Exercices révision et notions préliminaires — notation et nombres

Calcul différentiel – Automne 2020 – Yannick Delbecque

Notation, logique, nombres

Question 1
Compléter les énoncés suivants par la relation $\in$ ou $\subseteq$.

a) $2\square\mathbb{N}$
b) $\mathbb{N}\square\mathbb{Q}$
c) $\{2\}\square\mathbb{N}$
d) $\{1,2,3\}\square\mathbb{Z}$
e) $\pi\square\mathbb{R}$
f) $]1,2[\square[1,2]$
g) $]1,2[\square\mathbb{R}$

Question 2
Effectuer les opérations ensemblistes suivantes.

a) $\{1,\pi,2\pi\}\cup\{1,2,3,4\}$
b) $\{1,\pi,2\pi,3\}\cap\{1,2,3,4\}$
c) $\{1,\pi,4,5\}\setminus\{1,2,3,4\}$
d) $[2,5]\cup]4,8]$
e) $[2,5]\cap]4,8]$
f) $[2,5]\setminus]4,8]$
g) $\mathbb{N}\cap[0.5,\pi]$
h) $\mathbb{Q}\cap\{0.5,\pi,3.14159,\mathrm{e},\sqrt{2},3/5\}$
i) $\{0.5,\pi,3.14159,\mathrm{e},\sqrt{2},3/5\}\setminus Q$

Question 3
Décrire les ensembles suivants à l'aide d'intervalles

a) $\{x \mid x \geq -3 \text{ et } x < \pi\}$
b) $\{x \mid x-2 < 5\}$
c) $\{x \mid x < 3 \text{ et } 0 < x \text{ et } x \leq 1/2\}$
d) $\{x \mid x^2 < 4\}$

Question 4
Écrire les ensembles suivants à l'aide d'intervalles, d'ensembles et d'opérations sur les ensembles.

a) Les nombres rationnels strictement compris entre 0 et 1.
b) Les nombres réels strictement plus grands que 1 et plus petits ou égal à 2.
c) Les nombres réels plus strictement grands que 1 ou plus petits ou égal à 2.

Question 5
Compléter avec « = » ou « $\iff$ ».

a) $2+3\,\square\,5$
b) n est pair $\square$ n est divisible par 2.
c) $x^2+1\,\square\,(x-1)(x+1)$
d) $x+2=3\,\square\,x=1$
e) $(x+1)^2=1\,\square\,x^2+2x+1=1$
f) $x\in[1,3[\,\square\,1\leq x<3$
g) $(x+1)^3\,\square\,x^3+3x^2+3x+1$
h) $x^2=4\,\square\,x=2$ ou $x=-2$
i) $AB=0\,\square\,A=0$ ou $B=0$

Question 6
Démontrer les énoncés suivants, ou donner un contre exemple pour montrer qu'ils sont faux.

a) « La somme de deux multiples de 3 est aussi un multiple de 3 ».
b) « Le cube d'un nombre pair est pair. »
c) « La somme d'un nombre entier et d'un nombre rationnel est un nombre entier. »
d) « La somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel »

Question 7
Vrai ou faux ?

a) Si $x\in\mathbb{Q}$, alors $x\in\mathbb{R}$.
b) Si $x\in\mathbb{R}$, alors ne peut jamais s'écrire comme une fraction.
c) $\pi = 3.14159265358979$
d) $\sqrt{2}\in[1,2]$
e) Tout les nombres pairs sont des nombres réels.

Question 8
Écrire les factions suivante sous la forme d'un nombre périodique en effectuant la division.

a) $\frac{23}{5}$
b) $\frac{51}{11}$

Question 9
Mettre les nombres périodiques suivant sous forme de fractions.

a) $0.\overline{123}$
b) $2.\overline{18}$

Question 10
Cette question vise à vous préparer à faire des preuve directes et simple.

a) Démontrer que la somme de deux nombre entier pairs est aussi un nombre pair.
b) Démontrer que le produit de deux nombres impairs est toujours un nombre pair.

Question 11 (Défi difficile)
Démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant le lemme suivant (qu'il n'est pas nécessaire de prouver) :

n est un multiple de 3 ssi n^2 est un multiple de trois.

Indice : s'inspirer de la preuve vue en classe pour $\sqrt{2}$.

Question 12 (Défi difficile)
Démontrer que $\log_2(3)$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant le fait que la décomposition en facteurs premiers est unique. Indice : s'inspirer (un peu moins) de la preuve vue en classe pour $\sqrt{2}$.

Question 13 (Défi difficile)
Les questions suivantes visent à comprendre comment on peut démontrer une proposition comme la proposition suivante à l'aide du principe d'induction.

Proposition Si on additionne les n premiers nombres naturels impairs, on obtient n^2.

a) Vérifier que la proposition est vraie pour $n = 1, 2, 3, 4$.

b) Est-ce que ces quatre vérifications démontrent que la proposition est vraie pour tout nombre naturel $n > 0$?

c) Pour passer le la somme des 2 premiers nombres impairs à la sommes des 3 premiers nombres impairs, on additionne le troisième nombre impair :

$$\underbrace{1+3}_{\text{2 premiers nombres impairs}}+5$$

De même pour passer de 3 à 4 nombres impairs :

$$\underbrace{1+3+5}_{\text{3 premiers nombres impairs}}+7$$

Si on suppose que la proposition fonctionne pour la première partie de ces sommes, on retrouve la proposition :

$$\underbrace{1+3}_{\text{2 premiers nombres impairs}}+5 = 2^2+5 = 9 = 3^2$$

$$\underbrace{1+3+5}_{\text{3 premiers nombres impairs}}+7 = 3^2+7 = 16 = 4^2.$$

Est-ce que $n^2+(2n+1)$ donne toujours $(n+1)^2$ pour tout nombre naturel n ?

d) Quelle propriété des nombres naturels nous permet de conclure que la proposition est vraie pour tout $n > 1$?

e) Vous pouvez lire une preuve de la proposition formulée telle qu'on le fait habituellement en mathématique dans les solutions. Vous pouvez tenter d'écrire une preuve par vous même avant d'aller la lire !

Solutions

Question 1

a) $2 \in \mathbb{N}$
b) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$
c) $\{2\} \subseteq \mathbb{N}$
d) $\{1,2,3\} \subseteq \mathbb{Z}$
e) $\pi \in \mathbb{R}$
f) $]1,2[\subseteq [1,2]$
g) $]1,2[\subseteq \mathbb{R}$

Question 2

a) $\{1,2,3,4,\pi,2\pi\}$
b) $\{1,3\}$
c) $\{\pi,5\}$
d) $[2,8]$
e) $]4,5]$
f) $[2,4]$
g) $\{1,2,3\}$
h) $\{0.5, 3.14159, 3/5\}$
i) $\{\pi, \mathrm{e}, \sqrt{2}\}$

Question 3

a) $[-3,\pi[$
b) $]-\infty,7[$
c) $]0,1/2]$
d) $]-2,2[$

Question 4

a) $\mathbb{Q} \cap]0,1[$
b) $]1,2]$
c) $\mathbb{R}$

Question 5

a) $2+3=5$
b) n est pair iff n est divisible par 2.
c) $x^2+1=(x-1)(x+1)$
d) $x+2=3 \iff x=1$
e) $(x+1)^2=1 \iff x^2+2x+1=1$
f) $x \in [1,3[\iff 1 \le x < 3$
g) $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$
h) $x^2=4 \iff x=2$ ou $x=-2$
i) $AB=0 \iff A=0$ ou $B=0$

Question 6

a) Soient $a=3k$ et $b=3l$ $(k,l \in \mathbb{Z})$ deux multiples de 3 quelconques. Leur somme est
$$a+b=3k+3l=3(k+l).$$
Comme $k+l$ est un nombre entier, $3(k+l)$ est un multiple de 3.

b) Soit $a=2k$ (avec k un nombre entier) un nombre pair quelconque. Son cube est
$$a^3=(2k)^3=2^3k^3=2(2^2k^3),$$
ce qui est aussi un multiple de 2 car $2^2k^3 \in \mathbb{Z}$.

c) Faux. Contre-exemple : la somme de 1 et $1/2$ est $3/2$, qui n'est pas un nombre entier.

d) Soit deux nombre rationnels quelconques $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ (donc avec a, b, c et d de nombres entiers et $b,d \neq 0$). Leur somme est
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$
Comme $ad+bc$ et bd sont des sommes et produits de nombres entiers, ces deux nombres sont aussi entiers. De plus, $bd \neq 0$ car b et d sont non-nuls. On peut dont conclure que $\frac{ad+bc}{db}$ est un nombre rationnel.

Question 7

a) Vrai

b) Faux (car c'est possible pour les nombres réels qui sont rationnels. Il est donc faut que c'est jamais possible)

c) Faux (car $\pi \neq \mathbb{Q}$ et ne peut être écrit comme un nombre rationnel. Le nombre 3.14159265358979 est une bonne approximation de pi, mais il a un développement décimal fini qui correspond donc à un nombre rationnel).

d) Vrai (car $1 \le 2 \le 4$ implique que $\sqrt{1} \le \sqrt{2} \le \sqrt{4}$, donc que $1 \le \sqrt{2} \le 2$).

e) Vrai car un nombre pair est, par définition, un nombre naturel ou un nombre entier, et tout nombre naturel ou entier est réel :
$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}.$$

Question 8

a) $\frac{23}{5}=4.6$
b) $\frac{51}{11}=4.\overline{63}$

Question 9

a) Soit
$$x=0.\overline{123}.$$
On multiplie par 1000 pour obtenir
$$1000x=123.\overline{123}.$$
En soustrayant $1000x-x$, on obtient
$$999x=123$$
et donc
$$x=\frac{123}{999}=\frac{41}{333}.$$

b) Soit
$$y=2.\overline{18}.$$
On multiplie par 100 pour obtenir
$$100y=218.\overline{18}.$$
En soustrayant $100y-y$, on obtient
$$99y=216$$
et donc
$$y=\frac{216}{99}=2411.$$

Question 10

a) Soient n et m deux nombres entiers pairs. Comme ils sont pairs, peut peut les écrire comme
$$n=2p \text{ et } m=2q,$$
où p et q sont deux nombres entiers. Si on les additionne, on obtient
$$\begin{aligned} n+m &= 2p+2q \\ &= 2(p+q) \end{aligned}$$
Comme $p+q$ est un nombre entier, on vient de montrer que $n+m$ est de la forme 2(nombre entier), donc que $n+m$ est pair. CQFD.

b) Soient n et m deux nombres entiers impairs. Comme ils sont impairs, peut peut les écrire comme
$$n=2p+1 \text{ et } m=2q+1,$$
où p et q sont deux nombres entiers. Si on les additionne, on obtient
$$\begin{aligned} n+m &= (2p+1)+(2q+1) \\ &= 2(p+q)+2 \\ &= 2(p+q+1) \end{aligned}$$
Comme $p+q+1$ est un nombre entier, on vient de montrer que $n+m$ est de la forme 2(nombre entier), donc que $n+m$ est pair. CQFD.

Question 11

Si $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel, il peut s'écrire sous la forme d'une fraction simplifiée :
$$\sqrt{3}=\frac{m}{n}.$$
En multipliant par n et en prenant le carré, on obtient
$$3n^2=m^2.$$
m^2 est donc un multiple de trois, et donc m aussi (par le lemme donné). Si $m=3k$, on a en substituant $3k$ à n dans la dernière équation, on obtient l'égalité
$$3n^2=9k^2.$$
En divisant par 3, on obtient
$$n^2=3k^2.$$
Cette fois-ci, n^2 est un multiple de 3, et donc n est aussi un multiple de 3.

Question 12

Si $\log_2(3)$ est une faction, on peut l'écrire comme un fraction déjà simplifiée
$$\log_2(3)=\frac{m}{n}.$$
Par définition des logarithmes, cela est équivalant à dire que
$$3=2^{m/n}.$$
En prenant la puissance n de chaque membre de l'égalité et en simplifiant les exposants avec les propriétés des exposants, on obtient
$$3^n=2^m.$$
Comme 2 et 3 sont des nombres premiers et que la décomposition en facteurs premiers est unique, il est impossible qu'une puissance de 2 soit aussi une puissance de 3 (sans quoi on aurait deux décompositions différentes en facteurs premiers pour un même nombre !). L'hypothèse que $\log_2(3)$ est rationnel est donc fausse et
$$\log_2(3) \notin \mathbb{Q}.$$

Question 13

a)
$$\begin{aligned} 1 &= 1 = 1^2 \\ 1+3 &= 4 = 2^2 \\ 1+3+5 &= 9 = 3^3 \\ 1+3+5+7 &= 16 = 4^2 \end{aligned}$$

Note : produire des exemples de ce type permet de mieux comprendre un énoncé. Face à un nouvel énoncé (proposition, théorème, etc), vous devriez toujours tenter d'écrire par vous même quelques exemples pour être certain de bien comprendre ce qui est dit.

b) Non, les vérifications prouvent uniquement que la proposition est vraie pour $n=1,2,3$ et 4.

Pour démontrer qu'elle est vraie pour n'importe quel nombre n, il faudrait vérifier pour tout les nombres n, ce qui est impossible à faire !

c) Oui car
$$(n+1)^2=n^2+2n+1=n^2+(2n+1).$$

d) Le principe d'induction : on a vérifié en a) que la proposition est vraie pour $n=1$, en c) on a que si la proposition est vraie pour n, alors elle est aussi vraie pour $n+1$.

Les deux conditions du principe d'induction sont donc vraies.

e) *Preuve* Premièrement, si on a une somme comportant seulement le premier nombre impair 1, la somme est 1, qui est le carré de 1.

Ensuite, si on suppose que la proposition est vraie pour un nombre n, montrons qu'elle est vraie pour le nombre $n+1$.

La somme des $n+1$ premier nombres naturels impairs est

$$\begin{aligned} &1+3+5+\cdots+2n-1+2n+1 = \\ &\quad = \underbrace{1+3+5+\cdots+2n-1}_{n\text{premiers nombres impairs}}+2n+1 \\ &\quad = n^2+2n+1 \\ &\quad = (n+1)^2 \end{aligned}$$

Comme la proposition est vraie pour $n=1$ et que si elle est vraie pour n, alors elle est aussi vraie pour $n+1$, le principe d'induction nous permet de conclue qu'elle est vraie pour tout $n > 1$. CQFD