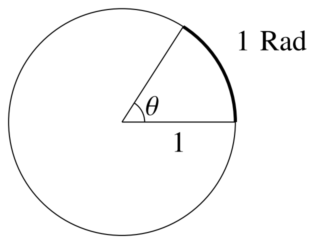
Chapitre 9

Dérivée des fonctions trigonométriques

9.1 Rappels sur les fonctions trigonométriques

9.1.1 Le radian

Le **radian** (Rad) est une mesure d'angle où un angle est mesuré en longueur d'arc sur la circonférence de cercle de rayon 1.



Comme la circonférence d'un cercle de rayon 1 correspond à un arc d'un tour complet, un angle θ de 2π Rad correspond à un angle de 360 degrés ou d'un tour.

$$\frac{\theta \text{ Rad}}{2\pi \text{ Rad}} = \frac{\theta \text{ Deg}}{360 \text{ Deg}} = \frac{\theta \text{ Tour}}{1 \text{ Tour}}$$

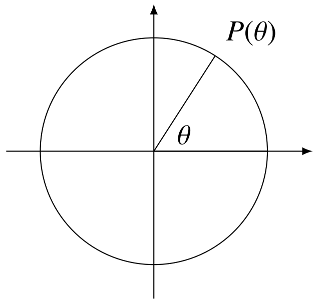
Ces proportions servent à convertir la mesure d'un angle d'une unité à une autre.

Pourquoi le radian ?

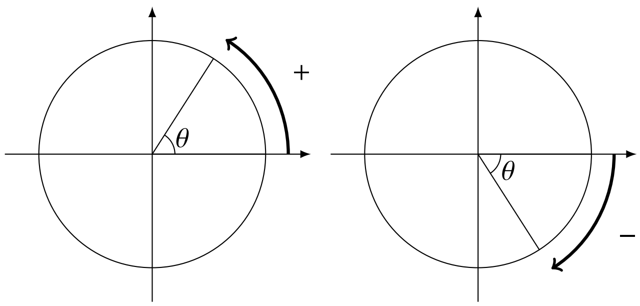
C'est l'unité de mesure d'angle la plus naturelle dans le contexte du calcul différentiel car les formules de dérivations des fonctions trigonométriques s'expriment plus simplement en radian.

9.1.2 Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique permet de représenter les angles de manière standardisée et d'établir des liens entre différentes longueurs déterminée par un angle donné. Le **cercle trigonométrique** est le cercle de rayon 1 centrée à l'origine. Chaque angle θ correspond à un unique point $P(\theta)$ sur le cercle trigonométrique.



Par convention, on mesure les angles dans le cercle trigonométrique à partir d'un angle 0 situé sur l'axe des x positifs. Les angles positifs correspondent aux angles mesurés dans le sens anti-horaire, les angles négatifs correspondent aux angles mesurés dans le sens horaire.

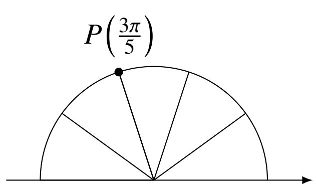


Enfin, bien que ces angles n'aient pas de sens géométrique, on peut considérer des angles de plus d'un tour.

Note 9.1. Il est généralement plus facile de repérer un angle dans le cercle trigonométrique sans faire la conversion à l'aide des proportions précédentes. Il est plus simple de penser en « demi-tours » plutôt qu'en tours. Cela est plus facile que de convertir en degrés. Par exemple, pour situer rapidement un angle de $\frac{3\pi}{5}$ Rad, on le considère comme un multiple de $\frac{\pi}{5}$:

$$\frac{3\pi}{5} = 3\frac{\pi}{5}.$$

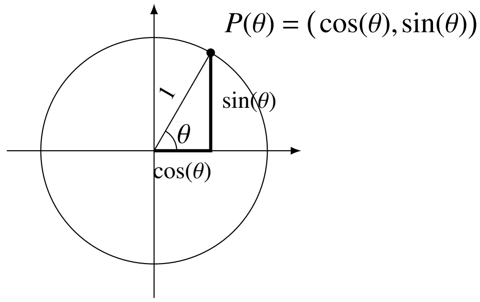
Comme il est facile de diviser le demi-tour π en 5 angles de $\pi/5$, il est simple de situer l'angle de $\frac{3\pi}{5}$.



9.1.3 Les fonctions trigonométriques

Afin de pouvoir définir les fonctions trigonométrique pour tout angle possible $\theta \in \mathbb{R}$, on doit exprimer la définition à l'aide du *cercle trigonométrique.*

> **Définition 9.1.** Les fonctions $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont définies comme les coordonnées en x et en y du point situé sur la circonférence d'un cercle de rayon 1 à l'angle θ.



En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient l'importante identité trigonométrique suivante :

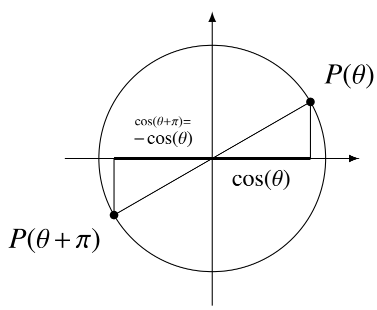
Proposition 9.1.

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

Note 9.2. On utilise ici une convention de notation très répandue : pour simplifier un peu l'écriture, on écrit $\sin^2(x)$ au lieu de $\left(\sin(x)\right)^2$ et $\cos^2(x)$ au lieu de $\left(\cos(x)\right)^2$. On utilisera une convention similaire pour toute les autres fonctions trigonométriques.

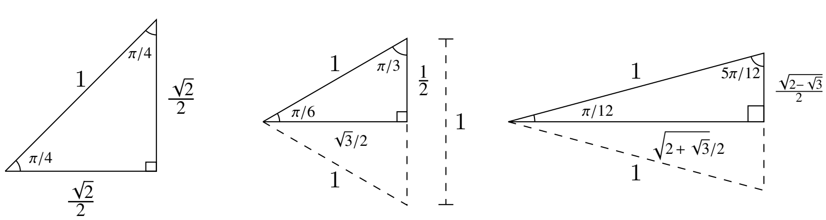
On peut se servir du cercle trigonométrique pour démontrer plusieurs identités trigonométriques importantes.

Exemple 9.1. Démontrons que $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$ à l'aide du cercle trigonométrique. Il suffit de représenter les angles impliqués (ici θ et $-\theta$) et de représenter les longueurs impliquées dans l'identité. L'égalité entre ces longueurs peut ensuite être déduite géométriquement.

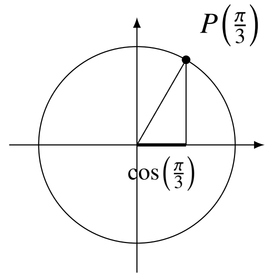


9.1.4 Triangles comportant des angles usuels

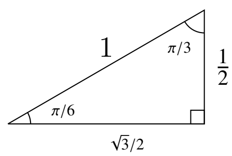
Pour le calcul des valeurs de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$, on utilise les grandeurs des côtés de certains triangles remarquables, pour lesquel il est possible de déterminer les longueurs des côtés géométriquement, à l'aide de la relation de Pythagore, de la loi des cosinus ou d'autres astuces géométriques.



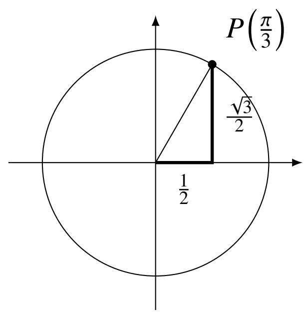
Exemple 9.2. Déterminons $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ à l'aide du cercle trigonométrique. On commence par situer le point $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et son cosinus.



Le triangle impliqué a comme angle à l'origine $\pi/3$ rad. Le triangle usuel comportant cet angle est le suivant.



En replaçant les mesures de ce triangles dans la figure initiale, on a que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

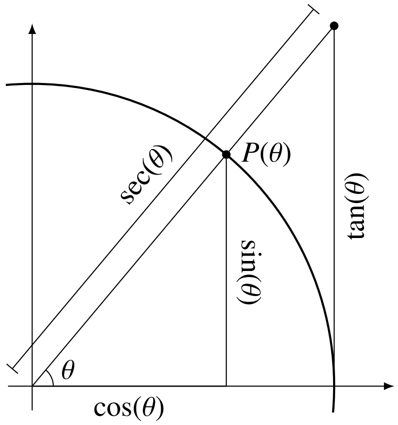


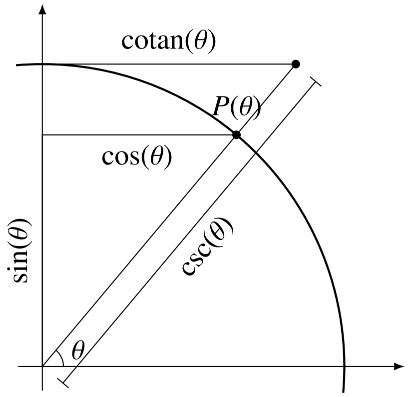
Définition 9.2. Les fonctions trigonométriques tangente, sécante, cosécante et cotangante sont définie à partir des fonctions sinus et cosinus de la manière suivante.

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \qquad \operatorname{cotan}(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\tan(\theta)}$$

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \qquad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

Ces différentes fonctions trigonométriques correspondent aux mesures suivantes.



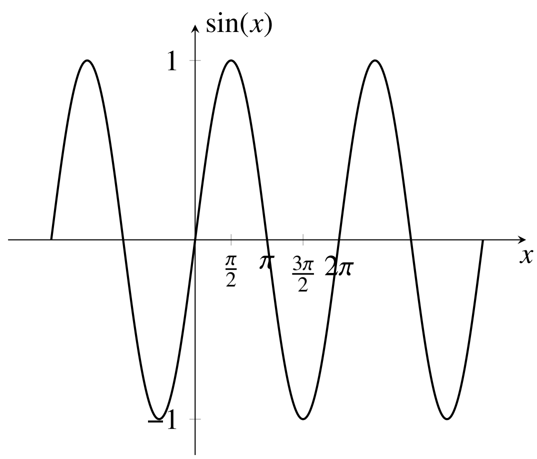


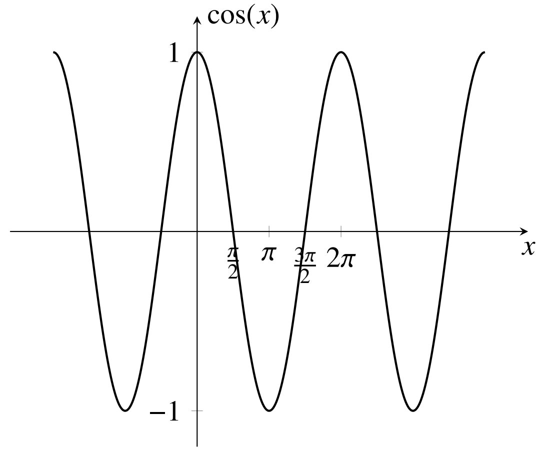
Comme toutes ces fonctions trigonométriques peuvent être exprimées en fonction de sinus et cosinus, on peut déterminer leur valeurs pour différents angles à partir des valeurs de sinus et cosinus.

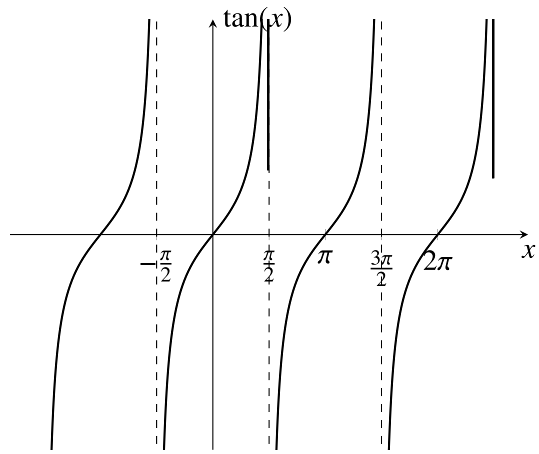
Exemple 9.3.

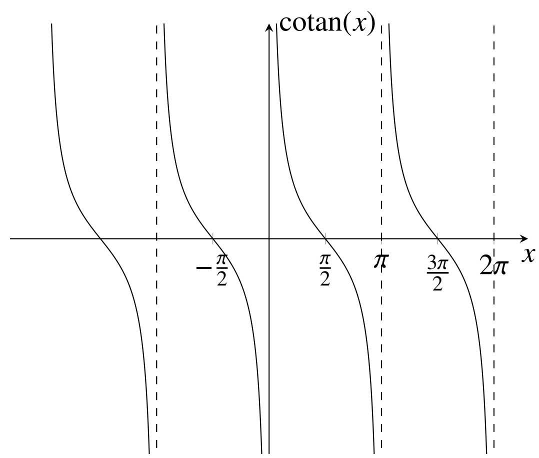
$$\begin{aligned}\sec\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}\\ &= \frac{1}{1/2}\\ &= 2\end{aligned}$$

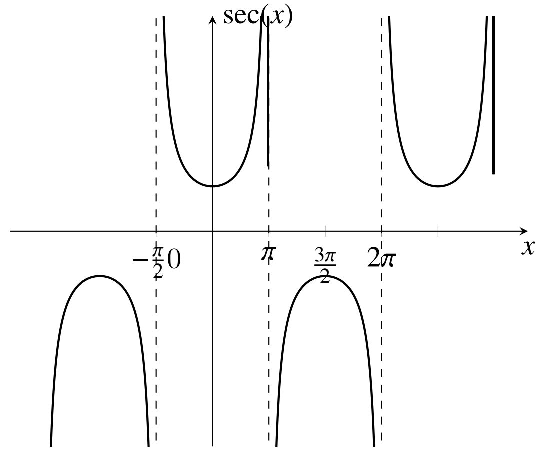
9.2 Graphe des fonctions trigonométriques

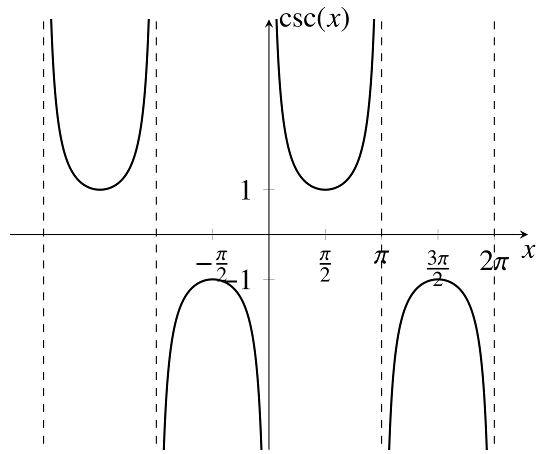



cos(x)
1
−1
π/2
π
3π/2
2π
x


tan(x)
−π/2
π/2
π
3π/2
2π
x


cotan(x)
−π/2
π/2
π
3π/2
2π
x





Comme un angle θ correspond au même point du cercle trigo si on y ajoute un multiple entier de 2π, les valeurs fonctions trigonométriques sont les mêmes si on ajoute un multiple de entier de 2π.

Proposition 9.2. Toutes les fonctions trigonométriques sont périodiques de période 2π, c'est à dire

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta), \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta), \text{ etc.}$$

Les inégalités suivantes sont très utiles pour analyser des fonctions comportant des fonctions trigonométriques dans leurs définitions.

Proposition 9.3.

$$-1 \leq \sin(\theta) \leq 1 \qquad -1 \leq \cos(\theta) \leq 1.$$

9.3 Limites des fonctions trigonométriques

Comme les fonctions trigonométriques sont définies par des constructions géométriques, il est raisonnable de faire l'hypothèse suivante.

Hypothèse 7. *Les fonctions trigonométriques sont continues partout où elles sont définies.*

Cela permet d'évaluer des limites de fonctions trigonométriques par substitution.

Exemple 9.4.

$$\lim_{x\to\pi/3}\sin(x)\overset{\text{cont}}{=}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lim_{x\to 3\pi/4}\tan(x)\overset{\text{cont}}{=}\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2}=-1$$

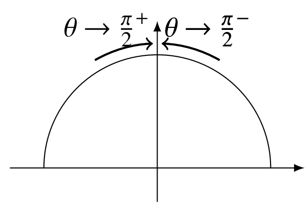
Les limites de fonction trigonométriques quand $x\to\pm\infty$ n'existent pas. À cause de la périodicité des fonctions trigonométriques, leurs valeurs en y ne s'approchent jamais d'une valeur limite.

Proposition 9.4.

$$\lim_{\theta\to\pm\infty}\sin(\theta)\nexists \qquad \lim_{\theta\to\pm\infty}\cos(\theta)\nexists$$

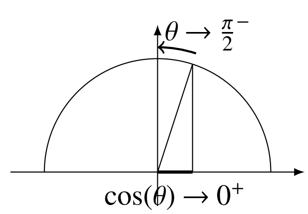
et de même pour toutes les autres fonctions trigonométriques.

Enfin, pour déterminer le comportement des limites à gauche ou à droite impliquant les fonctions trigonométriques, on peut utiliser le cercle trigonométrique. Il faut garder en tête le sens de parcours des angles dans le cercle trigonométrique. Par exemple, voici de quelle manière un angle s'approche de $\frac{\pi}{2}$ par la gauche $\left(\frac{\pi}{2}^-\right)$ et par la droite $\left(\frac{\pi}{2}^+\right)$.



Exemple 9.5.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\sec(x)&=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{1}{\cos(x)}\\&=\frac{1}{\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^-\right)} \qquad \left(\frac{1}{0^+}\text{ ou }\frac{1}{0^-}?\right)\end{aligned}$$



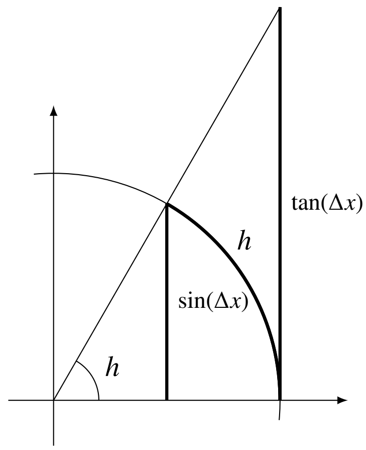
9.4 Dérivée des fonctions trigonométriques

Lemme 9.1.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1.$$

Démonstration. Par définition des fonctions trigonométrique et par les relations géométriques entre les longueurs auxquelles elles correspondent, on a que

$$\sin(\Delta x) \leq \Delta x \leq \tan(\Delta x).$$



En divisant par $\sin(\Delta x)$ on obtient :

$$\frac{\sin(\Delta x)}{\sin(\Delta x)} \leq \frac{\Delta x}{\sin(\Delta x)} \leq \frac{\tan(\Delta x)}{\sin(\Delta x)},$$

Ce qui donne, en simplifiant,

$$1 \leq \frac{\Delta x}{\sin(\Delta x)} \leq \cos(\Delta x).$$

Si on inverse chaque membre de ces inégalités, on trouve que

$$1 \geq \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \geq \frac{1}{\cos(\Delta x)}.$$

En prenant la limite quand $\Delta x \to 0$ des membres de droite et de gauche de la chaine d'inégalité :

$$\lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1 \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cos(\Delta x)} = \frac{1}{\cos(0)} = 1$$

donc, par la propriété des gendarmes (thm du sandwich), le membre central doit avoir la même limite :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1$$

□

Note : ce résultat justifie l'approximation $\sin(x) \approx x$ quand x est petit. Cette approximation est souvent utilisé en physique, par exemple pour obtenir l'importante équation décrivant le mouvement et la propagation des ondes.

Lemme 9.2.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}=0$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}\frac{\cos(\Delta x)+1}{\cos(\Delta x)+1}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos^2(\Delta x)-1}{\Delta x}\frac{1}{\cos(\Delta x)+1}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin^2(\Delta x)}{\Delta x}\frac{1}{\cos(\Delta x)+1}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\frac{-\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x)+1}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x)+1}\\
&= (1)\left(\frac{0}{2}\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Théorème 9.1. La dérivée de la fonction sinus est

$$\big(\sin(x)\big)' = \cos(x).$$

Démonstration. (avec les différentilles) Soit $y=\sin(x)$. On calcule dy :

$$\begin{aligned}
dy &= \sin(x+dx)-\sin(x)\\
&= (\sin(x)\cos(dx)+\sin(dx)\cos(x))-\sin(x)\\
&= \sin(dx)\cos(x)+\sin(x)\cos(dx)-\sin(x)\\
&= \sin(dx)\cos(x)+(\sin(x)\cos(dx)-\sin(x))\\
&= \sin(dx)\cos(x)+\sin(x)(\cos(dx)-1)\\
&\approx (1)\cos(x)+\sin(x)(0)\\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

□

Démonstration. (avec la définition en terme de limites)

$$\begin{aligned}
(\sin(x))' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\sin(x)\cos(\Delta x)+\sin(\Delta x)\cos(x))-\sin(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(\Delta x)\cos(x)+\sin(x)\cos(\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(\Delta x)\cos(x)+(\sin(x)\cos(\Delta x)-\sin(x))}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(\Delta x)\cos(x)}{\Delta x}+\frac{\sin(x)\cos(\Delta x)-\sin(x))}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\cos(x)+\sin(x)\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\cos(x)+\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x)\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}\\
&= (1)\cos(x)+\sin(x)(0)\\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

□

Exemple 9.6. En combinant la formule de dérivation de $\sin(x)$ et la règle de chaine :

$$\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \cos\left(x^2\right)\left(x^2\right)' = 2x\cos\left(x^2\right).$$

En combinant la formule de dérivation de $\sin(x)$ et la règle du quotient :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)' &= \frac{\left(\sin(x)\right)'(x)-\sin(x)(x)'}{x^2}\\
&= \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}.
\end{aligned}$$

9.5 Dérivés des autres fonctions trigonométriques

Les dérivées des autres fonctions trigonométriques sont trouvées en utilisant leur définition, des identités algébriques et les formules de dérivation connues.

Proposition 9.5 (Dérivée des fonctions trigonométriques)**.**

(a) $\left(\cos(x)\right)' = -\sin(x)$

(b) $\left(\tan(x)\right)' = \sec^2(x)$

(c) $\left(\cot(x)\right)' = -\csc^2(x)$

(d) $\left(\sec(x)\right)' = \sec(x)\tan(x)$

(e) $\left(\csc(x)\right)' = -\csc(x)\cot(x)$

Démonstration. Preuve de (a). On utilise les identités $\cos(\theta) = \sin(\theta+\pi/2)$ et $-\sin(\theta) =$

$\cos(\theta + \pi/2)$.

$$
\begin{aligned}
\Big(\cos(x)\Big)' &= \Big(\sin(x+\pi/2)\Big)' \\
&= \cos(x+\pi/2)(x+\pi/2)' \\
&= \cos(x+\pi/2) \\
&= \cos(x+\pi/2) \\
&= -\sin(x)
\end{aligned}
$$

Preuve de (b). On utilise la définition de $\tan(x)$ en terme de $\sin(x)$ et $\cos(x)$, ainsi que l'identité $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$.

$$
\begin{aligned}
\Big(\tan(x)\Big)' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\
&= \frac{\Big(\sin(x)\Big)'\cos(x) - \sin(x)\Big(\cos(x)\Big)'}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} \\
&= \sec^2(x)
\end{aligned}
$$

Les preuves des formules de dérivations de $\sec(x)$, $\csc(x)$ et $\mathrm{cotan}(x)$ sont similaires et sont laissées en exercice. □

Exemple 9.7.

$$\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\left(\sec\left(x^2\right)\right)' = \sec\left(x^2\right)\tan\left(x^2\right)\left(x^2\right)' = 2x\sec\left(x^2\right)\tan\left(x^2\right)$$

Remarque 9.1. Dans ce dernier exemple, la fonction « à l'intérieur » de sec est substituée à deux endroits, dans tan et dans sec. C'est ce que la règle de chaine dit. En effet la règle de chaine pour des fonctions quelconques est

$$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x))g'(x)$$

Dans le cas de $\sec\left(x^2\right)$, $f(x) = \sec(x)$ et $g(x) = x^2$. Comme $f'(x) = \sec(x)\tan(x)$, on a que

$$f'(g(x)) = f'(x^2) = \sec\left(x^2\right)\tan\left(x^2\right)$$

Les dérivées de sécante et cosécantes sont les seules dérivées que nous avons vu pour lesquelles l'argument de la fonction x apparait à plusieurs endroits dans la formule de dérivation et où il faut faire attention en applicant la règle de chaine.