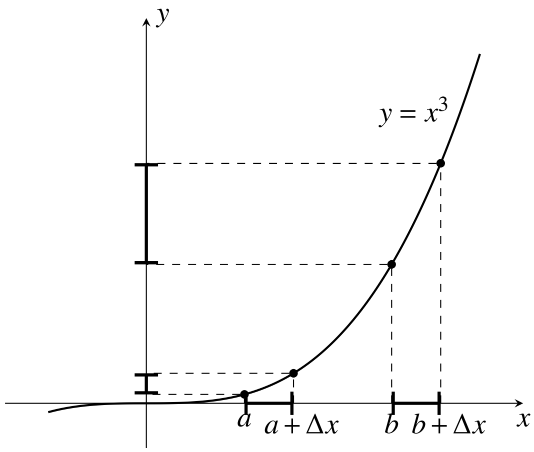
Si on connait a et Δx plutôt que a et b, comme $\Delta x = b - a$ est équivalant à $b = a + \Delta x$, on peut aussi calculer la variation en y comme ceci :

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Exemple 2.1. Si $y = x^2$, alors

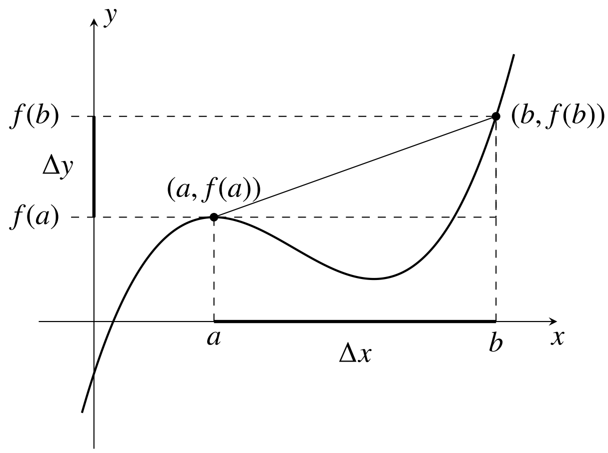


Il faut garder en tête que pour une variation en x Δx fixée, Δy dépend de la valeur choisie pour $x = a$. Dans le graphe suivant, Δx est le même pour l'intervalle commençant à a que pour celui commencent à b. On voit cependant que le Δy correspondant à chacun est différent.



Définition 2.2. Le taux de variation moyen de $y = f(x)$ pour x allant de $x = a$ jusqu'à $b = a + \Delta x$ est défini par

$$\mathrm{TVM}_{[a,a+\Delta x]} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$



Définition 2.3. Le **taux de variation moyen** (TVM) d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ est défini par

$$\mathrm{TVM}_{[a,b]}(f) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Le TVM est le changement moyen de la valeur de la fonction f quand son argument passe de a à b (ou de a à $a + \Delta x$).

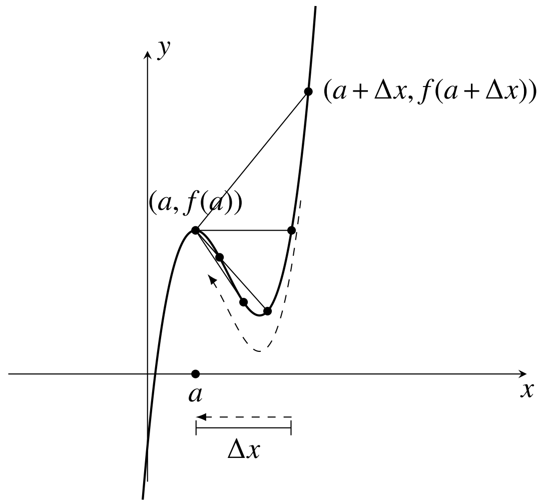
Dans le cas où la fonction donne une distance parcourue en fonction du temps (que nous dénoterons par $x(t)$), alors le TVM est la **vitesse moyenne** sur le parcours entre $t = a$ et $t = b$.

$$\text{La vitesse moyenne entre } t = a \text{ et } t = b \text{ est } \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

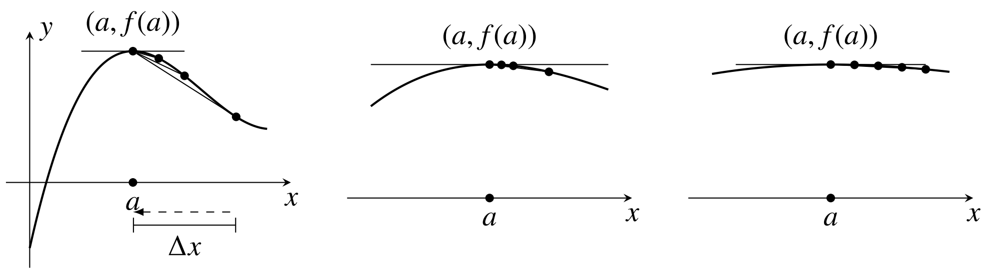
2.2 Taux de variation instantané

Le **taux de variation instantané** (TVI) de la fonction f en $x = a$ est le taux de variation obtenu à partir du taux de variation moyen quand Δx devient très petit (ont dit que Δx est « **infinitésimal**. »). Le taux de variation instantané représente le taux de changement de la fonction f à un point donné.

$$\mathrm{TVI}_a(f) = \frac{dy}{dx} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \text{où } \Delta x \text{ très petit}$$



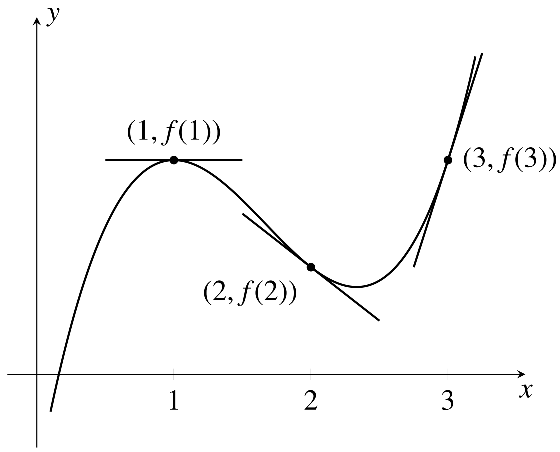
Quand Δx devient de plus en plus petit, le point $(a+\Delta x, f(a+\Delta x)$ se rapproche du point $(a, f(a))$. Les sécantes passant par ces deux points sont de plus en plus similaire à la tangente au graphe au point $(a, f(a))$.



Ultimement (c'est à dire quand Δx devient « infiniment petit »), les segments sécants et la courbe elle même se confondent.

> **Définition 2.4.** Le taux de variation instantané de la fonction $y = f(x)$ en $x = a$ est la pente de la tangente au point $(a, f(a))$ au graphe de $f(x)$ (si cette tangente existe).
>
> Si $y = f(x)$, on note le taux de variation instantané en $x = a$ par
>
> $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \text{ ou } \mathrm{TVI}_a(f)$$

Le taux de variation instantané varie d'un point à l'autre du graphe d'une fonction, comme on peut le voir dans le graphe suivant où la pente de la tangente n'est pas la même en $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$.



On peut aussi remarquer dans ce dernier exemple que la pente de la tangente est liée à la croissance de la fonction : elle est positive là où la fonction est croissante (en $x = 3$), négative là où la fonction est décroissante (en $x = 2$). Elle est nulle (tangente horizontale) quand il y a un maximum (ou un minimum), comme en $x = 1$.

Une interprétation physique permet de se faire une intuition de la signification de $\frac{dy}{dx}$: la vitesse. La vitesse moyenne dans un parcours est le rapport de la distance parcourue Δx sur le temps de parcours Δt. La vitesse instantanée est la vitesse à un instant donnée (celle des indicateurs de vitesse dans les voitures !). La vitesse instantanée est le rapport de la distance parcourue parcourue dx pendant un temps infinitésimal dt.

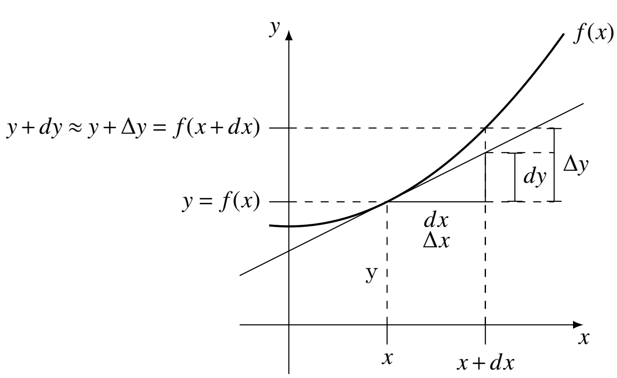
$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \qquad \text{Vitesse instantanée} = \frac{dx}{dt}$$

2.3 Différentielles

On vient de définir le taux de variation instantané en $x = a$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

comme étant la pente de la tangente au point $(a, f(a))$. Voyons comment on peut calculer ce taux pour une fonction $y = f(x)$.



Quand Δx est très petit, on peut approximer l'accroissement Δy sur le graphe de la fonction par l'accroissement dy sur la droite tangente. Comme la pente de la tangente est $\frac{dy}{dx}$, si Δx est très petit on a que

$$\Delta y \approx dy,$$

c'est à dire que

$$dy \approx f(x+\Delta x) - f(x).$$

Proposition 2.1. Si y est une fonction de x, $y = f(x)$, alors la différentielle en y est

$$dy \approx f(x+dx) - f(x)$$

quand dx est très petit.

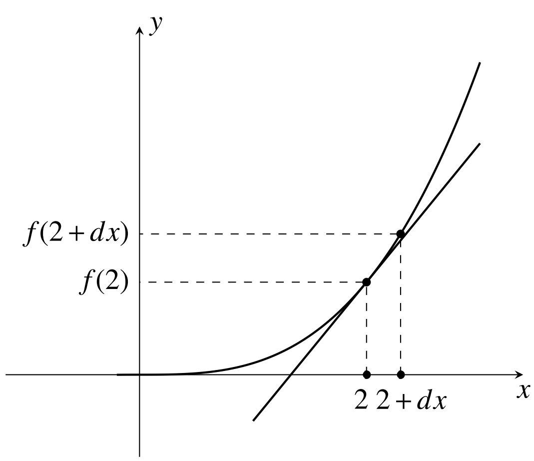
Définition 2.5. Le **taux de variation instantané** de la fonction $y = f(x)$ en $x = a$ est

$$\mathrm{TVI}_a(f) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(a+dx)-f(a)}{dx}$$

Exemple 2.2. Calculons la pente de la tangente à la fonction définie par

$$y = f(x) = x^3$$

en $x = 2$.



$$\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} & \frac{f(2+dx)-f(2)}{dx} \\
&= \frac{(2+dx)^3-(2)^3}{dx} \\
&= \frac{\left(2^3+(3)2^2dx+(3)(2)dx^2+dx^3\right)-2^3}{dx} \\
&= \frac{12\,dx+6\,dx^2+dx^3}{dx} \\
&= \frac{dx\left(12+6\,dx+dx^2\right)}{dx} \\
&= 12+6\,dx+dx^2 \\
&\approx 12 \qquad \text{(quand } dx \text{ très petit).}
\end{aligned}$$

La pente de la tangente au graphe de la fonction $y = x^3$ en $x = 2$ est 12.

De manière générale, pour calculer la pente de la tangente à partir de la définition du taux de variation moyen $\frac{dy}{dx}$, nous devons

1. Écrire la définition de $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ et évaluer correctement dy, donc $f(a+dx) - f(a)$. Faire une esquisse peut aider à se souvenir de la définition !
2. manipuler algébriquement le numérateur pour y factoriser dx ; trois trucs selon l'expression :

   Polynômes : développer et factoriser ;

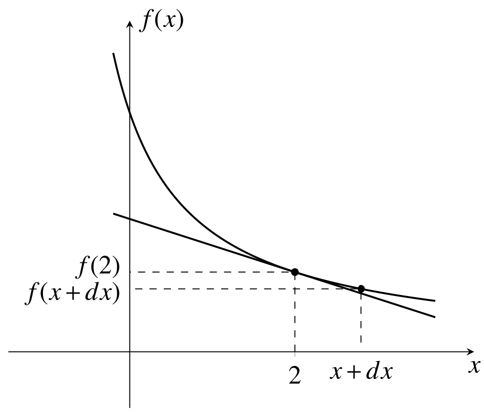
   Fractions : mettre au dénominateur commun ;

   Racines : conjugué.
3. simplifier le dx mis en évidence au numérateur avec le dx du dénominateur ;
4. négliger toutes les occurrences de dx restantes dans l'expression obtenue après la dernière simplification.

Exemple 2.3. Calculons la pente de la tangente à la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

en $x = 2$ et donnons l'équation de la droite tangente en $x = 2$.



$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(2+dx)-f(2)}{dx} \\
&= \frac{\frac{1}{(2+dx)+1}-\frac{1}{2+1}}{dx} \\
&= \frac{\frac{1}{3+dx}-\frac{1}{3}}{dx} \\
&= \frac{\frac{3}{3(3+dx)}-\frac{3+dx}{3(3+dx)}}{dx} \\
&= \frac{\frac{3-(3+dx)}{3(3+dx)}}{dx} \\
&= \frac{\frac{-dx}{3(3+dx)}}{dx} \\
&= \frac{-dx}{3(3+dx)dx} \\
&= \frac{-1}{3(3+dx)} \\
&\approx -\frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

La droite tangente en $x=2$ est donc de pente $-\frac{1}{9}$. Son équation est de la forme

$$y=-\frac{x}{9}+b.$$

Pour déterminer b on prend un point sur la droite. On sait que la droite est tangente au point $\big(2, f(2)\big)$, c'est à dire au point $(2, \frac{1}{3})$. On doit donc avoir

$$\frac{1}{3}=-\frac{2}{9}+b.$$

En isolant, on trouve que

$$b=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}.$$

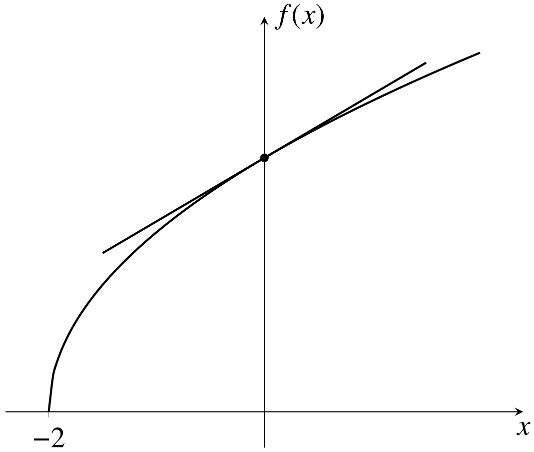
L'équation de la tangente est donc

$$y=-\frac{x}{9}+\frac{5}{9}.$$

Exemple 2.4. Calculons la pente de la tangente à la fonction définie par

$$f(x)=\sqrt{x+2}$$

en $x=0$ et donnons l'équation de la droite tangente en $x=0$.



$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} &\overset{\text{def}}{=} \frac{f(0+dx)-f(0)}{dx}\\
&= \frac{\sqrt{(0+dx)+2}-\sqrt{0+2}}{dx}\\
&= \frac{\sqrt{dx+2}-\sqrt{2}}{dx}\\
&= \frac{\sqrt{dx+2}-\sqrt{2}}{dx}\,\frac{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}}\\
&= \frac{(dx+2)-2}{dx}\,\frac{1}{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}}\\
&= \frac{dx}{dx}\,\frac{1}{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}}\\
&\approx \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

La droite tangente en $x=0$ est donc de pente $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Son équation est de la forme

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}} + b.$$

Pour déterminer b on prend un point sur la droite. On sait que la droite est tangente au point $(0, f(0)$, c'est à dire au point $(0, \sqrt{2})$. On doit donc avoir

$$\sqrt{2} = 0 + b.$$

En isolant, on trouve que

$$b = \sqrt{2}.$$

L'équation de la tangente est donc

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2}.$$

2.4 Différentielles et approximation

Supposons que l'on a une fonction $y = f(x)$. On a vu que l'on peut approximer les valeurs de la fonction à l'aide des différentielles pour des valeurs proches d'une valeur donnée en approximant la fonction par la droite tangente.

On peut se servir de cette approximation pour simplifier certains calculs. L'idée générale est d'utiliser

$$dy = f(x+dx) - f(x)$$

et le fait que

$$dy = \frac{dy}{dx}dx.$$

Par exemple, si $y = \sqrt{x}$, on peut vérifier que

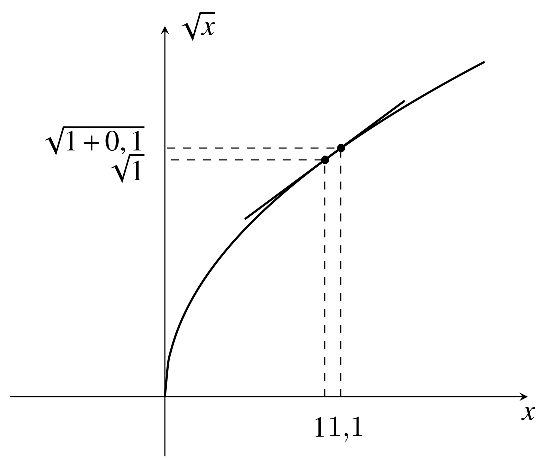
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

Comme

$$dy = f(x+dx) - f(x)$$

et $dy = \frac{dy}{dx}dx$, on a que

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{dy}{dx}dx.$$



Si on veut calculer $\sqrt{1,1}$, on décompose $1,1$ en $1+0,1$ et on pose $x=1$ et $dx = 0,1$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+dx} &\approx \sqrt{x} + \frac{dy}{dx}dx \\
\sqrt{1,1} &\approx \sqrt{1} + \frac{1}{2}(0,1) \\
\sqrt{1,1} &\approx 1 + \frac{0,1}{2} \\
\sqrt{1,1} &\approx 1 + 0,05 \\
\sqrt{1,1} &\approx 1,05.
\end{aligned}$$

La valeur trouvée est à moins d'un centième de la valeur

$$\sqrt{1,1} = 1.048808\ldots$$

Cette approximation n'est pas exacte, mais peut donner des valeurs avec une précision satisfaisante sans exiger de calculs complexes : il suffit d'utiliser la formule

$$\sqrt{1+dx} \approx 1 + \frac{dx}{2}$$

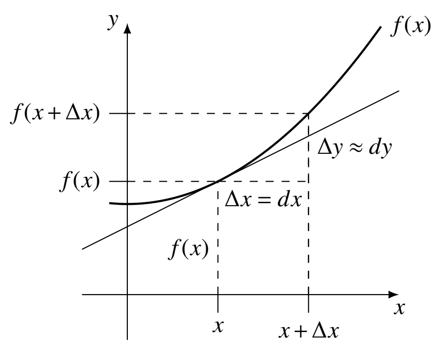
qui est une bonne approximation tant que dx est petit, donc pour des valeurs $x+dx$ proches de 1.

2.5 Dérivée

Comme la pente de la tangente au graphe d'une fonction f donne beaucoup d'information sur le comportement de la fonction et qu'elle varie d'un point à l'autre, il est utile de la considérer comme une nouvelle fonction *dérivée* de la fonction initiale. Cette fonction dérivée associe à chaque valeur de x dans le domaine de f la pente de la tangente au graphe de f au point $\big(x, f(x)\big)$.

Définition 2.6. La **fonction dérivée** f' d'une fonction $y = f(x)$ est définie par

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \mathrm{TVI}_x(f).$$



On détermine la fonction dérivée de la même manière que la dérivée en un point, mais en laissant la coordonnée en x indéterminée.

Exemple 2.5. Si $f(x) = x^3$, alors

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \\ &= \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx} \\ &= \frac{(x^3+3x^2dx+3xdx^2+dx^3)-x^3}{dx} \\ &= \frac{3x^2dx+3xdx^2+dx^3}{dx} \\ &= \frac{(3x^2+3xdx+dx^2)dx}{dx} \\ &= 3x^2+3xdx+dx^2 \\ &\approx 3x^2\end{aligned}$$

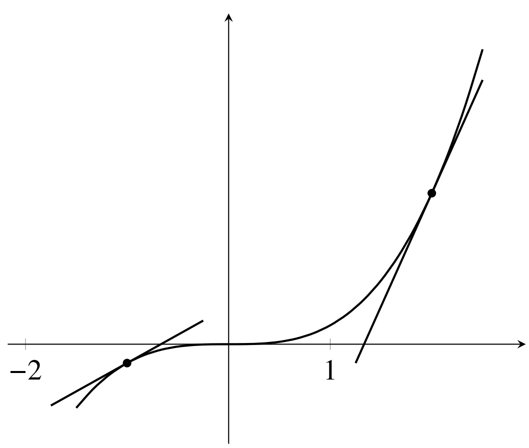
On a donc que la dérivée est $f'(x) = 3x^2$.

À l'aide de la fonction dérivée, on peut par exemple déterminer la pente de la tangente à f en un point quelconque $(x, f(x))$ du graphe de f en évaluant $f'(x)$. Par exemple, si $x = 2$, la pente de la tangente est

$$f'(2) = 3(2)^2 = 24.$$

Si $x = -1$, la pente de la tangente est

$$f'(-1) = 3(-1)^2 = 3.$$



On peut aussi chercher les valeurs de x où la pente a une valeur spécifique. Par exemple, sachant que $y' = 3x^2$ quand $y = x^3$, on peut trouver où la tangente est horizontale en posant que la dérivée (qui est la pente de la tangent) est nulle. Dans le dernier exemple, cela est le cas quand

$$y' = 0 \iff 3x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Exemple 2.6. Si $f(x) = \sqrt{x+1}$, la dérivée y' est

$$\begin{aligned}
f'(x) &\overset{\text{def}}{=} \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{(x+dx)x+1}-\sqrt{x+1}}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{x+dx+1}-\sqrt{x+1}}{dx} \cdot \frac{\sqrt{x+dx+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+dx+1}-\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{(x+dx+1)-(x+1)}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+dx+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{dx}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+dx+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+dx+1}+\sqrt{x+1}} \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}
\end{aligned}$$

La dérivée de $\sqrt{x+1}$ est donc $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

La fonction dérivée f' est la fonction qui associe à chaque valeur de x le taux de variation instantané de f en x, soit la pente de la tangente en $\big(x, f(x)\big)$:

$$f'(x) = \mathrm{TVI}_x(f) = \frac{dy}{dx}$$

Les notations $f'(x)$, $\mathrm{TVI}_x(f)$ et $\frac{dy}{dx}$ sont donc interchangeables. Cependant, la première met l'accent sur le fait que la nouvelle fonction f' est déterminée à partir de la fonction originale f. Cette fonction est le plus souvent appelée simplement *la dérivée de f*.

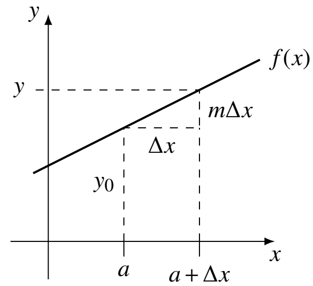
L'opération « ' » (dérivée) est en fait elle même une sorte de fonction, mais qui prend une fonction comme argument et qui donne une nouvelle fonction :

$$\text{dérivée}: \text{fonctions réelles} \to \text{fonctions réelles}.$$

La dérivée est une « fonction de fonction ».

2.6 Droite tangente et approximation d'une fonction

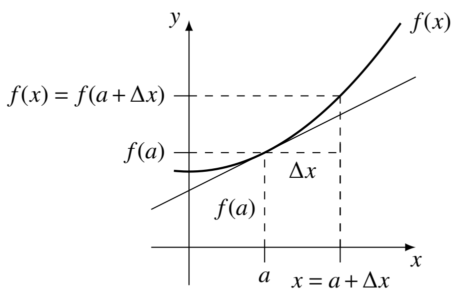
Si une droite est de pente m, une augmentation de Δx de la valeur de x augmentera la valeur de y de $m\Delta x$.



On a donc que $y = y_0 + m\Delta x$. Si $x = a + \Delta x$, on a que $\Delta x = x - a$ et donc

$$y = f(a) + m(x - a).$$

On peut se servir de cette relation pour obtenir une approximation linéaire de d'une fonction générale à l'aide de l'équation de la droite tangente.



Dans ce dernier graphique, la pente de la tangente au point $\big(a, f(a)\big)$ est, par définition, la valeur $f'(a)$, soit la dérivée évaluée en $x = a$. En remplacent les paramètres de la relation $y = f(a) + m(x - a)$ par ceux de la droite tangente du dernier graphique, l'équation de la droite tangente en $(x, f(x))$ (où y est fonction de Δx) est

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Ainsi, si on considère que y sur la droite tangente est une bonne approximation de y sur le graphe de la fonction f, on peut faire l'approximation suivante de $f(x)$

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x.$$

Exemple 2.7. On a vu précédemment que la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ est $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Cela nous donne les approximations suivantes par des droites, respectivement valables pour des valeurs de x près de 1 et 4.

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x - 1) = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(x - 1) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$$

$$f(x) \approx f(4) + f'(4)(x - 4) = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(x - 1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

2.7 Notations

La dérivée est un concept très important en mathématiques. Les concepts importants ont souvent été étudiés par plusieurs mathématiciens et parfois plusieurs notations sont inventées et utilisées au fil du temps.

Si $y = f(x) = x^2$, toutes ces notations désignent la même chose :

$$f'(x) = \text{TVI}_x(f) = \frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = (x^2)'.$$

Notation différentielle avec $y = f(x) = x^2$:

$$dy = y'dx = f'(x)dx = 2x dx.$$

La dérivée a été étudiée de manière détaillée pour la première fois par Newton et Leibniz, de manière indépendante et simultanée. Nous utilisons encore aujourd'hui les notations différentes inventées et utilisées par Newton ($\dot{y}$) et Leibniz ($\frac{dy}{dx}$), mais aussi celles introduites plus tard par d'autres mathématiciens ayant développé la théorie des dérivées, notamment celle d'Euler ($f'(x)$).

Voici les différentes notations pour la dérivée de $y = f(x) = x^2$.

Notations pour la dérivée					
$f'(x)$	y'	$\left(x^2\right)'$	$\dfrac{dy}{dx}$	$\dfrac{df(x)}{dx}$	$\dfrac{dx^2}{dx}$
$f'(a)$	$y'\big\|_{x=a}$	$\left(x^2\right)'\Big\|_{x=a}$	$\dfrac{dy}{dx}\Big\|_{x=a}$	$\dfrac{df(x)}{dx}\Big\|_{x=a}$	$\dfrac{dx^2}{dx}\Big\|_{x=a}$

La notation « $\dfrac{dy}{dx}$ » est celle introduite par Leibniz. Les notations de Newton ne sont plus aussi utilisées que celles de Leibniz. Newton écrivait $\dot{x}$ là où Leibniz écrivait $\frac{dx}{dy}$.

On peut penser à la notation $\dfrac{dy}{dx}$ comme une forme de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ avec Δx « infiniment petit ».

La notation « barre » veut dire « évalué en $x = \ldots$ ». Elle peut s'utiliser dans différents contextes autre que celui du calcul de dérivées. Par exemple, on peut écrire

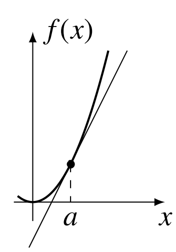
$$x^2\Big|_{x=3} = 9.$$

Cette notation est utilisée dans plusieurs contextes en calcul différentiel et intégral. Dans ce cours, elle servira le plus souvent à évaluer la dérivée en un point, comme dans la seconde ligne du tableau précédant.

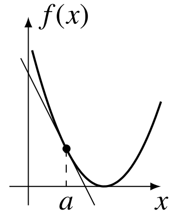
2.8 Graphique des fonctions dérivées

On peut faire le lien entre le graphe d'une fonction f et celui de sa dérivée f' à l'aide des observations suivantes, que nous motivons géométriquement pour le moment ; nous verront plus loin des résultats précisant ces liens.

- Si $f'(a) > 0$, alors f est croissante en $x = a$.

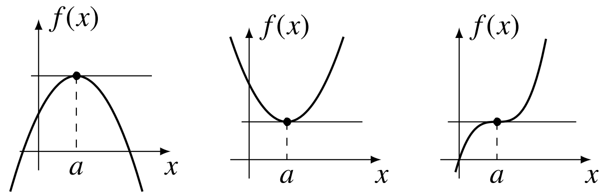


- Si $f'(a) < 0$, alors f est décroissante en $x = a$.



- Si $f'(a) = 0$, alors le graphe de $f(x)$ a un point où la tangente est horizontale (de pente zéro) : un minimum, un maximum ou un point « stationnaire ».

Maximum Minimum Stationnaire



À un sommet (minimum ou maximum) du graphe d'une fonction, la dérivée s'annule car la tangente est horizontale (donc de pente 0). On peut donc trouver les sommets d'une fonction en cherchant les valeurs a où

$$f'(a) = 0.$$

Exemple 2.8. Trouvons le sommet de la parabole d'équation $y = x^2 + 3x - 5$.

À l'aide des techniques vu précédemment, on détermine la fonction dérivée à y. Si $y = f(x) = x^2 + 3x - 5$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\
&= \frac{\Big((x+dx)^2 + 3(x+dx) - 5\Big) - (x^2 + 3x - 5)}{dx} \\
&= \frac{\Big(x^2 + 2xdx + dx^2 + 3x + 3dx - 5\Big) - (x^2 + 3x - 5)}{dx} \\
&= \frac{5xdx + dx^2 + 3dx}{dx} \\
&= \frac{(5x + dx + 3)dx}{dx} \\
&= 5x + dx + 3 \\
&\approx 5x + 3 \qquad \text{si } dx \text{ infinitésimal}
\end{aligned}$$

La pente de la tangente au graphe de y en x est $5x + 3$. Cette pente est nulle quand $5x + 3 = 0$, c'est-à-dire quand $x = -3/5$. La valeur de y en ce point est

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{5}\right) - 5 = \frac{-71}{25}$$

Le sommet de la parabole est donc au point $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{71}{25}\right)$.

Il est possible de trouver le sommet d'une parabole à l'aide de la *complétion de carré* vu dans les cours du secondaire. La technique décrire ici a cependant l'avantage de pouvoir être appliquée à n'importe quelle fonction pour laquelle on peut déterminer la fonction dérivée, alors que la complétion de carré n'est possible que pour une fonction définie à l'aide d'un polynôme de degré 2. De plus, nous verrons dans la suite comment déterminer facilement la fonction dérivée, ce qui rend cette méthode beaucoup plus simple.

2.9 Exemples de fonctions avec leurs dérivées

Les exemples suivants illustrent le lien entre le graphe d'une fonction (à gauche) et celui de sa dérivée (à droite). Pour apprécier ce lien, commencez par repérer les zéros des dérivées et identifiez les maximums ou minimums correspondants dans la fonction. Ensuite, liez le signe de la dérivée et la croissance (ou décroissance !) de la fonction.