

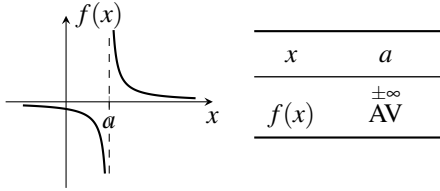
Résumé analyse de fonctions

Asymptotes

Asymptotes verticales (AV)

La fonction f a une AV en $x = a$ si

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty.$$



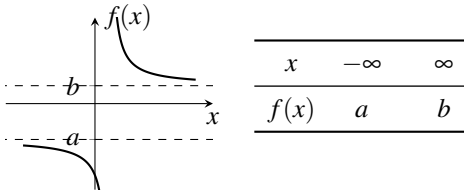
Pour les fonctions algébriques, on trouve les AV pour les valeurs de x où il y a division par 0.

Asymptotes horizontales (AH)

La droite $y = C$ est une AH de f si

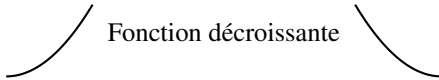
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = C.$$

Il y a 0, 1 ou 2 AH pour une fonction donnée.



Dérivée et croissance

Fonction croissante



Fonction décroissante



Lien entre dérivée première et croissance

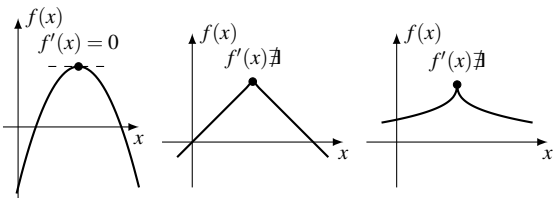
- Si $f'(x) \geq 0$ sur $[a,b]$, alors $f(x)$ croissante sur $[a,b]$



- Si $f'(x) \leq 0$ sur $[a,b]$, alors $f(x)$ décroissante sur $[a,b]$



Thm de Fermat généralisé Si $f(x)$ a un minimum ou un maximum en $x = a$, alors $f'(a) = 0$ ou $f'(a) \nexists$.



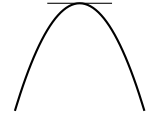
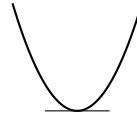
Les **valeurs critiques** de f sont les valeurs $x = a$ où $f'(a) = 0$ ou $f'(a) \nexists$.

Test de la dérivée première

Si a est une valeur critique de f , alors $f(a)$ est un extrémum local si $f'(x)$ change de signe en $x = a$.

$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	MIN	\nearrow

$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	\nearrow	MAX	\searrow



Points stationnaires.

$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	STA	\nearrow

$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	\searrow	STA	\searrow



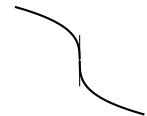
Tangente verticales (TV)

f a une TV en $x = a$ si $f(a)$ est défini et la pente de la tangente devient « ∞ » :

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \pm\infty.$$

$f'(x)$	$+$	∞	$+$
$f(x)$	\nearrow	TV	\nearrow

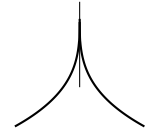
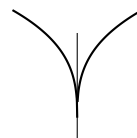
$f'(x)$	$-$	∞	$-$
$f(x)$	\searrow	TV	\searrow



Si f' change de signe en $x = a$ et f a une TV en $x = a$, alors on dit que f a un point de rebroussement (PR) en $x = a$.

$f'(x)$	$-$	∞	$+$
$f(x)$	\searrow	PRmin	\nearrow

$f'(x)$	$+$	∞	$-$
$f(x)$	\nearrow	PRmax	\searrow



Dérivée seconde et concavité

Fonction convexe



Fonction concave



Si $f''(a) > 0$ sur $[a, b]$, alors $f(x)$ convexe sur $[a, b]$.

Si $f''(a) < 0$ sur $[a, b]$, alors $f(x)$ concave sur $[a, b]$.

Si $f(x)$ a un point d'inflexion en $x = a$, alors $f''(x) = 0$ ou $f''(x) \neq 0$

Quatre combinaisons possible de croissance et de convexité

$f'(x)$	+	+	-	-
$f''(x)$	+	-	+	-
$f(x)$	↗	↗	↘	↘

Test de la dérivée seconde permet de déterminer si une fonction a un max ou un min quand $f'(a) = 0$

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f a un min en $x = a$.



Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f a un max en $x = a$.



Détermination de signes pour l'analyse de fonctions

Une fonction algébrique $g(x)$ ne change de signe qu'en passant par zéro ou quand il y a une division par zéro. Ils faut donc trouver quand $g(x) = 0$ et quand il y a une division par zéro et déterminer les signes sur les intervalles.

Truc 1 : factoriser Si on connaît le signe de chacun des facteurs, on trouve le signe global à l'aide de la loi des signes pour les produits et divisions.

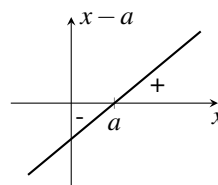
Par exemple, on trouve le signe de $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}$ en déterminant le signe de $(x-1)$, $(x-2)$ et $(x-3)$ séparément et en utilisant la loi des signes :

x	1	2	3
$(x-1)$	-	0	+
$(x-2)$	-	-	0
$(x-3)$	-	-	-
$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)}$	-	0	+

Truc 2 : inégalités utiles

- Signe des expressions de la forme $(x-a)$:

$$(x-a) > 0 \text{ si } x > a \quad (x-a) < 0 \text{ si } x < a$$



x	a
$(x-a)$	- 0 +

- Les puissances paires sont toujours positives :

$$A^n \geq 0 \text{ si } n \text{ pair} :$$

$$(x-6)^2 \geq 0 \quad (3x-2)^4 \geq 0$$

- Les racines paires sont toujours positives quand elles sont définies :

$$\sqrt[n]{A} \geq 0 \text{ si } n \text{ pair et } \sqrt[n]{A} \text{ défini}$$

- Les puissances et racines impaires de A ont le même signe que A :

A^n et $\sqrt[n]{A}$ ont le même signe que A si n impair :

$$(x-3)^3 \geq 0 \iff (x-3) \geq 0 \iff x \geq 3$$

$$\sqrt[3]{(x-3)} \geq 0 \iff (x-3) \geq 0 \iff x \geq 3$$