Exercices sur la définition de dérivée – Calcul différentiel

Département de mathématiques – Cégep de Saint-Laurent
201-NYA – Automne 2020 – Professeur : Yannick Delbecque

Exercices préparatoires

Question 1
Utiliser le triangle de Pascal pour développer les polynômes suivants.

a) $(x+1)^3$
b) $(x-1)^3$
c) $(x+2)^5$
d) $(x+h)^4$
e) $(1-r)^6$
f) $(2x^2-3)^4$

Question 2
Mettre au dénominateur commun les fractions algébriques suivante. Simplifier le résultat.

a) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x}$
b) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x+1}{(x-1)}$
c) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}$
d) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x^2(x-2)}$
e) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x^2}{(x-1)}$
f) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x+1}{(x^2+1)}$
g) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{x+1}{x-1}$
h) $\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x}{x^2+x+1}$

Question 3
Utilisez le conjugué pour éliminer les racines carrées au dénominateur ou au numérateur.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$
b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}$
c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$
d) $\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$
e) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$
f) $\dfrac{x}{\sqrt{x}-3}$
g) $\dfrac{x}{(2x+1)(\sqrt{x}-3)}$
h) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+1}$
i) $\dfrac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{x}}{2x-1}$

Question 4
Évaluer les expressions suivantes sans simplifier.

a) $f(2+\Delta x)$ si $f(x)=x^2$
b) $f(1+\Delta x)$ si $f(x)=\frac{1}{2}$
c) $f(1+\Delta x)$ si $f(x)=x^2+2x+1$
d) $f(-1+\Delta x)$ si $f(x)=\frac{1}{1+x}$
e) $f(3+\Delta x)$ si $f(x)=\sqrt{3+x}$
f) $f(2+\Delta x)$ si $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$
g) $f(x+\Delta x)$ si $f(x)=x^3+1$
h) $f(x+\Delta x)$ si $f(x)=\frac{x}{x+1}$

Taux de variation moyen

Question 5
Déterminer les valeurs suivantes.

a) Δy si $f(x)=x^2$ et x varie de 0 à 5.
b) Δy si $f(x)=x^2$ et x varie de -2 à 2.
c) Δy si $f(x)=x^2$ et x varie de -3 à -2.
d) Δy si $f(x)=x^3$ et x varie de -2 à 3.
e) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=\sqrt{x}$ quand x varie de 0 à 9.
f) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=\dfrac{1}{x}$ quand x varie de 1 à 3.

Question 6
Déterminer les valeurs suivantes sans simplifier le résultat.

a) Δy si $f(x)=x^2$ et x varie de 0 à Δx.
b) Δy si $f(x)=x^2$ et x varie de 1 à $1+\Delta x$.
c) Δy si $f(x)=x^3$ et x varie de -2 à $-2+\Delta x$.
d) Δy si $f(x)=\frac{1}{x}$ et x varie de 1 à $1+\Delta x$.
e) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=\dfrac{1}{x}$ quand x varie de 1 à $1+\Delta x$.
f) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=x^2$ quand x varie de x à $x+\Delta x$.
g) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=x^3$ quand x varie de x à $x+\Delta x$
h) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=\dfrac{1}{x}$ quand x varie de x à $x+\Delta x$
i) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=\sqrt{x}$ quand x varie de x à $x+\Delta x$

Question 7
Déterminer l'équation de la droite $y=ax+b$ qui passe par les points donnés. Faire une esquisse représentant la fonction et la droite.

a) $(1, f(1))$ et $(2, f(2))$ pour $f(x)=x^2$
b) $(0, f(0))$ et $(2, f(2))$ pour $f(x)=x^3$
c) $(1, f(1))$ et $(2, f(2))$ pour $f(x)=\frac{1}{x}$
d) $(1, f(1))$ et $(2, f(2))$ pour $f(x)=\sqrt{x}$
e) $(0, f(0))$ et $(\Delta x, f(\Delta x))$ pour $f(x)=x^3$
f) $(1, f(1))$ et $(1+\Delta x, f(1+\Delta x))$ pour $f(x)=x^2$

Question 8
Soit la fonction définie par l'équation $y = x^3$. Calculer le taux de variation moyen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sur l'intervalle demandé. Donner la valeur de Δx pour chacun des cas.

a) $[2,4]$ b) $[2,3]$ c) $[2,2.1]$ d) $[2,2.01]$ e) $[2,2.001]$.

Question 9
Déterminer à l'aide des résultats de la question précédente vers quel nombre semble s'approcher le taux de variation de $y = x^3$ entre 2 et $2+\Delta x$ lorsque Δ devient infiniment petit ?

Question 10
Soit la fonction $f(x) = x^3 - x$. Calculer les taux de variation moyens suivants en simplifiant les fractions algébriques obtenues. L'identité algébrique suivante pourrait être utile pour simplifier les résultats obtenus : $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$.

a) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ entre $x = 2$ et $x = 4$.
b) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ entre $x = a$ et $x = b$.
c) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ entre x et $x+\Delta x$.

Question 11
Montrer que l'équation de la droite qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(a+\Delta x), f(a+\Delta x)$ du graphe d'une fonction f est

$$y = f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x-a).$$

Faire une esquisse représentant la situation.

Question 12
Loi de refroidissement (ou du réchauffement) de Newton : si T est la température d'un objet, A la température ambiante et t le temps écoulé, le taux de variation $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ de la température par rapport au temps est proportionnel à la différence entre la température de l'objet et la température ambiante :

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = C(T-A)$$

où C est la constante de proportionnalité (qui dépend du système).

Après la chute de météorites survenue sur la ville de Tcheliabinsk en Russie en février 2013, des chercheurs s'apprêtent à récupérer des fragments de la météorite dans la zone sinistrée.

Les chercheurs sont arrivés sur le site à 14 h et ont remarqué que la température d'un fragment était de 140°C. Deux heures plus tard, la température a chuté de 50°C.

Sachant que la température ce jour là était de -10°C et que la météorite a touché le sol à 10 h, déterminer la température du fragment au moment précis où la météorite a touché le sol.

Taux de variation instantané

Question 13
Déterminer le TVI $\dfrac{dy}{dx}$ des fonctions suivantes au point donné (sans utiliser les formules de dérivation). Déterminer l'équation de la droite tangente au graphe de f à ce point.

a) $y = x^2$ quand $x = 2$.
b) $y = x^2 - 1$ quand $x = 2$.
c) $y = x^3$ quand $x = 2$.
d) $y = 3x$ quand $x = 2$.
e) $y = 2$ quand $x = 2$.
f) $y = \dfrac{1}{x}$ quand $x = 2$.
g) $y = \dfrac{3}{x^2}$ quand $x = 2$.
h) $y = x^2$ quand $x = a$.
i) $y = x^3$ quand $x = a$.
j) $y = \dfrac{1}{x}$ quand $x = a$.

Question 14
Déterminer la pente de tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ à l'aide de la définition de pente de tangente.

a) $f(x) = x^2 - 1$ au point $(1,0)$.
b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ au point $(2,1/3)$.
c) $f(x) = \sqrt{x+1}$ au point $(3,2)$.

Question 15
Déterminer laquelle des deux fonctions suivantes croit le plus rapidement en $x = 1$:

$$f(x) = x^2 \text{ ou } f(x) = -\frac{1}{x}?$$

Question 16
La fonction donnant l'aire d'un cercle (en centimètres carrés) par rapport à son rayon (en centimètres) est $A(r) = \pi r^2$

a) Quelle est la variation de l'aire du cercle si le rayon passe de 2 cm à 4 cm ?
b) Quelle est le taux de variation moyen de l'aire du cercle si le rayon passe de 2 cm à 4 cm ?
c) Quelle est le taux de variation instantané de l'aire du cercle lorsque le rayon est de 4 cm ?

Différentielles et fonctions dérivées

Question 17
Déterminer la fonction dérivée $\dfrac{dy}{dx}$ à l'aide de la définition.

a) si $y = x^4$
b) si $y = \dfrac{1}{x^2}$
c) si $y = \dfrac{x^2}{x+1}$
d) si $y = 1 - x^2$
e) si $y = x^2 + x + 1$
f) si $y = \sqrt{x-1}$

Question 18
En utilisant les résultats de la question précédente et le fait que

$$dy = \frac{dy}{dx}\,dx,$$

déterminer l'erreur absolue sur y pour $x = 2$ et $x = 10$ si l'erreur en x est 0.1. Pour laquelle des deux valeurs de x l'erreur en y est-elle la plus grande ?

a) si $y = x^4$
b) si $y = \frac{1}{x^2}$
c) si $y = \frac{x^2}{x+1}$
d) si $y = 1 - x^2$
e) si $y = x^2 + x + 1$
f) si $y = \sqrt{x-1}$

Question 19
Déterminer la dérivée des fonctions suivantes à l'aide de la définition et trouver l'équation de la droite tangente au point indiqué. Faire une esquisse de la situation.

a) $f(x) = x^2 + 1$, tangente au point $(1, 2)$.
b) $f(x) = \frac{2}{x-1}$ au point $(2, 2)$.
c) $f(x) = \sqrt{x-2}$ au point $(3, 1)$.

Question 20
Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la définition.

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = x^3$
c) $g(x) = \sqrt{x+3}$
d) $h(x) = \dfrac{x+3}{x+5}$
e) $f(x) = 2x^2 - x$; $f'(2)$.
f) $x(t) = at^2 + bt + c$; $\dfrac{dx}{dt}$.
g) $y = \sqrt{x^2+1}$; $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1}$.
h) $g(x) = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{1}{3x^2}$; $g'(x)$.

Question 21
Dans les questions précédentes, on a déterminé que la dérivée de $y = x^3$ est $y' = 3x^2$. Utilisez la relation entre dy et dx

$$dy = f(x+dx) - f(x)$$

pour approximer $(1.1)^3$. (Ind. décomposer 1.1 en $x + dx$ avec $x = 1$ et $dx = 0.1$ pour déterminer $f(x+dx) = f(x) + dy$.

Solutions

Question 1

a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
c) $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$
d) $x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$
e) $r^6 - 6r^5 + 15r^4 - 20r^3 + 15r^2 - 6r + 1$
f) $16x^8 - 96x^6 + 216x^4 - 216x^2 + 81$

Question 2

a) $\dfrac{2(x-1)}{x(x-2)}$
b) $-\dfrac{3x+1}{(x-1)(x+1)}$
c) $\dfrac{(x-1)}{(x-2)^2}$
d) $\dfrac{(x^2+1)}{x^2(x-2)}$
e) $\dfrac{x(x^2-x-1)}{(x-1)(x-2)}$
f) $\dfrac{x(x+1)^2}{(x^2+1)(x-1)}$
g) $\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-1}$
h) $\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$

Question 3

a) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{x-2)}$
b) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{2-x)}$
c) $\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-4)}$
d) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-x}$
e) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$
f) $\dfrac{x(\sqrt{x}+3)}{x-9}$
g) $\dfrac{x(\sqrt{x}+3)}{(2x+1)(x-9)}$
h) $\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{2x}$
i) $\dfrac{1}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x}}$

Question 4

a) $(2+\Delta x)^2$
b) $\frac{1}{2}$
c) $(1+\Delta x)^2 + 2(1+\Delta x) + 1$
d) $\dfrac{1}{1+(-1+\Delta x)}$
e) $\sqrt{3+(3+\Delta x)}$
f) $\dfrac{(2+\Delta x)+2}{(2+\Delta x)+1}$
g) $(x+\Delta x)^3 + 1$
h) $\dfrac{(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)+1}$

Question 5

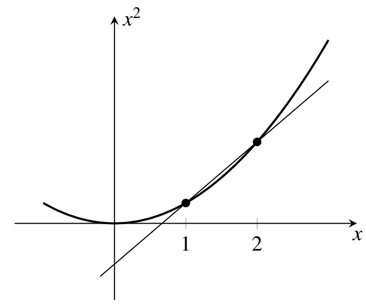
a) $\Delta y = 25$
b) $\Delta y = 0$
c) $\Delta y = -5$
d) $\Delta y = 35$
e) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{0}}{9-0} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
f) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1/3-1/1}{2} = -\frac{1}{3}$

Question 6

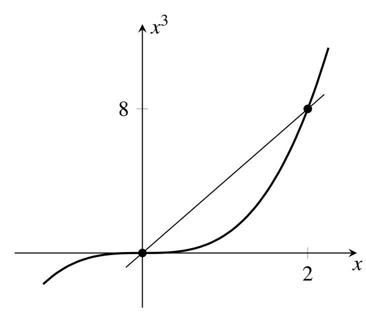
a) $\Delta y = \Delta x^2$
b) $\Delta y = (1+\Delta x)^2$-1
c) $\Delta y = (-2+\Delta x)^3 - 8$
d) $\Delta y = \frac{1}{1+\Delta x} - 1$
e) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\frac{1}{1+\Delta x}-1}{\Delta x}$
f) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$
g) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$
h) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$
i) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$

Question 7

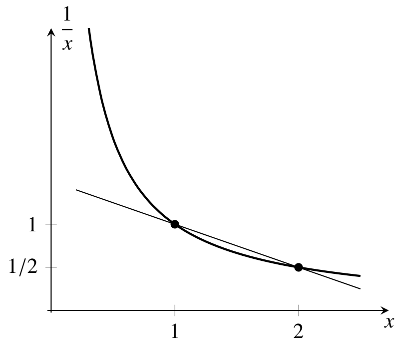
a) $y = 3x - 2$



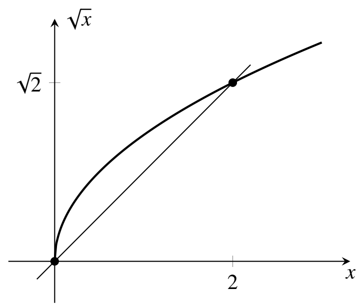
b) $y = 4x$



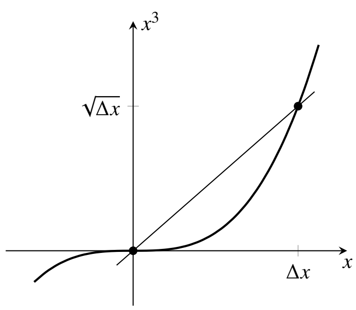
c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



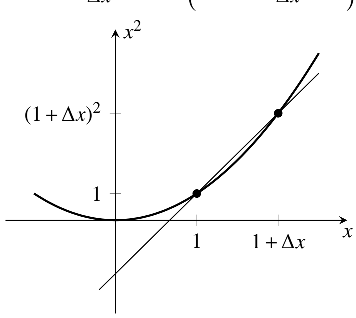
d) $\left(\sqrt{2}-1\right)x - \left(\sqrt{2}+2\right)$



e) $x\Delta x^2$



f) $y = \dfrac{(1+\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x}x + \left(1 - \dfrac{(1+\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x}\right)$



Question 8

a) $\frac{4^3-2^3}{4-2} = 28$, $\Delta x = 2$

b) 19, $\Delta x = 1$

c) 12.61, $\Delta x = 0.1$

d) 12.0601, $\Delta x = 0.01$

e) 12.006001, $\Delta x = 0.001$

Question 9

12

Question 10

a) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 27$

b) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{b^3 - b - \left(a^3 - a\right)}{b-a} = b^2 + ab + a^2 - 1$

c) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(x+\Delta x)^3 - (x+\Delta x) - \left(x^3 - x\right)}{\Delta x}$
$= 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 - 1$

Question 11

On peut faire la démonstration de différentes manières. Montrons que que la droite définie par l'équation donnée passe par les deux points donnés. En $(a, f(a))$, on a que

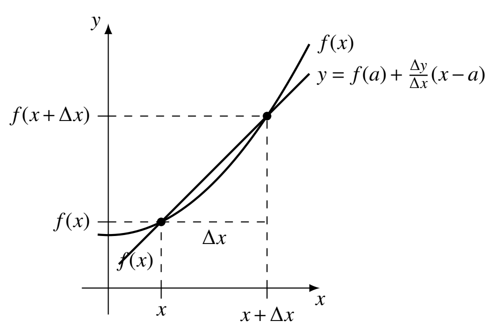
$$\begin{aligned}
y &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x-a) \\
f(a) &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(a-a) \\
f(a) &= f(a).
\end{aligned}$$

L'équation de la droite est donc satisfaite en ce point.

Au point $(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$, on a que

$$\begin{aligned}
y &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x-a) \\
f(a+\Delta x) &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}((a+\Delta x)-a) \\
f(a+\Delta x) &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x \\
f(a+\Delta x) &= f(a) + \Delta y \\
f(a+\Delta x) &= f(a) + (f(a+\Delta x) - f(a)) \\
f(a+\Delta x) &= f(a+\Delta x)
\end{aligned}$$

L'équation de la droite est donc aussi satisfaite pour l'autre point. Ainsi, comme la droite passe par les deux points donnés, c'est bien l'équation de la droite cherchée.



Question 12

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta T}{\Delta t} &= C(T-A) \\
\frac{-50}{2} &= C(140-(-10)) \\
-25 &= C(150) \\
C &= \frac{-25}{150} = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta T}{\Delta t} &= -\frac{1}{6}(T+10) \\
\Delta T &= -\frac{1}{6}(T+10)\Delta t \\
\Delta T &= -\frac{1}{6}(140+10)(14-10) \\
\Delta T &= -\frac{1}{6}(150)(4) = 100 \\
\Delta T &= T_{\text{fin}} - T_{\text{ini}} \\
T_{\text{ini}} &= T_{\text{fin}} - \Delta T = 140 - (-100) = 240.
\end{aligned}$$

Question 13

a) 4, $y = 4x - 4$

b) 4, $y = 4x - 5$

c) 12, $y = 12x - 16$

d) 3, $y = 3x$

e) 0, $y = 2$

f) $-\dfrac{1}{4}$, $y = -\dfrac{x}{4} + 1$

g) $-\dfrac{3}{4}$, $y = -\dfrac{3x}{4} + \dfrac{9}{4}$

h) $2a$, $y = 2ax - a^2$

i) $3a^2$ $y = 3a^3x - 2a^3$

j) $-\dfrac{1}{a^2}$ $y = -\dfrac{x}{a^2} + \dfrac{2}{a}$

Question 14

a) 2

b) $-1/9$

c) $1/4$

Question 15

$\text{TVI}_f(1) = 2$, $\text{TVI}_g(1) = 1$, la fonction f croit donc plus rapidement que g en $x = 1$.

Question 16

a) 12π cm^2 b) 6π cm c) 8π cm

Question 17

a)

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{(x+dx)^4 - x^4}{dx} \\
&= \frac{x^4 + 4x^3dx + 6x^2dx^2 + 4xdx^3 + dx^4 - x^4}{dx} \\
&= \frac{4x^3dx + 6x^2dx^2 + 4xdx^3 + dx^4}{dx} \\
&= 4x^3 + 6x^2dx + 4xdx^2 + dx^3 \\
&\approx 4x^3
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{1}{(x+dx)^2} - \frac{1}{x^2}}{dx} \\
&= \frac{\left(\frac{x^2-(x+dx)^2}{x^2(x+dx)^2}\right)}{dx} \\
&= \frac{x^2-(x+dx)^2}{x^2(x+dx)^2}\,\frac{1}{dx} \\
&= \frac{x^2 - \left(x^2 + 2xdx + dx^2\right)}{x^2(x+dx)^2}\,\frac{1}{dx} \\
&= \frac{-2xdx - dx^2}{x^2(x+dx)^2dx} \\
&= \frac{-2x - dx}{x^2(x+dx)^2} \\
&\approx \frac{-2x}{x^2(x)^2} \\
&= \frac{-2x}{x^4} \\
&= -\frac{-2}{x^3}
\end{aligned}$$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = -2x$

e) $\dfrac{dy}{dx} = 2x+1$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

Question 18

a) $|dy| = 3.2$; $|dy| = 400$

b) $|dy| = 0.025$; $|dy| = 0.0002$

c) $|dy| \approx 0.089$; $|dy| \approx 0.0991$

d) $|dy| = 0.4$; $|dy| = 2$

e) $|dy| = 0.5$; $|dy| = 2.1$

f) $|dy| = 0.05$; $|dy| \approx 0.1667$

Question 19

a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+dx)^2+1-\left(x^2+1\right)}{dx} \\ &= \frac{\left(x^2+2xdx+dx^2\right)+1-x^2-1}{dx} \\ &= \frac{2xdx+dx^2}{dx} \\ &= 2x+dx \\ &\approx 2x \end{aligned}$$

La pente de la droite tangente en $(1,2)$ est $f'(1) = 2$. L'équation de la droite de pente 2 qui passe par $(1,2)$ est

$$y = 2x.$$

b) $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$ Droite tangente : $-2x+6$

c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$ Droite tangente : $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

Question 20

a) $f'(x) = 2x$

b) $f'(x) = 3x^2$

c) $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$

d) $h'(x) = \dfrac{2}{(x+5)^2}$

e) 7

f) $2at+b$

g) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

h) $g'(x) = \dfrac{-2}{3x^2} + \dfrac{2}{3x^3}$

Question 21

On a que $dy = 3x^2\,dx$. Donc si $x = 1$ et $dx = 0,1$, on a que

$$dy = 3(1)^2(0,1) = 0,3.$$

Comme $dy = f(x+dx) - f(x)$, on a que $f(x+dx) = f(x) + dy$. On utilise cette dernière égalité pour approximer $f(x+dx)$.

$$\begin{aligned} f(1,1) &= f(1+0,1) \\ &\approx f(1)+0,3 \\ &= 1^3+0,03 \\ &= 1,03. \end{aligned}$$