Exercices sur la définition de dérivée avec limites – Calcul différentiel

Département de mathématiques – Cégep de Saint-Laurent
201-NYA – Automne 2020 – Professeur : Yannick Delbecque

Question 1
Déterminer le TVI $\frac{dy}{dx}$ des fonctions suivantes au point donné à l'aide de la définition de dérivée en terme de limites (sans utiliser les formules de dérivation).

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

a) $y = x^2$ quand $x = 2$.
b) $y = x^3$ quand $x = 2$.
c) $y = 3x$ quand $x = 2$.
d) $y = 2$ quand $x = 2$.
e) $y = \dfrac{1}{x}$ quand $x = 2$.
f) $y = \frac{3}{x^2}$ quand $x = 2$.
g) $y = x^2$ quand $x = a$.
h) $y = x^3$ quand $x = a$.
i) $y = \dfrac{1}{x}$ quand $x = a$.

Question 2
Déterminer $\frac{dy}{dx}$ à l'aide de la définition de dérivée en terme de limites.

a) si $y = x^4$
b) si $y = \dfrac{1}{x^2}$
c) si $y = \dfrac{x^2}{x+1}$
d) si $y = 1 - x^2$
e) si $y = x^2 + x + 1$
f) si $y = \sqrt{x-1}$

Question 3
Utiliser les deux formes de la définition de la dérivée à l'aide de limites pour calculer $f'(2)$ si $f(x) = x^3$.

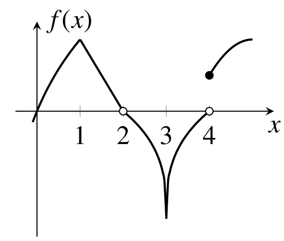
Question 4
Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant les deux formes de la définition en terme de limites.

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = x^3$
c) $g(x) = \sqrt{x+3}$
d) $h(x) = \dfrac{x+3}{x+5}$
e) $f(x) = 2x^2 - x$.
f) $y = \sqrt{x^2+1}$.
g) $g(x) = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{1}{3x^2}$.

Question 5
En utilisant la définition de la dérivée donnée à l'aide de limites, évaluer les expressions demandées pour la fonction donnée.

a) $f'(2)$ pour $f(x) = 2x^2 - x$.
b) $\dfrac{dx}{dt}$ pour $x(t) = at^2 + bt + c$.
c) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1}$ pour $y = \sqrt{x^2+1}$.
d) $g'(x)$ pour $g(x) = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{1}{3x^2}$.
e) $h'(0)$ pour $h(x) = \dfrac{-4x}{\sqrt{1-5x}}$.

Question 6
Pour les valeurs $x = 1, 2, 3, 4$, déterminer si la fonction f a un point anguleux, un point de rebroussement, une discontinuité essentielle ou non-essentielle, n'est pas définie ou n'est pas dérivable. (Donner toutes les caractéristiques qui s'appliquent.)



Question 7
Démontrer que $\left(2x+1\right)' = 2$ à l'aide de la définition de dérivée et des propriétés des limites.

Question 8
Démontrer que si f est dérivable pour n'importe quelle valeur de x, alors $\left(2f(x)+1\right)' = 2f'(x)$ à l'aide de la définition de dérivée et des propriétés des limites.

Question 9
Démontrer que $\left((x+1)^2\right)' = 2(x+1)$ à l'aide de la définition de dérivée et des propriétés des limites.

Question 10 (10 points)
Démontrer à l'aide de la définition de la dérivée et des propriétés des limites que

$$\left(f(x) + Cx\right)' = f'(x) + C$$

pour une constante C quelconque et en supposant que la dérivée $f'(x)$ existe.

Question 11
Montrer que $f(x) = |2x-3|$ n'est pas dérivable en $x = 3/2$.

Question 12
Montrer que $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ n'est pas dérivable en $x = 0$.

Question 13
Démontrer que si f est dérivable pour n'importe quelle valeur de x, alors $\left(f(x)^2\right)' = 2f(x)f'(x)$ à l'aide de la définition de dérivée et des propriétés des limites. (Difficile car il faut des trucs algébrique ! Le truc est dans la preuve de la dérive des fonctions composées (avec les limites !))

Solutions

Question 1

a)

$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2-(2)^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+2\Delta x+\Delta x^2)-(2)^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2+\Delta x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} 2+\Delta x\\ &= 2+0\\ &= 2\end{aligned}$$

b) 12

c) 3

d) 0

e) $-\dfrac{1}{4}$

f) $-\frac{3}{4}$

g) $2a$

h) $3a^2$

i) $-\dfrac{1}{a^2}$

Question 2

a) $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3$

b) $\dfrac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = -2x$

e) $\dfrac{dy}{dx} = 2x+1$

f)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(x+\Delta x)-1}-\sqrt{x-1}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(x+\Delta x)-1}-\sqrt{x-1}}{\Delta x}\,\frac{\sqrt{(x+\Delta x)-1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x+\Delta x)-1}+\sqrt{x-1}}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-1-(x-1)}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)-1}+\sqrt{x-1}\right)}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)-1}+\sqrt{x-1}\right)}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{(x+\Delta x)-1}+\sqrt{x-1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{(x+0)-1}+\sqrt{x-1}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\end{aligned}$$

Question 3

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^3-2^3}{\Delta x} = 12$$

(forme indéterminée 0/0, utilisez le triangle de Pascal pour développer $(2+\Delta x)^3$).

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2} = 12$$

(utiliser la factorisation $x^3-2^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$ pour lever l'indétermination 0/0)

Question 4

a) $f'(x) = 2x$

Forme 1 :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2)-x^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} 2x+\Delta x\\ &= 2x\end{aligned}$$

Forme 2 :

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a} x+a\\ &= a+a\\ &= 2a\end{aligned}$$

Donc $f(x) = 2x$.

b) $f'(x) = 3x^2$

c) $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$

d) $h'(x) = \dfrac{2}{(x+5)^2}$

e) $f'(x) = 4x-1$

f) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

g) $g'(x) = \frac{-2}{3x^2} + \frac{2}{3x^3}$

Question 5

a)

$$\begin{aligned}f'(2) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(2(2+\Delta x)^2-(2+\Delta x)\right)-(2(2^2)-2)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(2(4+4\Delta x+\Delta x^2)-(2+\Delta x)\right)-6}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(8+8\Delta x+2\Delta x^2-2-\Delta x\right)-6}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(6+7\Delta x+2\Delta x^2\right)-6}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{7\Delta x+2\Delta x^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(7+2\Delta x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} 7+2\Delta x\\ &\overset{\text{cont}}{=} 7\end{aligned}$$

b) $2at+b$

c) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{-2x+2}{3x^3}$

e) -4

Question 6

$x=1$ non-dérivable, point anguleux

$x=2$ non-dérivable, discontinuité non-essentielle

$x=3$ non-dérivable, point de rebroussement

$x=4$ non-dérivable, discontinuité essentielle

Question 7

$$\begin{aligned}\left(2x+1\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(2(x+\Delta x)+1)-(2x+1)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(2x+2\Delta x+1)-2x-1}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} 2\\ &= 2\end{aligned}$$

Question 8

$$\begin{aligned}\left(2f(x)+1\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(2f(x+\Delta x)+1)-(2f(x)+1)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(2f(x+\Delta x)+1)-2f(x)-1}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(2f(x+\Delta x)-2f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} 2\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= 2\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= 2f'(x)\end{aligned}$$

Question 9

$$\begin{aligned}\left((x+1)^2\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{((x+\Delta x)+1)^2-(x+1)^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+2(x+\Delta x)+1)-(x^2+2x+1)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+2x+2\Delta x+1-x^2-2x-1}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(2x+2)\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(2(x+1)+\Delta x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} 2(x+1)+\Delta x\\ &= 2(x+1)\end{aligned}$$

Question 10

$$\begin{aligned}(f(x)+Cx)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)+C(x+\Delta x)-(f(x)+Cx)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)+C(x+\Delta x)-Cx)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{C(x+\Delta x)-Cx}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0} \frac{C(x+\Delta x)-Cx}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0} C\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0} C\\ &= f'(x)+C.\end{aligned}$$

Question 11

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{|2(\frac{3}{2}+\Delta x)-3|-|2\frac{3}{2}-3|}{\Delta x} & \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{|2(\frac{3}{2}+\Delta x)-3|-|2\frac{3}{2}-3|}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{|2\Delta x|-0}{\Delta x} & &= \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{|2\Delta x|-0}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{|2\Delta x|}{\Delta x} & &= \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{|2\Delta x|}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{2\Delta x}{\Delta x} & &= \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{-2\Delta x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0^+} 3 & &= \lim_{\Delta x\to 0^-} -2\\ &= 2 & &= -2\end{aligned}$$

Comme les limites à droites et à gauche ne sont pas égales, la limite $\Delta x \to 0$ n'existe pas et la fonction f n'est pas dérivable en $x = 0$.

Question 12

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0^\pm} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0^\pm} \frac{\sqrt[3]{(0+\Delta x)^2}-\sqrt[3]{0}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0^\pm} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0^\pm} \frac{\Delta x^{2/3}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0^\pm} \frac{1}{\Delta x^{1/3}}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0^\pm} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}\\ &= \frac{1}{0^\pm}\\ &= \pm\infty\end{aligned}$$

Comme $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \nexists$, la fonction f n'est donc pas dérivable en $x = 0$.

Question 13

$$\begin{aligned}\left((f(x))^2\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(f(x+\Delta x)\right)^2-\left(f(x)\right)^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(f(x+\Delta x)\right)^2-\left(f(x)\right)^2}{\Delta x}\,\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x+\Delta x)-f(x)}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(f(x+\Delta x)\right)^2-\left(f(x)\right)^2}{f(x+\Delta x)-f(x)}\,\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(f(x+\Delta x)\right)^2-\left(f(x)\right)^2}{f(x+\Delta x)-f(x)}\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{(y+\Delta y)^2-y^2}{\Delta y}f'(x) \text{ En posant } y = f(x)\\ &= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{y^2+2y\Delta y+\Delta y^2-y^2}{\Delta y}f'(x)\\ &= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{2y\Delta y+\Delta y^2}{\Delta y}f'(x)\\ &= \lim_{\Delta y\to 0} (2y+\Delta y)f'(x)\\ &= 2yf'(x)\\ &= 2f(x)f'(x)\end{aligned}$$

Note : en posant $y = f(x)$, $f(x+\Delta x)-f(x)$ est Δy. Comme f est dérivable, elle est aussi continue. Alors $\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)-f(x) = 0$. On peut donc dire que $\Delta y \to 0$. Enfin, $f(x+\Delta x) = y+\Delta y$.