Exercices sur les applications de la règle de chaîne

Calcul différentiel – Hiver 2020 – Yannick Delbecque

Dérivation implicite

Question 1
Déterminer, parmi les équations suivantes, celles qui définissent implicitement une fonction (mais pas explicitement).

(a) $y = \dfrac{3t+1}{4t}$

(b) $y = \dfrac{3y+1}{4x}$

(c) $x^2 + 5x + 6 = y$

(d) $xy^2 + 5y^2 = 3x + y$

Question 2
Calculer les dérivées implicites suivantes.

a) $\dfrac{dy}{dx}$ si $x + y^2 = 1$.

b) $\dfrac{dy}{dx}$ si $x^3 + y^3 = 1$.

c) $\dfrac{dy}{dx}$ si $xy = 1$.

d) $\dfrac{dx}{dt}$ si $\sqrt{x^2 + t^2} = 2t^2 + 4$.

e) $\dfrac{dx}{dy}$ si $x^3 - 4y^3 = 5x^2 + 6y^3$.

f) $\dfrac{dy}{dx}$ si $x^2y^2 + x^3y = 6x$.

Question 3
Déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe décrite par l'équation $x^3 + y^3 = 2xy$ au point $(1,1)$.

Question 4
Calculer $\dfrac{dy}{dx}$ pour chacune des équations suivantes.

a) $2x^2 + 3xy - y^2 = 1$

b) $\dfrac{1}{x} - 3xy = \dfrac{1}{y}$

c) $3x^2y^3 + 5x = 3 - 5y^3$

d) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x-y}{x+y}$

Question 5
Pour chacune des équations suivantes, calculer la pente de la tangente à la courbe au point donné.

a) $4x^2 + 9y^2 = 40$ au point $(-1,-2)$

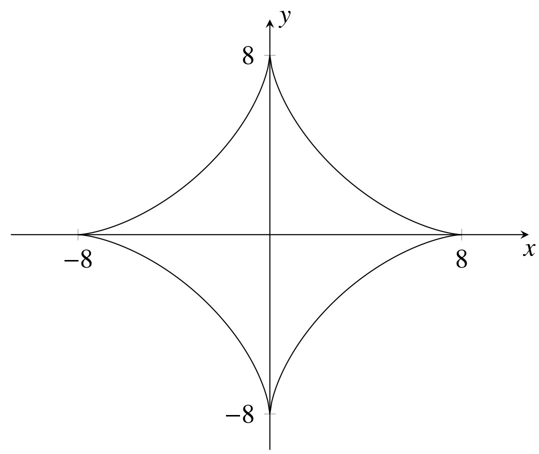
b) $x^2y^2(1+xy) + 4 = 0$ au point $(1,-2)$

Question 6
Soit le cercle d'équation $x^2 + y^2 = r^2$ (cercle de rayon r centré à l'origine). Montrer que la droite passant par l'origine et un point (x_0, y_0) situé sur la circonférence du cercle est toujours perpendiculaire à la droite tangente au cercle en ce point (x_0, y_0). Rappel : le produit des pentes de deux droites perpendiculaires est -1.

Question 7
Soit C la courbe d'équation $x^3 - y^5 = 7y$.

Vérifier que $(2,1)$ est sur la courbe C et déterminer l'équation de la tangente à C en ce point.

Question 8
Trouver la pente de la droite tangente à l'astéroïde $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$, illustrée ci-dessous, au point $\left(1, -3\sqrt{3}\right)$.



Taux liés

Question 9
Le taux de variation du côté d'une boîte cubique est de 50 m/s. Quel est le taux de variation du volume de la boîte quand le côté à 1000 m de longueur ?

Question 10
L'aire d'un cercle est liée à son rayon par l'équation $A = \pi r^2$. Si l'aire augmente à une vitesse constante de 5 cm^2/s, à quelle vitesse grandi le rayon du cercle au moment où sa surface est de 100π cm^2 ? Indiquez les unités dans votre calcul.

Question 11
La volume d'une sphère est liée à son rayon par l'équation $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$. Si le volume diminue à une vitesse constante de $\frac{1}{2}$ m^3/s, à quelle vitesse diminue le rayon de la sphère au moment où son rayon est de 100 m ?

Solutions

Question 1

(b) et (d)

Question 2

a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y}$

b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$

c) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}$

d) $\frac{dx}{dt} = \frac{4t\sqrt{x^2+t^2}-t}{x}$

e) $\frac{dx}{dy} = \frac{3x^2-10x}{30y^2}$

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{6-2xy^2-3x^2y}{2x^2y+x^3}$

Question 3

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-3x^2}{3x^2-2x}$ et au point $(1,1)$ la pente de la tangente à la courbe est

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(1,1)} = \frac{2(1)-3(1)^2}{3(1)^2-2(1)} = -1$$

L'équation de la droite de pente -1 passant par $(1,1)$ est

$$y = -x+2.$$

Question 4

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x+3y}{2y-3x}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2+3x^2y^3}{x^2-3x^3y^2}$ ou $\dfrac{1+6xy^2}{1-6x^2y}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{6x^3+5}{15y^2+9x^2y^2}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

Question 5

a) Pente : $-\dfrac{2}{9}$ b) Pente : 2

Question 6

La pente du rayon passant par le point (x_0, y_0) sur le cercle et le centre $(0,0)$ du cercle est

$$\frac{y_0-0}{x_0-0} = \frac{y_0}{x_0}.$$

On détermine la pente de la tangente au point (x_0, y_0) à l'aide de la dérivation implicite. On suppose que $y = f(x)$ près de (x, y).

$$x^2+y^2 = r^2$$
$$\left(x^2+y^2\right)' = \left(r^2\right)'$$
$$2x+2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

La pente de la tangente au cercle en (x_0, y_0) est donc

$$-\frac{x_0}{y_0}.$$

Si on multiplie la pente de la tangente et la pente du rayon, on trouve

$$-\frac{x_0}{y_0}\frac{y_0}{x_0} = -1,$$

ce qui montre que la tangente est perpendiculaire au rayon.

Question 7

Le point $(2,1)$ est sur la courbe C car

$$2^3-1^5 = 7(1) \iff 7 = 7.$$

On trouve la pente de la tangente au point $(2,1)$ à l'aide de la dérivation implicite. On fait l'hypothèse que $y = f(x)$. En dérivant chaque membre de l'égalité $x^3-y^5 = 7y$ par rapport à x, on obtient

$$3x^2-5y^4y' = 7.$$

En isolant, on obtient que $y' = -\frac{7-3x^2}{5y^4}$. Au point $(2,1)$, on a que $y' = -\frac{7-3(2)^2}{5(1)^4} = 1$.

Comme la droite tangente est de pente 1 et passe par le point $(2,1)$, l'équation de la droite est

$$y = x+1.$$

Question 8

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}$. Au point $\left(1,-3\sqrt{3}\right) = \left(1,-3^{3/2}\right)$, on a que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt[3]{-3^{3/2}}}{\sqrt[3]{1}} = \sqrt{3}$$

(utiliser le fait que $\sqrt[3]{3^{3/2}} = 3^{\frac{3}{2}\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}}$ ainsi que $\sqrt[3]{-A} = -\sqrt[3]{A}$.)

Question 9

Le volume V est lié au côté x par la relation

$$V = x^3.$$

Le taux de variation du côté est $\frac{dx}{dt} = 50$.

Le taux de variation du volume est $\frac{dV}{dx}$.

Le lien entre ces taux de variation est trouvé à l'aide de la règle de chaine :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Quand $x = 1000$ et $\frac{dx}{dy} = 50$, on a que

$$\frac{dV}{dt} = 3(1000)^2(50) = 150000000\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}.$$

Question 10

Comme $A = \pi r^2$ et que $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$, par la règle de chaine on a que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = (2\pi r)\frac{dr}{dt}.$$

Comme $A = \pi r^2$, on a que $r = \quad \pi$. Donc quand $A = 100\pi$, on a que $r = \sqrt{\frac{100\pi}{\pi}} = 10$.

Quand $r = 10$ et $\frac{dA}{dt} = 5$, on obtient

$$\frac{dA}{dt} = (2\pi r)\frac{dr}{dt}$$

$$5 = (20\pi)\frac{dr}{dt}$$

En isolant $\frac{dr}{dt}$ on trouve que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{5}{20\pi} = \frac{1}{4\pi}\ \mathrm{cm}/s.$$

Question 11

Taux de variation du volume : $\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2}$. Taux de variation du rayon : $\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{2}$.

Lien entre rayon et volume : comme $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, on a que

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

Lien entre les taux de variation : Par la règle de chaine,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(4\pi r^2\right)\frac{dr}{dt}.$$

Quand $r = 100$ et $\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{2}$, on obtient

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(100)^2\left(-\frac{1}{2}\right) = -20000\pi\ \mathrm{m/s}.$$