Formulaire sur l'intégrale

Intégrale indéfinie et dérivées

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C \qquad \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

Changement de variables

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

où $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$

Intégration par parties

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Linéarité

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx,\, A \in \mathbb{R}$$
$$\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Primitives de base

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\, a \neq -1$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\big(|x|\big) + C$$
$$\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C$$
$$\int b^x\,dx = \frac{b^x}{\ln(b)} + C$$

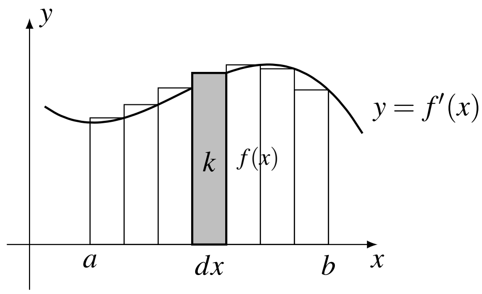
$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$
$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$
$$\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + C$$
$$\int \csc^2(x)\,dx = -\operatorname{cotan}(x) + C$$
$$\int \sec(x)\tan(x)\,dx = \sec(x) + C$$
$$\int \csc(x)\operatorname{cotan}(x)\,dx = -\csc(x) + C$$

$$\int \tan(x)\,dx = -\ln\big(|\cos(x)|\big) + C = \ln\big(|\sec(x)|\big) + C$$
$$\int \operatorname{cotan}(x)\,dx = \ln\big(|\sin(x)|\big) + C = -\ln\big(|\csc(x)|\big) + C$$
$$\int \sec(x)\,dx = \ln\big(|\sec(x) + \tan(x)|\big) + C$$
$$\int \csc(x)\,dx = -\ln\big(|\csc(x) + \operatorname{cotan}(x)|\big) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C = -\arccos(x) + C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C = -\operatorname{arcctg}(x) + C$$
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{asec}(x) + C = -\operatorname{arccosec}(x) + C$$

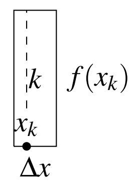
Intégrale définie

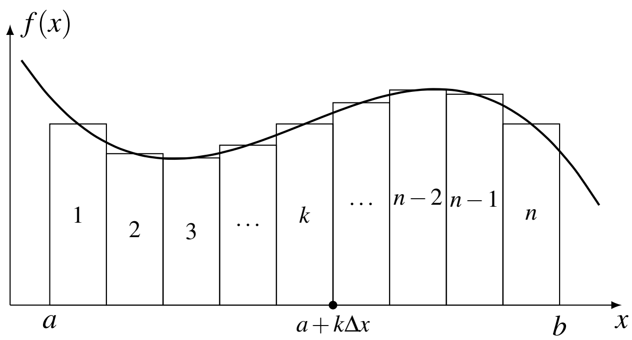
Définition



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \text{aire}\left(\boxed{k}\right)$$

$$\text{aire}\left(\boxed{k}\right) = f(x_k)\Delta x$$





$x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ si on prend les cotés à droite

$x_k = a + (k-1)\dfrac{b-a}{n}$ si on prend les cotés à gauche

$x_k = a + (k-1/2)\dfrac{b-a}{n}$ si on prend les points milieu

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ pour un découpage régulier

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ pour un découpage irrégulier

Propriétés géométriques de l'intégrale définie

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Propriétés géométriques de l'intégrale définie

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Linéarité de l'intégrale définie

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

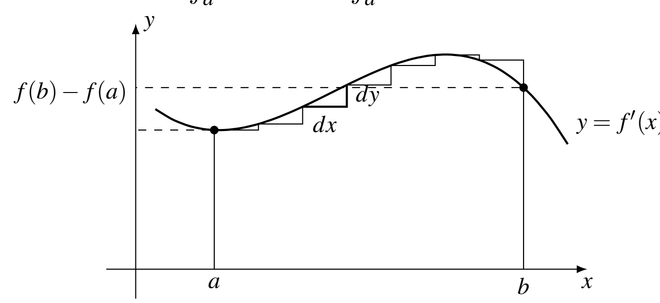
Changement de variable pour l'intégrale définie

Avec le changement de variable $u = g(x)$:

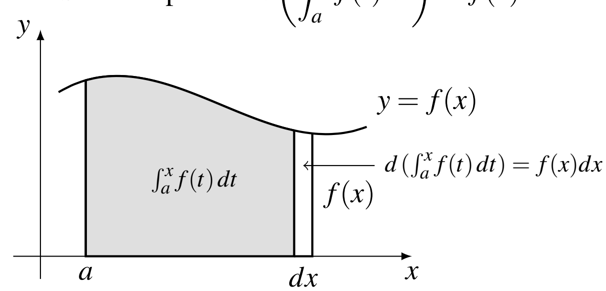
$$\int_a^b f'(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)}$$

Théorème fondamental du calcul

Première partie: $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,dx = \int_a^b dy = f(b) - f(a) = f(x)\Big|_a^b$



Seconde partie : $\displaystyle d\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)\,dx$



Comparaisons

Si $f(x) \geq 0$ sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Si $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a,b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$