Exercices sur les formules dérivations et quelques applications

Calcul différentiel – Hiver 2020 – Yannick Delbecque

Dérivées de puissances

Question 1

Voici quatre des propriétés de base pour la dérivée.

(D1) $\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ (D3) $\dfrac{d(Cu)}{dx} = C\dfrac{du}{dx}$

(D2) $\dfrac{d(C)}{dx} = 0$ $(C \in \mathbb{R})$ (D4) $\dfrac{d(u+v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

Calculez la dérivée de la fonction $y = \dfrac{x^2}{2} + 2x^5$ en n'utilisant que les propriétés (D1) à (D4) et en spécifiant à chaque étape du calcul quelle propriété est utilisée.

Question 2

Trouver la dérivée des fonctions suivantes à l'aide des propriétés de la dérivée (les « formules de dérivation »). Exprimer le résultat sans utiliser d'exposants fractionnaires ou négatifs.

a) $y = x^9$
b) $y = x^{-12}$
c) $f(x) = x^{7/4}$
d) $y = \dfrac{1}{x^3}$
e) $y = \dfrac{1}{x^6}$
f) $f(x) = \sqrt[5]{x}$
g) $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$
h) $u = \sqrt[5]{x^2}$
i) $y = \dfrac{21}{\sqrt{x^3}}$
j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$
k) $x(t) = \dfrac{3}{7\sqrt[3]{t^5}}$

Question 3

Trouver la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 4$
b) $v(t) = t$
c) $h(x) = 5x^3$
d) $x(t) = \dfrac{3t}{4}$
e) $y = -\dfrac{9}{5\sqrt[4]{x}}$
f) $x(r) = \dfrac{5}{8r}$
g) $f(x) = 8x^3 - 4x^2 + 9x - 1$
h) $y = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}} - 5x^7 + \dfrac{1}{6x^3} - \dfrac{3}{4}$
i) $f(x) = \left(x^2 - 3\right)(4x + 1)$
j) $y = 5\left(2 - x^3\right)^2$
k) $f(x) = (3x+1)^3$
l) $g(t) = 4\left(\dfrac{3}{t^2} + 1\right)\left(1 - t^3\right)$

Question 4

Donner la dérivée de chacune des fonctions au point indiqué.

a) $f(x) = 3x + 1$ au point $(2, 7)$.
b) $s(t) = -t^3 + 2t^2 + 3t - 2$ au point $(-1, -2)$.
c) $y = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{4}{5x^2}$ au point $\left(1, -\frac{2}{15}\right)$.
d) $f(t) = \dfrac{t^3 - 4t}{2}$ au point $(k, f(k))$.

Question 5

Donner l'équation de la droite tangente au graphe de f pour la valeur donnée de x.

a) $f(x) = x^2$, en $x = -2$.
b) $f(x) = x^3$, en $x = 1$.
c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en $x = 1$.
d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en $x = 3$.
e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en $x = \sqrt{2}$.
f) $f(x) = \sqrt{x}$, en $x = 1$.
g) $f(x) = \sqrt{x}$, en $x = 4$.

Question 6

Pour quelle(s) valeur(s) de x la courbe décrite par la fonction $f(x)$ admet-elle une tangente horizontale ?

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.
b) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x$.
c) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - x$.
d) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.
e) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
f) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

Question 7

Déterminer pour quelle valeur de x la fonction quadratique

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - 3x - 1$$

atteint un maximum. (Ind. la tangente est horizontale à un point maximum).

Question 8

Trouver une valeur de x pour laquelle la fonction définie par $y = \dfrac{1}{x^2}$ admet une droite tangente parallèle à la droite $y = \frac{x}{4} - 1$.

Question 9

Trouver deux valeurs de x pour laquelle la fonction $y = x^3 - 3x$ admet une droite tangente perpendiculaire à la droite $y = \frac{3x}{5} - 1$. (Rappel : si deux droites sont perpendiculaires, le produit de leurs pentes est -1.)

Question 10

Utilisez l'approximation d'un fonction par sa droite tangente en $x = a$

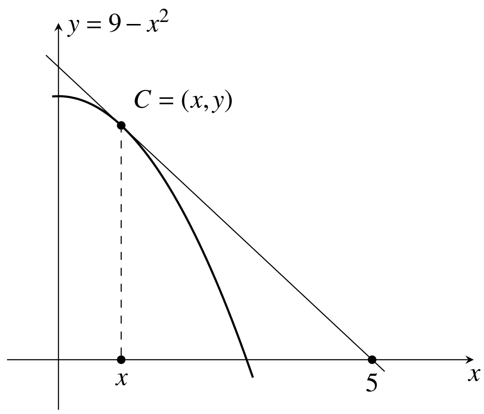
$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

pour trouver une approximation des valeurs demandées pour les fonctions données. Faire une esquisse qui illustre l'approximation qui est faite.

a) $f(x) = x^2$ près de $x = 3$; approximer $f(3.1)$.
b) $f(x) = x^3$ près de $x = 1$; approximer $f(0.9)$.
c) $f(x) = \frac{1}{x}$ près de $x = 10$; approximer $f(11)$.
d) $f(x) = \sqrt{x}$ près de $x = 4$; approximer $f(4.1)$.

Question 11
Illustrer par une esquisse le fait que si $y = x + 2$ est une fonction de x, alors $dy = dx$.

Question 12
Déterminer les coordonnées du point de contact C entre la droite tangente à la parabole d'équation $y = 9 - x^2$ qui passe par le point (0,5) ?



a) Déterminer la pente de la tangente en x en calculant y'.

b) Si les coordonnées de C sont (x, y), déterminer la pente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de la droite passant par (x, y) et $(5, 0)$ en fonction de x.

c) Vous avez calculé en a) et en b) la pente de la droite tangente en C de deux manières différentes. Ces expressions doivent être égales car elles donnent toutes deux la pente de la droite tangente. Déterminer la valeur de x où les deux pentes calculées sont égales.

d) Utiliser la valeur de x trouvée pour déterminer les coordonnées du point C.

e) Pouvez vous tracer la droite tangente passant par $(5, 0)$ correspondant à l'autre solution trouvée en *c*) ?

Question 13
Il y a deux droites passant par le point $(4, 20)$ qui sont tangentes à la parabole donnée par la fonction $y = 8x - x^2$. Trouver les équations de ces droites. Pour vous aider, faire une esquisse de la situation et inspirez vous de la question précédente.

Dérivée de produits et de quotients

Question 14
Calculer la dérivée de $x^2(2x - 1)$ de deux manières différentes : en utilisant la règle de Liebniz et en distribuant x^2 sur $(2x - 1)$. Vérifier que le résultat est le même dans les deux cas.

Question 15
Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la règle de dérivation d'un produit et simplifier le résultat obtenu.

a) $y = (2x - 1)(5x + 1)$

b) $y = (3x + 1)\left(2 - 5x^3\right)$

c) $f(x) = (x^4 + 1)(2x^3 - 3))$

d) $x = \left(\sqrt{t} - t\right)\left(4t^3 - 2t^2 + 5\right)$

e) $y = x(3x - 1) - (2x - 5)\left(4 - 3x^2\right)$

f) $f(x) = (x + 1)(2x + 1)(3x + 1)$

g) $f(x) = x^3\left(5x^2 - 4\right)\left(3 - x^4\right)$

Question 16
Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la règle de dérivation d'un quotient et simplifier le résultat obtenu.

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x + 1}$

c) $y = \dfrac{2x^4}{x^4 + 1}$

d) $d(t) = \dfrac{4t^2 - 5}{5 - 4t^3}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 - x}$

f) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$

Question 17
Donner la dérivée de chacune des fonctions au point indiqué.

a) $f(x) = \dfrac{-x^2 + 6x + 2}{2 - 3x}$ au point $(0, 1)$.

b) $y = \left(t^2 - 3t - 2\right)\left(\sqrt{t} + 2t\right)$ au point $(1, -12)$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^7 - 1} - \dfrac{1}{9 - x^2}$ au point $(-1, -\frac{5}{8})$.

Question 18
Calculer la dérivée des fonctions suivantes **sans utiliser la règle du quotient**.

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 1}{\pi}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{6x^3}$

c) $f(x) = \dfrac{57x^5}{10}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{64x^2}}{48}$

Question 19
Soient u, v et w des fonctions dérivables de x. Montrer que

$$(uvw)' = u'uv + uv'w + uvw'$$

en utilisant le fait que $uvw = (uv)w$ pour écrire le produit de trois facteurs comme une combinaison de produits de deux facteurs.

Question 20
La droite $y = 4x - 17$ est-elle tangente à la courbe de $f(x) = x^2 - 2x - 8$? Si oui, déterminer le point de tangence.

Question 21
Montrer qu'aucune droite de pente 1 n'est tangente à la courbe de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 1}.$$

Question 22
Calculer la dérivée des fonctions suivantes en considérant $n \in \mathbb{N}$ comme une constante naturelle quelconque.

a) $y = \dfrac{1}{x^n}$

b) $y = x^{1/n}$

c) $y = \dfrac{x^n}{x^n - 1}$

d) $y = \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x^2}$

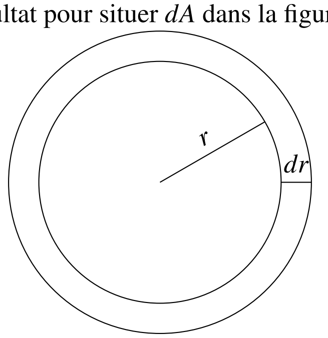
e) $y = \dfrac{\sqrt{x}(10-x)}{x^3-8}$

f) $y = \dfrac{4x^3 - x^2}{(x+1)\sqrt[4]{x}}$

Question 23 (exploration)
L'aire un cercle est relié au rayon par la relation $A = \pi r^2$.

a) Déterminer $\dfrac{dA}{dr}$.

b) Déduisez du résultat obtenu en a) une relation entre dA et dr. Utiliser ce résultat pour situer dA dans la figure ci dessous.



Exercices récapitulatifs

Question 24
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^6$

b) $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt[3]{x}}$

c) $f(x) = \sqrt{x^3}$

d) $y = 8x^3 - 4x^2 + 9x - 1$

e) $f(x) = -4x^8 + \dfrac{x^{-2}}{5} - \dfrac{4}{3}$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3} - x^4 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

g) $y = \dfrac{7}{4x^{3/4}} - \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 4^4$

h) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{\sqrt[5]{x}}{8}$

i) $f(x) = (3x-1)(4-x^3)$

j) $y = \left(\sqrt{x} + x\right)\left(2x - 5x^3 + 9\right)$

k) $f(x) = x^2\left(5x^2 - 1\right)\left(5 - 7x^3\right)$

l) $y = x(3x-2) - (5x-3)(6-2x)$

m) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^3 + 2}$

n) $f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$

o) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 6}{x}$

p) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^3 + 2}$

q) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5}{6 - 2x^4}$

r) $y = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x}$

s) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2 - x}$

t) $f(x) = \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{x+2}{x^2}$

u) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}(6-x)}{x^2 - 4}$

Question 25
La droite $y = 4x - 17$ est-elle tangente à la courbe de $f(x) = x^2 - 2x - 8$? Si oui, déterminer le point de tangence.

Question 26
Lors d'un test de collision, une voiture se déplace en ligne droite vers un mur situé à 90 m du point de départ de la voiture. La position s de la voiture (en mètres) à partir de son point de départ t secondes après son départ est donnée par $s(t) = 4t + \dfrac{t^2}{2}$.

a) À quelle distance du mur la voiture se trouve-t-elle 2 s après son départ ?

b) Quelle est sa vitesse 2 secondes après son départ ?

c) À quelle distance du mur la voiture se trouve-t-elle lorsque sa vitesse est de 30 km/h ?

d) Combien de temps lui faut-il avant d'entrer en collision avec le mur ?

e) Quelle est sa vitesse lors de l'impact ?

f) Quelle est son accélération au moment de l'impact ?

Question 27
Supposons que durant les deux premières années de sa vie, la masse (en kilogrammes) d'un bébé en fonction du temps t (en mois) écoulé depuis sa naissance est donnée par la fonction $m(t) = \sqrt{12 + 7t}$.

a) Quelle est la masse du bébé à sa naissance ?

b) Évaluer l'expression $\dfrac{m(8) - m(5)}{3}$ et en donner un interprétation.

c) Quelle fonction donne le taux de croissance instantané de la masse du bébé ?

d) Quel est le taux de croissance instantané de la masse du bébé lorsque celui-ci est âgé de 9 mois ? Interpréter.

e) Le bébé grossit-il plus rapidement à 3 mois ou à 9 mois ?

Question 28
En supposant connue la formule donnant la dérivée d'un produit de deux fonctions, démontrer que

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(f(x))^2}.$$

Question 29
Trouver la valeur que l'on doit donner à la constante k pour que la courbe d'équation $y = -x^2 + kx$ soit tangente à la droite $y = x + 4$. (Indice : faire un dessin de la situation pour déterminer sous quelles conditions ce qui est demandé est possible.)

Question 30
Démontrer que $(x^n)' = nx^{x-1}$ en utilisant la formule généralisée du produit de n fonctions :

$$\left(u_1 \cdots u_n\right)' = u_1' u_2 \cdots u_n + u_1 u_2' u_3 \cdots u_n + \cdots + u_1 \cdots u_{n-1} u_n'.$$

Ind. Utiliser le fait que x^n est le le produit $\underbrace{x \cdots x}_{n \text{ fois}}$.

Solutions

Question 1

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2}{2}+2x^5\right)' &= \left(\frac{1}{2}\left(x^2\right)'+\left(2x^5\right)'\right) \quad (D4)\\ &= \frac{1}{2}\left(x^2\right)'+2\left(x^5\right)' \quad (D3)\\ &= \frac{1}{2}\left(2x\right)+2\left(5x^4\right) \quad (D1)\\ &= x+10x^4.\end{aligned}$$

Question 2

a) $\frac{dy}{dx} = 9x^8$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{-12}{x^{13}}$

c) $f'(x) = \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}}$

d) $y' = \frac{-3}{x^4}$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{-6}{x^7}$

f) $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

g) $$\begin{aligned}g'(t) &= \left(t^{-1/2}\right)'\\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)t^{-\frac{1}{2}-1}\\ &= -\frac{1}{2}t^{\frac{3}{2}}\\ &= -\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\end{aligned}$$

h) $\frac{du}{dx} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

i) $$\begin{aligned}y' &= \left(21x^{-3/2}\right)\\ &= 21\left(x^{-3/2}\right)\\ &= 21\left(\frac{-3}{2}\right)x^{-5/2}\\ &= -\frac{63}{2\sqrt{x^5}}\end{aligned}$$

j) $f'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

k) $$\begin{aligned}x'(t) &= \frac{3}{7}\left(\frac{-5}{3}\right)t^{-8/3}\\ &= \frac{-5}{7\sqrt[3]{t^8}}\end{aligned}$$

Question 3

a) $f'(x) = 0$

b) $v'(t) = 1$

c) $h'(x) = 15x^2$

d) $x'(t) = \frac{3}{4}$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{20\sqrt[4]{x^5}}$

f) $x'(r) = -\frac{5}{8r^2}$

g) $f'(x) = 24x^2-8x+9$

h) $\frac{dy}{dx} = \frac{-8}{3\sqrt[3]{x^5}} - 35x^6 - \frac{1}{2x^4}$

i) $f'(x) = 12x^2+2x-12$

j) $\frac{dy}{dx} = -30x^2\left(2-x^3\right)$

k) $f'(x) = 81x^2+54x+9$

l) $g'(t) = -12t^2-12-\frac{24}{t^3}$

Question 4

a) $f'(x) = 3$. Au point $(2,7)$, $x=2$, donc la dérivée en $x=2$ est $f'(2)-3$

b) $s'(t) = -3t^2+4t+3$, donc $s'(-1) = -4$

c) $\frac{14}{15}$

d) $\frac{3k^2}{2}-2$

Question 5

a) La dérivée de f est $f'(x) = x^2$. La pente de la tangente en $x=-2$ est $f'(-2)=4$. On cherche l'équation de la droite de pente 4 qui passe par $(-2, f(-2)) = (-2,4)$ et on trouve $y=-4x-4$.

b) $y = 3x-2$

c) $y = -x+2$

d) $y = -\frac{x}{9}+\frac{2}{3}$

e) $y = -\frac{x}{2}+\sqrt{2}$

f) $y = \frac{x}{2}+\frac{1}{2}$

g) $y = \frac{x}{4}+1$

Question 6

a) Comme un tangente horizontale est de pente 0 et que la pente de la tangente est donnée par f', on cherche x tel que $f'(x)=0$. On trouve que $f'(x) = 0$ si $x = \frac{2}{3}$

b) $f'(x) = 0$ si $x = 1$

c) $f'(x) = 0$ si $x = 1$ ou $x = -1$

d) $f'(x) = 0$ si $x = -2$ et $x = 1$

e) $f'(x) = 0$ si $x = -1$ et $x = 1$

f) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = -\frac{x+2}{x^3}$. $f'(x) = 0$ si $x = -2$

Question 7

La fonction dérivée est

$$f'(x) = \frac{x}{2}-3.$$

Si la tangente est horizontale au maximum, elle doit être de pente 0. On doit donc avoir que $f'(x)=0$, c'est-à-dire que

$$\frac{x}{2}-3 = 0.$$

En isolant x, on trouve que $x=6$.

Question 8

Rappel : deux droites sont parallèle si elles ont la même pente. La pente de la droite définie par $y = \frac{x}{4}-1$ est $\frac{1}{4}$. On cherche x tel que la pente de la tengante à la fonction donnée est $\frac{1}{4}$. La pente de la tangente en x est $y' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{-2}\right)' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

On résout $y' = \frac{1}{4}$:

$$-\frac{2}{x^3} = \frac{1}{4}.$$

On trouve que $x = -2$

Question 9

$x = -\frac{2}{3}$ et $x = \frac{2}{3}$

Question 10

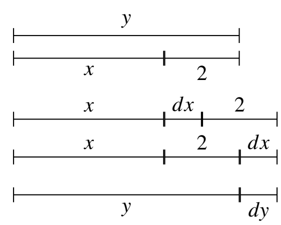
a) $f(x) \approx 9+6(x-3)$
$f(3.1) \approx 9+6(3.1-3) = 9+0.6 = 9.6$

b) $f(x) \approx 1+3(x-1)$
$f(0.9) \approx 1+3(0.9-1) = 1-0.3 = 0.7$

c) $f(x) \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{100}(x-10)$;
$f(11) \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{100}(11-10) = \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = \frac{9}{100} = 0.09$

d) $f(x) \approx 2+\frac{1}{4}(x-4)$;
$f(4.1) \approx 2+\frac{1}{4}(4.1-4) = 2+\frac{0.1}{4} = 2.025$

Question 11



Question 12

a) $y' = -2x$

b) $$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y-0}{x-5}\\ &= \frac{y}{x-5}\\ &= \frac{9-x^2}{x-5}\end{aligned}$$

c) Résoudre

$$\frac{9-x^2}{x-5} = -2x$$

revient à résoudre l'équation polynômiale

$$x^2-10x+9 = 0.$$

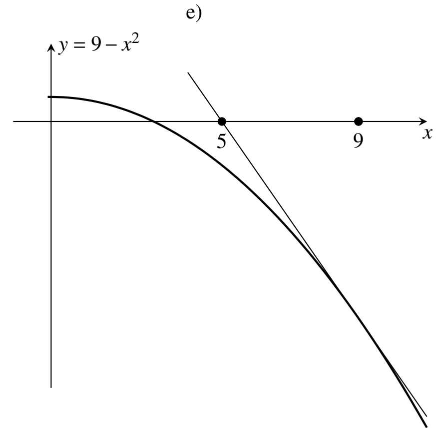
En factorisant, on trouve que

$$x = 1 \text{ ou } x = 9.$$

On ne considère que la solution $x=1$ car elle se trouve entre 0 et 3, comme indiqué dans la figure donnée dans la questions. L'autre solution correspond à une autre droite tangente à la parabole, mais en $x=9$.

d) Comme $x=1$, la coordonnée en y est $y = 9-x^2 = 8$. Le point C est dont $(1,8)$.

e)



Question 13

Considérez l'équation $y = ax + b$ d'une droite de paramètres indéterminés a et b. et trouver les valeurs des paramètres nécessaires pour que la droite passe par le point $(4,20)$ et un point de la courbe $y = 8x - x^2$.

Chercher ce qui doit se produire au point de tangence pour que la droite soit tangente à la courbe. (La pente de la tangente est donnée est la valeur de la dérivée au point de tangence !)

Les équations des deux droites sont $y = 4x + 4$ et $y = -4x + 36$.

Question 14

La dérivée est $6x^2 - 2x$.

Question 15

a) $\dfrac{dy}{dx} = (2)(5x+1) + (2x-1)(5) = 20x - 3$

b) $\dfrac{dy}{dx} = (3)(2-5x^3) + (3x+1)(-15x^2)$
$= -60x^3 - 15x^2 + 6$

c) $f'(x) = 4(2x-3)x^3 + 2x^4 + 2$
$= 10x^4 - 12x^3 + 2$

d) $x'(t) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{t}} - 1\right)\left(4t^3 - 2t^2 + 5\right) + \left(\sqrt{t} - t\right)\left(12t^2 - 4t\right)$
$= 14\sqrt{t^5} - 5\sqrt{t^3} + \dfrac{5}{2\sqrt{t}} - 16t^3 + 6t^2 - 5$

e) $\dfrac{dy}{dx} = (1)(3x-1) + x(3) + (2)(4-3x^2) + (2x-5)(-6x)$
$= 18x^2 - 24x - 9$

f) $f'(x) = (2x+1)(3x+1) + (x+1)(2)(3x+1) +$
$(x+1)(2x+1)(3)$
$= 18x^2 + 22x + 6$

g) $f'(x) = 3x^2\left(5x^2-4\right)\left(3-x^4\right) +$
$x^3(10x)\left(3-x^4\right) + x^3\left(5x^2-4\right)\left(-4x^3\right)$
$= -45x^8 + 28x^6 + 75x^4 - 36x^2$

Question 16

a) $y' = \dfrac{2x(x^2+1) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}.$

b) $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}.$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{8x^3}{(x^4+1)^2}.$

d) $d'(t) = \dfrac{4t\left(4t^3 - 15t + 10\right)}{\left(5 - 4t^3\right)^2}.$

e) $f'(x) = \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}(1-x)^2}.$

f) $f'(x) = \dfrac{x-1}{2\sqrt{x^3}}.$

Question 17

a) $f'(0) = \dfrac{9}{2}$

b) $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=1} = -13$

c) $f'(-1) = -\dfrac{110}{64}$

Question 18

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 3}{\pi}$

b) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{6} - \dfrac{1}{2} + x^2$

c) $f'(x) = \dfrac{57x^4}{2}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{18\sqrt[3]{x}}$

Question 19

$$\begin{aligned}(uvw)' &= ((uv)w)'\\ &= (uv)'w + (uv)w'\\ &= (u'v + uv')w + (uv)w'\\ &= u'vw + uv'w + uvw'\end{aligned}$$

Question 20

Oui, au point $(3,-5)$.

Question 21

Il faut montrer que la dérivée de f est différente de 1 pour toute valeur de x. On cherche donc à montrer que

$$f'(x) = 1$$

n'a aucune solution. On trouve en dérivant que $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. L'équation à résoudre est donc

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 1.$$

$$\begin{aligned}x(x-2) &= (x-1)^2\\ x^2 - 2x &= x^2 - 2x + 1\\ 0 &= 1\end{aligned}$$

qui n'a pas de solution. Il n'y a donc aucune valeur de x telle que la pente de la tangente $f'(x)$ soit 1.

Question 22

a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{nx^{(n-1)/(n)}}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-nx^{n-1}}{(x^n-1)^2}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{x+2}{x^3} = -\dfrac{2x^2+5x-2}{x^3(x+1)^2}$

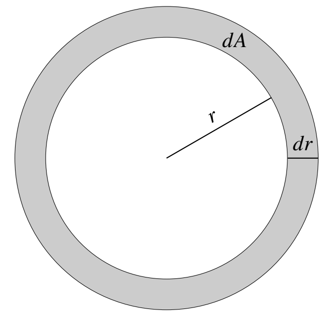
e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^4 - 50x^3 + 24x - 80}{2\sqrt{x}(x^3-8)^2}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}\left(28x^2 + 41x - 7\right)}{4(x+1)^2}$

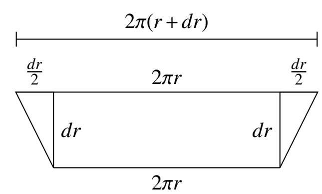
Question 23

a) $\dfrac{dA}{dr} = 2\pi r$

b) $dA = 2\pi r\,dr$. L'aire dA est la variation de l'aire quand le rayon va de r à $r + dr$. C'est celle de la bande circulaire de largeur dr dans la figure ci dessous.



Si on « déplie » la bande circulaire, on obtient un trapèze dont la petite base est de longueur $2\pi r$ (la circonférence du cercle intérieur) et la grande base est de longueur $2\pi(r + dr)$ (la circonférence du cercle extérieur, de rayon $r + dr$).



Les petits triangles à chaque bout du trapèze on une aire de $dr^2/4$, que l'on peut négliger si dr est très petit. L'aire dA est donc approximativement l'aire du rectangle central, qui est

$$dA = 2\pi r\,dr.$$

Question 24

a) $f'(x) = 6x^5$

b) $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}$

c) $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$

d) $y' = 24x^2 - 8x + 9$

e) $f'(x) = -32x^7 - \dfrac{2}{5x^3}$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{6\sqrt{x}} - 4x^3 + \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$

g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-21}{16x^{\frac{7}{4}}} - x^{\frac{3}{2}}$

h) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{x^3}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^4}} + \dfrac{1}{40\sqrt[5]{x^4}}$

i) $f'(x) = 3(-4x^3 + x^2 + 4)$

j) $y' = -20x^3 - \dfrac{35\sqrt{x^5}}{2} + 4x + 3\sqrt{x} + \dfrac{9}{2\sqrt{x}} + 9$

k) $f'(x) = -5x(49x^5 - 7x^3 - 20x^2 + 2)$

l) $y' = 2(13x - 19)$

m) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{(x^3+2)^2}$

n) $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$

o) $f'(x) = \dfrac{-6}{x^2} + 2x - 1$

p) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{(x^3+2)^2}$

q) $f'(x) = \dfrac{2x(2x^4 - 5x^2 + 6}{(x^4-3)^2}$

r) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sqrt{x}+2}{2x^2}$

s) $f'(x) = \dfrac{x+2}{2\sqrt{x}(x-2)^2}$

t) $f'(x) = \dfrac{x^3 - 8x^2 - 20x - 16}{x^3(x+2)^2}$

u) $f'(x) = \dfrac{x^3 - 18x^2 + 12x - 24}{2\sqrt{x}(x^2-4)^2}$

Question 25

Oui, au point $(3,-5)$. La dérivée est $f'(x) = 2x-2$. La pente de la droite est 4. Si la droite est tangente à la fonction, la dérivée (la pente de la tangente) doit être la pente de la droite.

$$2x-2=4$$

En isolant, on trouve que $x = 3$. On trouve le point de tangence en calculant $y = f(3) = -5$.

Il faut enfin vérifier que la droite passe bien par se point (car on s'est seulement assuré que la pente de la tangente est la pente de la droite, elle sont parallèle mais on n'en sait pas plus). La droite passe par $(3,-5)$ car

$$4(3)-17=-5.$$

Question 26

a) 80 m
b) 6 m/s (21,6 km/h)
c) 43,27 m
d) 10 s
e) 14 m/s (50,4 km/h)
f) 1 m/s² (12,96 km/h²)

Question 27

a) $\sqrt{12}$ kg

b) Entre l'âge de 5 mois et 8 mois, la masse de ce bébé a augmenté à un taux moyen de $\dfrac{\sqrt{68}-\sqrt{47}}{3}$ kg/mois $\approx 0{,}4635$ kg/mois.

c) $m'(t) = \dfrac{7}{2\sqrt{12+7t}}$.

d) À l'âge d'exactement 9 mois, le bébé grossit à un taux de

$$m'(9) = \frac{7}{2\sqrt{75}} \text{ kg/mois.}$$

e) Le bébé grossi plus rapidement à 3 mois, car

$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{t=3} > \left.\frac{dm}{dt}\right|_{t=9}.$$

Question 28

Laissé à l'étudiant ou l'étudiante. Indice : transformer le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en produit $f(x)\dfrac{1}{g(x)}$ et utiliser la formule de dérivation d'un produit.

Question 29

$k = -3$ ou $k = 5$

Question 30

Laissé à l'étudiant ou l'étudiante. Une preuve rigoureuse complête nécessiterait l'utilisation du principe d'induction, mais vous pouvez trouver l'idée générale sans utiliser ce principe.