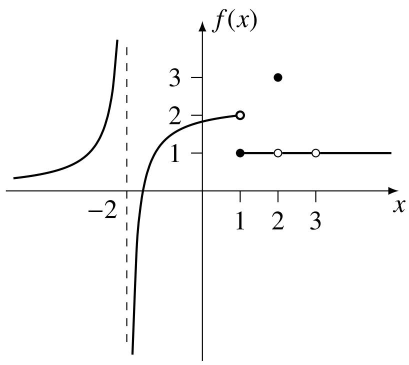
Exercices sur les limites et la continuité.

Fonctions définies par morceaux

Question 1
Soit f la fonction ayant le graphe suivant. Évaluer les expressions suivantes.



a) $f(-2)$ c) $f(3/2)$ e) $f(3)$

b) $f(1)$ d) $f(2)$ f) $f(\pi)$

Question 2
Soit f la fonction définie de la manière suivante.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -2 \\ -x & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

a) Évaluer $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(1/2)$, $f(1)$, $f(2)$.

b) Quel est le domaine de f ?

c) Faire une esquisse du graphe de f.

Question 3
Soit f la fonction définie de la manière suivante.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

a) Évaluer $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

b) Quel est le domaine de f ?

Question 4
La fonction *valeur absolue* est la fonction définie de la manière suivante.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) Évaluer $|2|$, $|0|$, $|-3|$.

b) Faire le graphe de la fonction définie par $f(x) = |x|$.

c) Quel est le domaine de la fonction valeur absolue ?

d) Est-ce que la fonction valeur absolue admet une fonction inverse ?

e) Montrer que $|x| = \sqrt{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (ind. Séparer le raisonnement en deux cas : $x \geq 0$ et $x < 0$.)

f) Montrer que $|ab| = |a||b|$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. (Ind. Utiliser le résultat précédent et les propriétés des exposants).

g) Montrer à l'aide d'un exemple que $|a+b| = |a| + |b|$ n'est pas vrai pour n'importe quels nombres réels a et b. Dans quel cas l'égalité est-elle vraie ?

Limites

Question 5
En utilisant le tableau de valeurs donné, déterminer la valeur de la limite

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

et comparer le résultat avec $f(a)$.

a) $\lim_{x \to 2} x^3$

x	$f(x)$
3.00000000000000	27.0000000000000
2.00097656250000	8.01172447297722
2.00001693508781	8.00020322277449
2.00000095367432	8.00001144409725
2.00000010240000	8.00000122880006
2.00000001653817	8.00000019845806
2.00000000354013	8.00000004248160
2.00000000093132	8.00000001117587
2.00000000028680	8.00000000344157
2.00000000010000	8.00000000120000

b) $\lim_{x \to -2^-} x^2 - 4$

x	$f(x)$
-3.00000000000000	5.00000000000000
-2.03125000000000	0.125976562500000
-2.00411522633745	0.0164778404376023
-2.00097656250000	0.00390720367431641
-2.00032000000000	0.00128010239999909
-2.00012860082305	0.000514419830352608
-2.00005949901827	0.000237999613197815
-2.00003051757812	0.000122071243822575
-2.00001693508781	0.0000677406380313883
-2.00001000000000	0.0000400001000002703

c) $\lim_{x\to -2^+} x^2 - 4$

x	$f(x)$
-1.00000	-3.00000
-1.93750	-0.246094
-1.98765	-0.0492303
-1.99609	-0.0156097
-1.99840	-0.00639749
-1.99923	-0.00308609
-1.99958	-0.00166583
-1.99976	-0.000976562
-1.99985	-0.000609875
-1.99990	-0.000400066

d) $\lim_{x\to -2} x^2 - 4$

x	$f(x)$
-1.00000	-3.00000
-2.06250	0.253906
-1.98765	-0.0492303
-2.00391	0.0156403
-1.99840	-0.00639749
-2.00077	0.00308657
-1.99958	-0.00166583
-2.00024	0.000976562
-1.99985	-0.000609875
-2.00010	0.000399590

e) $\lim_{x\to 2} \sqrt{x-2}$

x	$f(x)$
3.00000	1.00000
2.03125	0.176777
2.00412	0.0641509
2.00098	0.0312500
2.00032	0.0178874
2.00013	0.0113361
2.00006	0.00772040
2.00003	0.00552427
2.00002	0.00411433
2.00001	0.00316442

f) $\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2-9}$

x	$f(x)$
4.00000	2.64575
3.03125	0.434139
3.00412	0.157190
3.00098	0.0765528
3.00032	0.0438149
3.00013	0.0277763
3.00006	0.0189111
3.00003	0.0135316
3.00002	0.0101016
3.00001	0.00775122

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

x	$f(x)$
0	1.00
4	0.200
9	0.100
29	0.0333
49	0.020
69	0.014
99	0.010
999	0.0001

h) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$

x	$f(x)$
-1.00000000000000	-1
-0.0312500000000000	-32
-0.00411522633744856	-243
-0.000976562500000000	-1024
-0.000320000000000000	-3125
-0.000128600823045268	-7776
-0.0000594990182661986	-16807
-0.0000305175781250000	-32768
-0.0000169350878084303	-59049
-0.0000100000000000000	-100000

i) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

x	$f(x)$
1	1
-0.0312500	-32
0.00411523	243
-0.000976562	-1024
0.000320000	3125
-0.000128601	-7776
0.0000594990	16807
-0.0000305176	-32768
0.0000169351	59049
-0.0000100000	-100000

j) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

x	$f(x)$
0.000000	1.00000
1.03125	0.492308
0.995885	0.501031
1.00098	0.499756
0.999680	0.500093
1.00013	0.500000
0.999941	0.500000
1.00003	0.500000
0.999983	0.500000
1.00001	0.500000

k) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x^2-1}$

x	$f(x) \approx$
-1.1250	-8
-1.0370	-27
-1.0156	-64
-1.0080	-125
-1.0046	-216
-1.0029	-343
-1.0020	-512
-1.0013	-729
-1.0010	-1000

Question 6
Déterminer la valeur des limites $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ suivantes avec un tableau de valeurs et comparer avec la valeur de $f(a)$.

a) $\displaystyle\lim_{x\to -3} x^3$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x-2$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -1} x^3+1$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \sqrt{x-2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \sqrt{x-2}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-1}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

Question 7
Pour chacune des fonctions suivantes, trouver intuitivement (soit en faisant une esquisse du graphique ou en tentant une approche numérique) les limites

$$\lim_{x\to 0} f(x) \text{ et } \lim_{x\to 3^+} f(x).$$

a) $f(x) = x^2$

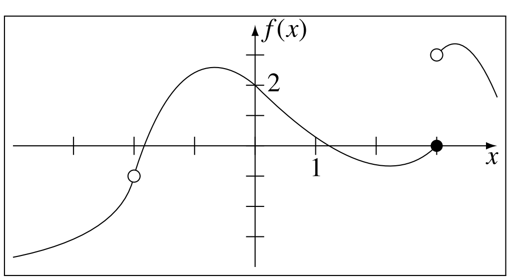
b) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$

Question 8
Évaluer, s'ils existent, les nombres suivants en se basant sur le graphique de la fonction f.



a) $f(-2)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to(-2)^-} f(x)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to(-2)^+} f(x)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to -2} f(x)$

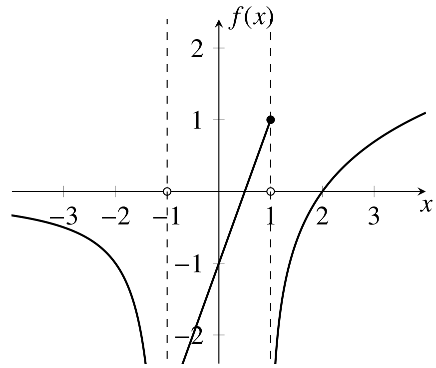
e) $f(3)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x)$

Question 9
Déterminer les valeurs suivantes à l'aide du graphique donné.



a) $f(-1)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to(-1)^-} f(x)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -2} f(x)$

d) $f(1)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$

Question 10
Pour chacun des cas ci-dessous, tracer l'esquisse d'une fonction ayant les propriétés indiquées.

a) $f(0) = -5$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 6$

b) $f(-4)\nexists$ et $\displaystyle\lim_{x\to -4} f(x) = 2$

c) $f(3) = 8$ et $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x) = 0$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 8} f(x)\nexists$

e) $\displaystyle\lim_{x\to(-10)^-} f(x) = \infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to(-10)^+} f(x) = -\infty$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 5} f(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$

g) $f(5) = -5$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

Évaluation de limites

Question 11
Quatre des propriétés de base pour l'évaluation de limites sont les suivantes :

(AL1) $\displaystyle\lim_{x\to a} C = C$ (C = constante)

(AL2) $\displaystyle\lim_{x\to a} x = a$

(AL3) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$, si les deux limites du membre de droite existent.

(AL4) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$, si les deux limites du membre de droite existent.

Évaluer la limite

$$\lim_{x \to 2} 3x^2 + 1$$

en n'utilisant que les propriétés (AL1) à (AL4) et en disant à chaque étape quelle propriété est utilisée.

Question 12
Démontrer que

$$\lim_{x\to a} f(x)-g(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

si les limites du membre de droite existent en n'utilisant que les quatre propriétés des limites données à la question précédente. À chaque étape de votre démonstration, indiquer quelle propriété est utilisée.

Question 13
Évaluer, si possible, les limites demandées en utilise les propriétés des limites et en sachant que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 5 \qquad \lim_{x\to 1} g(x) = -3$$
$$\lim_{x\to 5} h(x) = 10 \qquad \lim_{x\to 5} g(x) = 7.$$

a) $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+g(x))$

b) $\lim\limits_{x\to 1} 3f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 1}(3f(x)-2g(x))$

d) $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+h(x))$

e) $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)\cdot g(x))$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} g(f(x))$

h) $\lim\limits_{x\to 1} f(g(x))$

Question 14
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 3} 2x-1$

b) $\lim\limits_{x\to 2} x^3-x^2+2x-1$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{3-x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2-x)^2}{4+x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)(x+1)$

h) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x+1}}$

Question 15
Soit la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ 3-x & \text{si } 0\le x<3 \\ 2x-6 & \text{si } x>3. \end{cases}$$

Déterminer les quantités suivantes.

a) $f(0)$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

e) $f(1)$

f) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

g) $f(3)$

h) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

i) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

j) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

k) $f(5)$

l) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

Question 16
De quel(s) côté(s) les limites suivantes existent elles ?

a) $\lim\limits_{x\to 5^\pm}\sqrt{x-5}$

b) $\lim\limits_{x\to (-\frac{2}{3})^\pm}\sqrt{2+3x}$

c) $\lim\limits_{x\to 8^\pm}\sqrt[3]{8-x}$

d) $\lim\limits_{x\to 2^\pm}\sqrt[6]{-x^2-x+6}$

e) $\lim\limits_{x\to (-3)^\pm}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x+3}}$

Question 17
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x^2-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x^2-2x-3}$

e) $\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{x^2-2x-3}$

f) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^2-2x-3}$

g) $\lim\limits_{x\to (-1)^+}\sqrt{x^2-2x-3}$

h) $\lim\limits_{x\to (-1)^-}\sqrt{x^2-2x-3}$

i) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x^2-2x-3}$

Question 18
Trouver, si possible, des fonctions f et g satisfaisant les conditions suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 5}[f(x)g(x)] = 4$

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\nexists, \lim\limits_{x\to 1} g(x)\nexists,$ mais $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}\exists$

Question 19
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-x+3}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to (-4)^-}\sqrt{x+4}$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-5x-14}{x^2+6x+8}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x^2-2x}$

e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+4)(2x-3)}{x^7+2x^6+x^3}$

f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{3-x}$

g) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x^2+4x+3}$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\frac{1}{x}-1}$

i) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{3}{x^2-1}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+2x}-\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{2-x^3}-\sqrt{2+x}}$

Continuité

Question 20
Évaluer les limites suivantes en indiquant à quelles étapes où vous utilisez la continuité et quel type de fonction est impliqué. Si vous ne pouvez pas utiliser la continuité, dite pourquoi.

a) $\lim\limits_{x\to 3} x^2+x+1$

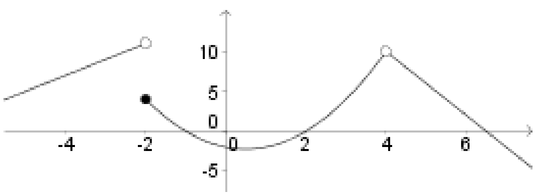
b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3}{x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3}{x+1}$

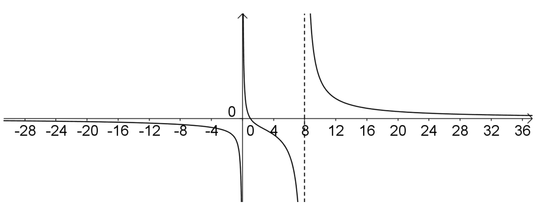
d) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x-1}$

Question 21
Pour chacune des fonctions suivantes, donner tous les points de discontinuité et indiquer le type de discontinuité.

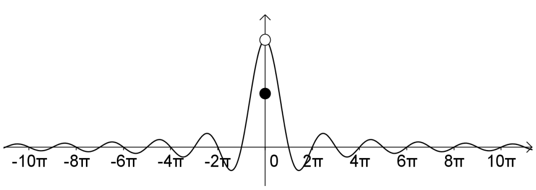
a)



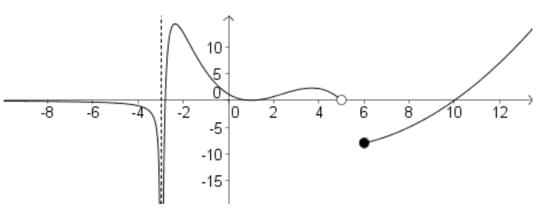
b)



c)



d)



Question 22
On dit qu'une fonction f est continue à gauche en $x = a$ si

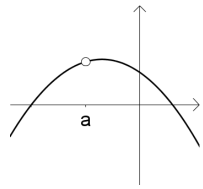
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

et on dit qu'une fonction f est continue à droite en $x = a$ si

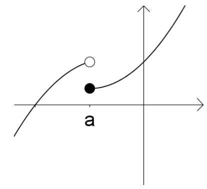
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$

Dans chacun des cas suivants, dire si f est continue, continue à gauche, continue à droite ou discontinue au point $x = a$.

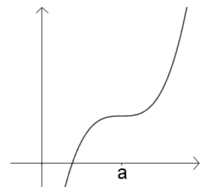
a)



c)

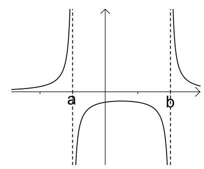


b)

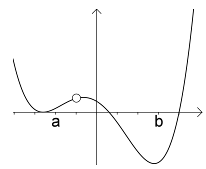


Question 23
Soient les fonctions illustrées ci-dessous.

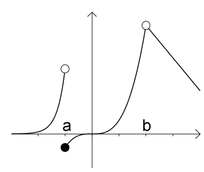
(i)



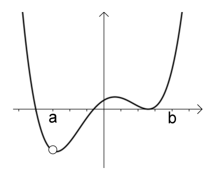
(iv)



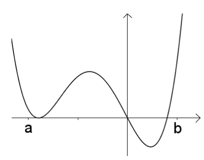
(ii)



(v)



(iii)



a) Quelle(s) fonctions sont continues sur l'intervalle $]a,b[$?

b) Quelle(s) fonctions sont continues sur l'intervalle $[a,b[$?

c) Quelle(s) fonctions sont continues sur l'intervalle $]a,b]$?

d) Quelle(s) fonctions sont continues sur l'intervalle $[a,b]$?

Question 24
Trouver toutes les discontinuités des fonctions données.

a) $f(x) = 4x^3-2x^2+5$

b) $f(x) = \dfrac{6x+15}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1/2}}{x^2-1}$

Question 25
Trouver toutes les discontinuités des fonctions données.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2+4x & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{-12x}{x-3} & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x+2} & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-2x-3} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x-2}{x^2-1} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

Question 26
Déterminer les intervalles où les fonctions suivantes sont continues ?

a) $f(x) = \sqrt{x-3}$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = x^{1/2}$

d) $f(x) = x^{1/3}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ \frac{2(x^2+3x-4)}{x^2-1} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -5 & \text{si } x = 1 \\ -4-x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Question 27

Soit f la fonction suivante : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{(x-2)(x+1)} & \text{si } x < 2, \\ \frac{x}{2}+\frac{1}{3} & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \\ 2 & \text{si } 3 < x. \end{cases}$

a) Donner la définition de continuité d'une fonction f en $x = a$.

b) Déterminer si f est continue en $x = 1$.

c) Déterminer si f est continue en $x = 2$.

d) Est-ce que f est continue en tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$?

Question 28
Une compagnie de transport de colis définit son tarif comme suit : 2 \$ pour un colis de 1 kg ou moins ; pour un colis dont la masse se situe entre 1 kg et 10 kg, le coût en dollars est égal au double de la masse en kg ; pour un colis de 10 kg ou plus, le coût est égal au carré de la masse.

a) Donner la fonction déterminant le coût de transport en fonction de la masse du colis.

b) Quel est le domaine de cette fonction ?

c) Cette fonction est-elle continue sur son domaine ?

Question 29
Au Québec en 2008, tout citoyen ayant un revenu inférieur à 37500 \$ doit payer 16 % de son revenu en impôt. Si le revenu est de 37500 \$ ou plus, mais ne dépasse pas 75000 \$, l'impôt sera de 6000 \$ plus 20 % de ce qui excède 37500 \$. Pour un revenu de 75000 \$ ou plus, l'impôt à payer est de 13500 \$ plus 24 % de ce qui excède 75000 \$.

Certaines personnes disent que ce mode d'imposition est injuste car certains citoyens auront des revenus semblables mais paieront des impôts très différents. Ont-ils raison ? Justifier votre réponse. (*Indice : construire d'abord la fonction donnant l'impôt à payer en fonction du revenu, puis l'analyser.*)

Question 30
Si possible, attribuer une valeur à la constante k qui rendra f continue en tout point.

a) $f(x) = \begin{cases} 7x-2 & \text{si } x \leq -1 \\ kx^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x+k & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 9-x^2 & \text{si } x \leq -3 \\ \dfrac{k}{x^2} & \text{si } x > -3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 9-x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{k}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Formes indéterminées « $\frac{0}{0}$ »

Question 31
Dans le contexte de l'étude des limites, quelle est la différence entre les expressions « n'existe pas » et « indéterminée » ?

Question 32
Le *principe de localité* dit que si deux fonctions $F(x)$ et $G(x)$ sont identiques près de a (sauf peut-être en a), alors $\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} G(x)$ si la limite du membre de droite existe.

Indiquer à quelle égalité du raisonnement suivant on utilise le principe de localité.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^3-8} &\overset{(1)}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \\ &\overset{(2)}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)}{(x^2+2x+4)} \\ &\overset{(3)}{=} \frac{(2+2)}{(2^2+2(2)+4)} \\ &\overset{(4)}{=} \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Question 33
Évaluer la limite suivante en indiquant à quelle(s) étape(s) vous utilisez la continuité.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+3x^2+5x+3}{x^3+x^2+4x+4}$$

Question 34
Donner un exemple de graphe de fonction telle que $f(a)$ est défini et f n'est pas continue en $x = a$.

Question 35
Évaluer les limites suivante en levant l'indétermination.

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{x-5}$

b) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}$

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{(x-5)(x+1)}$

d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-x-12}{16-x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-x^3+3x^2-x+3}{x^2-9}$

f) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+6}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+13x}{2x^2+x}$

h) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-4x^2-x+12}{2x^3-x-51}$

Question 36
Évaluer les limites suivantes en mettant au dénominateur commun.

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{9-x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} \dfrac{\sqrt{2}-x}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}}$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{5}}$

f) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x+2}-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{9}}{x^2-9}$

h) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{27}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}$

Question 37
Évaluer les limites suivantes en simplifiant le facteur problématique.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+2x-8}$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-10x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2x}{x^3-x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^4-81}{x-3}$

f) $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{\dfrac{2x^2+7x+5}{x+1}}$

g) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\frac{1}{x+3}+\frac{x^2-1}{2x+1}}{x-\frac{x-2}{x+4}}$

h) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{3+\frac{x^2-16}{x^2+x-12}}{x+1}$

Question 38
Utiliser le conjugué pour simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{-4}{1-\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$ c) $\dfrac{5-2x}{2+\sqrt{3x+1}}$

Question 39
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

b) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$

c) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{2-\sqrt{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x^2-4x-5}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$

g) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

Question 40
Évaluer les limites.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+x-1}-1}{x^3-2x^2+5x-4}$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x-8}{\sqrt{x+2}-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{4x-2}}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-\sqrt{3-x}}{\frac{2}{x-4}+(x-1)}$

Question 41

a) Calculer la valeur de $\sin(x)$ pour les valeurs suivantes de x

$$1 \quad 0,5 \quad 0,25 \quad 0,1 \quad 0,01 \quad 0.001.$$

(Attention : angles en radians !) Que peut-on remarquer ?

b) Selon les calculs précédents, vers quelle valeur semble s'approcher $\dfrac{\sin(x)}{x}$ lorsque x devient de plus en plus proche de 0 ?

c) Écrire le résultat précédent à l'aide de la notation usuelle des limites.

Rappelons que ces observations sur quelques cas ne sont pas suffisantes pour tirer une conclusion générale.

Dans les cours qui suivront, nous ferons une démonstration plus rigoureuse de ce résultat important. Cet exercice a pour but de vous faire « sentir »intuitivement qu'il est vrai.

Question 42
Utilisez le résultat de la question précédente pour évaluer les limites suivantes. (ind. Il faut transformer la fonction pour faire apparaitre des expressions de la forme $\frac{\sin(A)}{A}$ qui tendent vers 1 quand $A \to 0$)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{3x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(x-3)}{x^2-9}$

Théorème de la valeur intermédiaire

Question 43

a) Tracer une fonction définie sur l'intervalle fermé $[0,5]$ avec $f(0) < 0$ et $f(5) > 0$ qui n'admet aucun zéro dans l'intervalle $[0,5]$.

b) La fonction que vous avez donnée en (a) est-elle continue sur $[0,5]$?

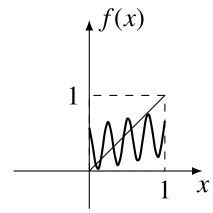
c) Est-il possible qu'une fonction continue sur $[0,5]$ satisfasse aux conditions données en (a) ?

Question 44

Soit $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$. Montrer que $f(x)$ a au moins un zéro en utilisant le théorème de la valeur intermédiaire.

Question 45

Soit $f(x)\colon [0,1] \to [0,1]$, c'est à dire une fonction qui prend comme argument des nombres dans l'intervalle $[0,1]$ et qui donne des valeurs dans $[0,1]$. Voici un exemple d'une telle fonction :



Montrer que si $0 < f(0) < 1$ et $0 < f(1) < 1$ (comme dans l'exemple) et que f est continue, alors il y a au moins une valeur $a \in (0,1)$ telle que $f(a) = a$ (un point où le graphe de f croise la droite $y = x$.)

Ind. Poser $g(x) = f(x) - x$ et appliquer le théorème de la valeur intermédiaire à la fonction g.

Solutions

Question 1

a) $f(-2)$ n'est pas défini

b) $f(1) = 1$

c) $f(3/2) = 1$

d) $f(2) = 3$

e) $f(3)$ n'est pas défini

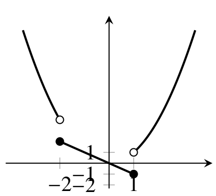
f) $f(\pi) = 1$

Question 2

a) $f(-3) = 9$, $f(-2) = 2$, $f(0) = 0$, $f(1/2) = -1/2$, $f(1) = -1$, $f(2) = 4$.

b) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$

c)



Question 3

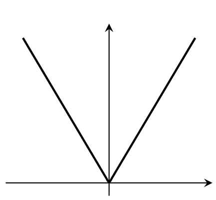
a) $f(-1) = -1/2$, $f(0) = -1$, $f(1)$ n'est pas défini, $f(2) = 1$.

b) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Question 4

a) $f(2) = 2$, $f(0) = 0$, $f(-3) = 3$.

b)



c) $\mathbb{R}$

d) Non, car pour une valeur y donnée de l'image il existe généralement 2 valeur x du domaine tels que $|x| = y$.

e) Si $x \geq 0$, $|x| = x$ et $\sqrt{x^2} = x$, on a donc l'égalité. Si $x < 0$, alors $|x| = -x$ et $\sqrt{x^2} = -x$. On a donc Dans tout les cas on $\sqrt{x^2} = |x|$, QED.

f) $|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a||b|$, QED.

g) L'égalité n'est pas vraie pour $a = 2$ et $b = -5$:

$|2+(-5)| = |-3| \quad |2|+|-5| = 2+5 = 7$

En général, l'égalité est vraie si a et b sont positifs ou nuls.

Question 5

a) $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$ et $f(2) = 8$

b) $\lim_{x\to -2^-} x^2 - 4 = 0^+$ et $f(-2) = 0$

c) $\lim_{x\to -2^+} x^2 - 4 = 0^-$ et $f(-2) = 0$

d) $\lim_{x\to -2} x^2 - 4 = 0$ et $f(-2) = 0$

e) $\lim_{x\to -2} \sqrt{x-2} = 0$ et $f(2) = 0$

f) $\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2-9} = 0$ et $f(3) = 0$

g) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = 0$ et $f(0)$ n'est pas défini

h) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $f(0)$ n'est pas défini

i) $\nexists$ car limites à gauche et à droite sont $-\infty$ et $+\infty$ respectivement. $f(0)$ n'est pas défini.

j) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}$

k) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \nexists$ et $f(-1)$ n'est pas défini.

Question 6

a) -27 ; $f(-3) = -27$

b) -1 ; $f(1) = -1$

c) 0 ; $f(-1) = 0$

d) 1 ; $f(3) = 1$

e) $\nexists$; $f(1)$ n'est pas défini

f) ∞, $f(0)$ n'est pas défini

g) ∞, $f(0)$ n'est pas défini

h) ∞, $f(0)$ n'est pas défini

i) 0 ; $f(2) = 0$

j) 4 ; $f(2)$ n'est pas défini.

Question 7

a) 0 ; 9.

b) $-1/3$; ∞.

c) ∞ ; $1/9$.

d) $1/9$; ∞.

e) $1/3$; $1/6$.

Question 8

a) non défini

b) -1

c) -1

d) -1

e) 0

f) 0

g) 3

h) $\nexists$

Question 9

a) Non défini

b) $-\infty$

c) -1

d) 1

e) 1

f) $-\infty$

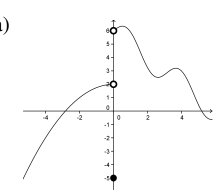
g) $\nexists$

h) 0

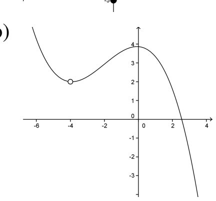
Question 10

Il y a différentes réponses possibles pour ces questions. À titre indicatif, voici une possibilité pour chaque cas.

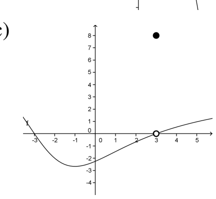
a)



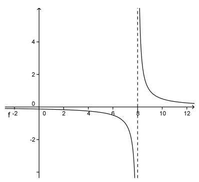
b)



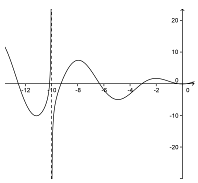
c)



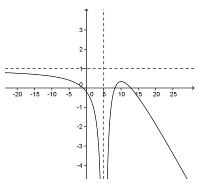
d)



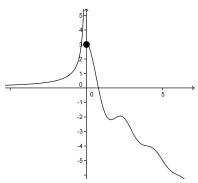
e)



f)



g)



Question 11

$\lim\limits_{x\to 2} 3x^2+1$

$= \lim\limits_{x\to 2} 3x^2 + \lim\limits_{x\to 2} 1 \quad (AL3)$

$= \left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right) + 1 \quad (AL1)$

$= \left(\lim\limits_{x\to 2} 3\right)\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right) + 1 \quad (AL4)$

$= (3)(2)(2)+1 \quad (AL1)$ et $(AL2)$

$= 13$ Arithmétique !

Question 12

$\lim\limits_{x\to a} f(x) - g(x) =$

$= \lim\limits_{x\to a} f(x) + (-1)g(x)$

$= \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} (-1)g(x)$

(limite d'une somme)

$= \lim\limits_{x\to a} f(x) + \left(\lim\limits_{x\to a}(-1)\right)\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$

(limite d'un produit)

$= \lim\limits_{x\to a} f(x) + (-1)\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$

(limite d'une constante)

$= \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Ce calcul est valable si les limites à droite de la première égalité existent, car c'est une condition de l'application des propriétés des limites d'une somme et d'un produit.

Question 13

a) 2
b) 15
c) 21
d) Impossible de calculer.
e) -15
f) $-5/3$
g) 7
h) Impossible de calculer.

Question 14

a) 5
b) 7
c) 0
d) 0
e) 0
f) 4
g) 3
h) $\sqrt{2}$

Question 15

a) 3
b) -1
c) 3
d) $\nexists$
e) 2
f) 2
g) $\nexists$
h) 0
i) 0
j) 0
k) 4
l) 4

Question 16

a) 5^+
b) $(-2/3)^+$
c) 8^- et 8^+
d) 2^-
e) Aucun côté

Question 17

a) $\nexists$
b) 0
c) 0
d) 0
e) $\nexists$
f) 0
g) $\nexists$
h) 0
i) 0

Question 18

a) Une réponse possible est $f(x) = x-5$ et $g(x) = 4/5$.

b) Une réponse possible est $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$. Dans ce cas $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/(x-1)}{1/(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)} = x-1$ et on peut vérifier que ces fonctions satisfont les condition demandés.

Question 19

a) $\nexists$
b) $\nexists$
c) $-9/2$
d) $-\frac{1}{4\sqrt{3}}$
e) $\nexists$
f) -27
g) 3
h) -2
i) ∞
j) $-\sqrt{2}$

Question 20

a)

$$\lim_{x\to 3} x^3+x+1 \overset{\text{cont}}{=} (3)^3+(3)+1 = 31$$

Limite d'une fonction polynômiale.

b)

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3}{x+2} \overset{\text{cont}}{=} \frac{(-1)^2+3}{(-1)+2} = \frac{4}{1} = 4.$$

Limite d'une fonction rationnelle.

c)

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3}{x+1} \overset{\text{cont ?}}{=} \frac{(-1)^2+3}{(-1)+1} = \cancel{\frac{4}{0}}.$$

On ne peut utilise la continuité de la fonction pour évaluer la limite car la fonction n'est pas définie en $x=-1$, donc pas continue en $x=-1$.

d)

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{x-1} \overset{\text{cont}}{=} \sqrt{2-1} = 1$$

Limite d'une fonction algébrique.

Question 21

a) $x=-2$ (essentielle, type 2) ; $x=4$ (non-essentielle).
b) $x=0$ et $x=8$ (essentielles, type 4)
c) $x=0$ (non-essentielle, type 1)
d) $x=-3$ (essentielle, type 4) ; $x \in [5,6]$ (essentielles, type 4)

Question 22

a) Discontinue.
b) Continue à gauche, continue à droite, continue.
c) Continue à droite, discontinue.

Question 23

a) (i), (ii), (iii), (v).
b) (ii), (iii).
c) (iii), (v).
d) (iii)

Question 24

a) Aucune discontinuité
b) Discontinuité en $x=3$
c) Discontinuité en $x=1$ et $x=-2$
d) f discontinue sur l'intervalle $]-\infty,0[$
e) f discontinue sur l'intervalle $]-\infty,-1/2[$ et en $x=1$

Question 25

a) f n'est pas continue en $x=3$
b) f n'est pas continue en $x=-2$
c) f n'est pas continue en $x=0$, en $x=1$ et en $x=-1$.

Question 26

a) $[3,\infty[$
b) $\mathbb{R}$
c) $[0,\infty[$
d) $\mathbb{R}$
e) $]-\infty,-1[\,;\,]-1,1[\,;\,[1,\infty[$

Question 27

a) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
b) La fonction est continue en $x=1$. $f(1) = \frac{1^2-4}{(1-2)(1+1)} = 3/2$ et $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{2}$ (fonction rationnelle en $x=1$, donc continue si pas de division par zéro).
c) La fonction est continue en $x=2$ car $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{4}{3} = f(2)$
d) Non, car elle n'est pas définie en $x=-2$ car il y a une division par zéro. Elle est cependant continue en $x=3$.

Question 28

a) $C(m) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 < m \leq 1 \\ 2m & \text{si} \quad 1 < x < 10 \\ m^2 & \text{si} \quad x \geq 10 \end{cases}$
b) $]0,\infty[$
c) Non, il y a une discontinuité à 10 kg.

Question 29

Ils ont tort. Comme la fonction est continue, la proximité est conservée et il n'y a pas de changements brusques.

Question 30

a) $k=-9$
b) $k=4/3$
c) $k=0$
d) Impossible.

Question 31

Une forme indéterminée est une forme de résultat d'évaluation de limite où l'hypothèse de continuité est invalide et qui ne nous permettant pas de trouver la valeure de la limite. Cependant, une limite de forme indéterminée 0/0 peut avoir une valeur, mais on ne peut déterminer laquelle uniquement à partir de la forme 0/0 car il y a des limites de la forme 0/0 ayant, au final, des valeurs très différentes, ce qui nous empêche d'établir une règle générale.

Une limite qui n'existe pas n'a pas de valeur.

Question 32

(2)

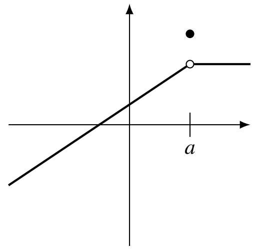
Question 33

C'est une forme « $\frac{0}{0}$ ». Factoriser $(x+1)$ au numérateur et au dénominateur à l'aide du théorème de factorisation.

Déno : $x^3+x^2+4x+4=(x+1)(x^2+4)$. Numérateur : $x^3+3x^2+5x+3=(x+1)(x^2+2x+3)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\frac{x^3+3x^2+5x+3}{x^3+x^2+4x+4} &= \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+2x+3}{(x+1)(x^2+4)}\\ &= \lim_{x\to-1}\frac{x^2+2x+3}{x^2+4}\\ &\overset{\text{cont}}{=} \frac{((-1)^2+2(-1)+3)}{((-1)^2+4)}\\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Question 34



Question 35

- a) 10
- b) $2\sqrt{3}$
- c) $\frac{5}{3}$
- d) $-\frac{7}{8}$
- e) $-\frac{5}{3}$
- f) $\frac{1}{3}$
- g) 13
- h) $\frac{2}{53}$

Question 36

- a) $-1/9$
- b) -16
- c) $1/54$
- d) $\sqrt{2}$
- e) $\frac{25}{4}$
- f) 1
- g) $-1/81$
- h) $1/3$

Question 37

- a) $1/2$
- b) $1/4$
- c) $\nexists$
- d) -4
- e) 108
- f) $\sqrt{3}$
- g) $\frac{2}{3}$
- h) $-\frac{29}{21}$

Question 38

- a) $1+\sqrt{5}$
- b) $1+\sqrt{x}$
- c) $2-\sqrt{3x+1}$

Question 39

- a) $1/6$
- b) $\frac{1}{0}\nexists$
- c) 6
- d) 0
- e) $-1/24$
- f) $\sqrt{5}$
- g) $1/6$

Question 40

- a) $3/8$
- b) 0
- c) 24
- d) $\sqrt{10}$
- e) $-\dfrac{2}{9\sqrt{3}}$
- f) 1

Question 41

- a) On remarque que plus x est proche de 0, plus $sin(x)$ est proche de x.
- b) $\dfrac{\sin(x)}{x}$ devient de plus en plus proche de 1 quand x s'approche de 0.
- c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$

Question 42

- a) 1
- b) 3
- c) Factoriser x^2-9. La limite est $1/6$

Question 43

Laissée à l'étudiant·e, il y a plusieurs réponses possibles

Question 44

f est continue car polynômiale. De plus, $f(2)=2^5-2^4+2^3-2^2+2-1=32-16+8-4+2-1=21>0$ et $f(-2)=(-2)^5-(-2)^4+(-2)^3-(-2)^2+(-2)-1=-32-16-8-4-2-1=-63<0$. Par le théorème de la valeur intermédiaire, f doit avoir au moins un zéro dans l'intervalle $(-2,2)$.

Question 45

Soit $g(x)=f(x)-x$. Comme f est continue sur $[0,1]$, g l'est aussi. De plus, $g(0)=f(0)-0=f(0)>0$ et $g(1)=f(1)-1<0$ car $f(1)<1$. Par TVI, il y a un $a\in(0,1)$ tel que $g(a)=0$. On a donc un a tel que $g(a)=f(a)-a=0$, ou encore $f(a)=a$, QED.