Chapitre 6

Analyse de fonctions

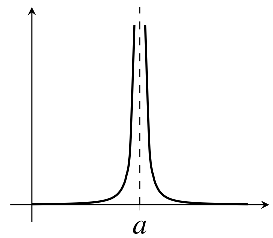
6.1 Limites et asymptotes

Définition 6.1.

On écrit

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

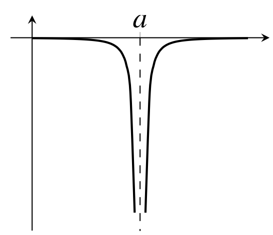
si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut quand x est assez près de a.



On écrit

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

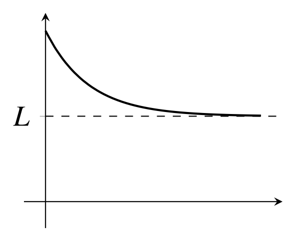
si $f(x)$ est aussi petit que l'on veut quand x est assez près de a.



On écrit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

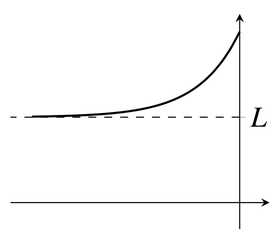
si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut quand x est assez grand.



On écrit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut quand x est assez petit.



On écrit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$$

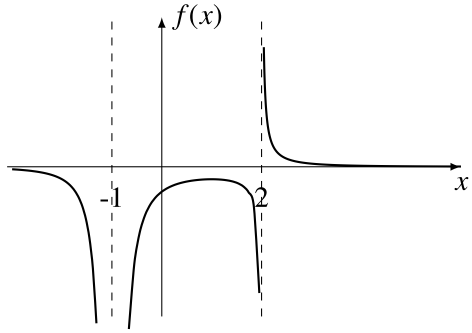
si $f(x)$ est aussi grand (ou petit) que l'on veut quand x est assez grand.

On écrit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$$

si $f(x)$ est aussi grand (ou petit) que l'on veut quand x est assez petit.

Exemple 6.1. Considérons la fonction ayant le graphe suivant.



Pour cette fonction,

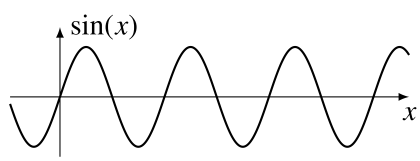
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$
- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to 2} f(x) \nexists$
- $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to \infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

Remarque 6.1. Dans l'exemple précédent, on a écrit $\lim_{x\to -} f(x) = -\infty$ car la fonction tend vers $-\infty$ peu importe comment $x \to -1$. Cependant, comme cette limite n'a pas de valeur car ∞ n'est pas un nombre réel, mais un symbole indiquant le comportement d'une fonction. On pourrait aussi écrire que $\lim_{x\to -1} f(x) \nexists$.

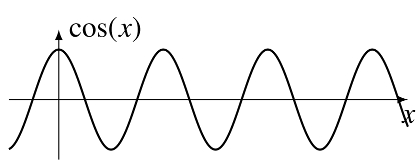
Certaines limites à l'infini n'existent pas, car les valeurs de la fonction ne s'approchent pas d'une valeur déterminée quand x devient de plus en plus grand (ou de plus en plus petit). Les fonctions trigonométriques sont un exemple : leur périodicité entraine que les limites à l'infini ne convergent pas.

Exemple 6.2.

- $\lim_{x\to \pm\infty} \sin(x) \nexists$



- $\lim_{x\to \pm\infty} \cos(x) \nexists$



6.1.1 Arithmétique de l'infini

De manière générale, on peut utiliser « l'arithmétique de l'infini » (aussi appelé « algèbre de l'infini ») pour déterminer le comportement d'une fonction qui tend vers ∞ ou $-\infty$, ou quand $x \to \pm\infty$.

Définition 6.2 (Arithmétique de l'infini)**.**

$$\begin{aligned} &\infty + \infty = \infty \\ &\infty \cdot \infty = \infty \\ &\infty \pm k = \infty \\ &\pm k \cdot \infty = \pm\infty \\ &\infty^{\infty} = \infty \\ &\infty^{k} = \infty \end{aligned}$$

$$(-\infty)^k = \begin{cases} \infty & \text{si } k \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\infty} = \infty$$

$$\sqrt[n]{-\infty} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ impair} \\ \nexists & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

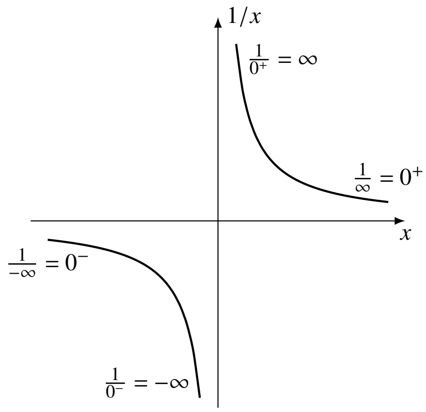
Exemple 6.3. Déterminons quelques limites à l'aide de l'arithmétique de l'infini.

- $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty^2 = \infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = (-\infty)^2 = \infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty^3 = \infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x + x^2 = \infty + \infty^3 = \infty + \infty = \infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+5} = \sqrt{\infty^2+5} = \sqrt{\infty+5} = \sqrt{\infty} = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^3+1} = \sqrt{(-\infty)^3+1} = \sqrt{-\infty+1} = \sqrt{-\infty}\nexists.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+1}{4} = \dfrac{\infty^3+1}{4} = \dfrac{\infty+1}{4} = \dfrac{\infty}{4} = \infty.$

Remarque 6.2. Il faut garder en tête que ces règles de manipulation du symbole « ∞ » ne sont que des manières d'étudier le comportement de certaines limites ; « ∞ » n'est pas un nouveau nombre, même si ces règles peuvent donner cette impression. Ce symbole n'est qu'une manière commode de raisonner rapidement sur des limites où des valeurs sont aussi grande ou petite que l'on veut. En fait, on pourrait complètement se passer de l'arithmétique de l'infini et raisonner qu'avec des limites.

6.2 Limites impliquant les formes $\frac{1}{\pm\infty}$, $\frac{1}{0^+}$ et $\frac{1}{0^-}$

On peut ajouter les règles suivantes à l'arithmétique de l'infini. Elles sont déduites du comportement de la fonction $f(x) = 1/x$.



Note 6.1. Comme $\dfrac{1}{\infty} = 0$, on a que $\dfrac{k}{\infty} = k\frac{1}{\infty} = k \cdot 0 = 0$ pour n'importe quelle constante k.

Exemple 6.4.

$$\lim_{x\to\infty}\left(2 + \frac{3}{x^3}\right) = 2 + \frac{3}{\infty^3} = 2 + 3\frac{1}{\infty} = 2 + 3(0) = 2$$

Note 6.2. Les identités suivantes concernant les limites à droite et à gauches seront souvent utilisées :

$$a^+ - a = 0^+ \qquad a^- - a = 0^-$$
$$C(0^+) = 0^+ \qquad C(0^-) = 0^-(\text{ si } C > 0)$$
$$C(0^+) = 0^- \qquad C(0^-) = 0^+(\text{ si } C < 0)$$

Exemple 6.5.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^-}\frac{4}{x-3} &= \frac{4}{3^- - 3}\\ &= \frac{4}{0^-}\\ &= 4\frac{1}{0^-}\\ &= 4(-\infty)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

Exemple 6.6. Factoriser peut aider à déterminer la limite :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^+}\frac{2}{x^2-4x+3} &= \lim_{x\to1^+}\frac{2}{(x-1)(x-3)}\\
&= \frac{2}{(1^+-1)(1^+-3)}\\
&= \frac{2}{(0^+)(-2)}\\
&= \frac{2}{0^-}\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Exemple 6.7.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(1/x)}=\frac{\infty}{0^+}=\infty\frac{1}{0^+}=\infty\cdot\infty=\infty.$$

On peut aussi voir que $\frac{\infty}{0^+}=\infty$ de la manière suivante :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(1/x)}=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{x}{1}\right)=\lim_{x\to\infty}x^2=\infty.$$

Ou encore, avec l'arithmétique de l'infini :

$$\frac{\infty}{1/\infty}=\infty\frac{\infty}{1}=\infty^2=\infty.$$

On doit garder en tête que les formes $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$ et $\infty-\infty$ sont indéterminés – voir la section suivante.

6.2.1 Formes indéterminées

Nous avons déjà étudié les indéterminations de la forme « $\frac{0}{0}$. » Si on ajoute les limites quand $x\to\pm\infty$ et celles qui tendent vers $\pm\infty$, il y a de nouvelles formes indéterminée, c'est-à-dire qu'en évaluant certaines limites à l'aide de l'arithmétique de l'infini, on peut obtenir des expressions qui ne nous permettent pas de déterminer la valeur de la limite.

Formes indéterminées « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

Pour comprendre pourquoi il y a indétermination quand l'évaluation directe donne un résultat de la forme « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », comparons les trois situations suivantes :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}\qquad\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}\qquad\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}$$

En évaluant directement, on obtient une expression de la forme « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » pour chacune des trois limites.

Si on simplifie avant d'évaluer, on obtient cependant trois résultats très différents :

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2} &= \lim_{x\to\infty} x = \infty \\
\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2} &= \lim_{x\to\infty} 1 = 1 \\
\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3} &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0
\end{aligned}
$$

On peut interpréter intuitivement ces résultats de la manière suivante : dans une forme « $\frac{\infty}{\infty}$ », le numérateur et le dénominateur sont deux fonctions qui tendent vers l'infini. Si le dénominateur « va plus vite » à l'infini que le numérateur, le dénominateur l'emporte et le rapport tend vers 0. Si le numérateur « va plus vite » à l'infini que le dénominateur, le numérateur l'emporte et le rapport tend vers l'infini. Si les deux vont vers l'infini « à la même vitesse, » le rapport tend vers une constante.

Dans une telle forme d'indétermination, il faut mettre en évidence la plus grande puissance de x au numérateur et au dénominateur. On peut ensuite simplifier, ce qui revient à comparer les « vitesses » du dénominateur et du numérateur.

Exemple 6.8.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+1}{3x^4+2x+3} = \frac{\infty}{\infty}.$$

En mettant en évidence la plus grande puissance de x au numérateur et au dénominateur, on trouve que

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+1}{3x^4+2x+3} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^4\left(3+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}} \\
&= \left(\frac{1}{\infty}\right)\frac{1+\frac{1}{\infty^2}+\frac{1}{\infty^3}}{3+\frac{2}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^3}} \\
&= (0)\frac{1+0+0}{3+0+0} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Exemple 6.9.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x+4}{3x^2+x+2} = \frac{\infty}{\infty}.$$

En mettant en évidence la plus grande puissance de x au numérateur et au dénominateur, on trouve que

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+3x+4}{3x^2+x+2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(5+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} \\
&= \frac{5+\frac{3}{\infty}+\frac{4}{\infty^2}}{3+\frac{1}{\infty}+\frac{2}{\infty^2}} \\
&= \frac{5+0+0}{3+0+0} \\
&= \frac{5}{3}.
\end{aligned}
$$

Dans ces exemples, on peut voir que le résultat d'une telle limite est déterminé par le rapport des termes de plus grande puissance.

Forme « $\infty - \infty$ »

Comme dans la section précédente, une telle forme est indéterminée car la limite à évaluer peu donner des résultats différents selon la « vitesse » a laquelle les termes vont à l'infini. Considérons les trois limites suivantes :

$$
\lim_{x\to\infty} x^3 - x^2 \qquad \lim_{x\to\infty} x^2 - x^2 \qquad \lim_{x\to\infty} x^2 - x^3.
$$

$$
\lim_{x\to\infty} x^3 - x^2 = \lim_{x\to\infty} x^3(1-1/x) = \infty(1-0) = \infty
$$

$$
\lim_{x\to\infty} x^2 - x^2 = \lim_{x\to\infty} 0 = 0
$$

$$
\lim_{x\to\infty} x^2 - x^3 = \lim_{x\to\infty} x^3(1/x-1) = -\infty(0-1) = -\infty
$$

On ne peut donc pas déterminer la valeur d'une limite uniquement sachant qu'elle est de la forme « $\infty - \infty$ ». Il faut transformer algébriquement la fonction pour pouvoir évaluer la limite.

Exemple 6.10.

$$
\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = \frac{1}{(0^+)^2} - \frac{1}{(0^+)^3} = \infty - \infty
$$

Pour lever l'indétermination, on met au dénominateur commun.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x^3} \\
&= \frac{(0)-1}{(0^+)^3} \\
&= \frac{-1}{0^+} \\
&= -\infty
\end{aligned}
$$

Noter que la mise au dénominateur commun est la clef pour évaluer cette limite.

Exemple 6.11.

$$\lim_{x\to\infty} x^2 - x^3 = \infty^2 - \infty^3 = \infty - \infty.$$

Il faut dont lever l'indétermination « $\infty - \infty$ ». On met en évidence la plus grande puissance de x :

$$\lim_{x\to\infty} x^2 - x^3 = \lim_{x\to\infty} x^3\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \infty^3\left(\frac{1}{\infty} - 1\right) = \infty(-1) = -\infty$$

Autres formes indéterminées

Les formes

$$0\cdot\infty \qquad 1^\infty \qquad \infty^0 \qquad 0^0$$

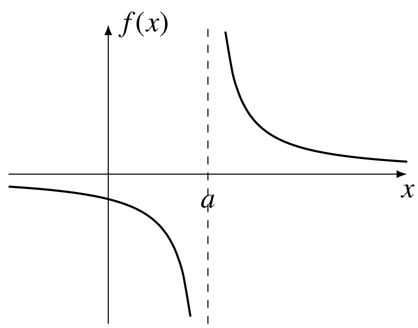
sont toutes indéterminées. Elles seront étudiées de manière détaillée en calcul intégral avec l'introduction de la *Règle de l'Hospital* et de différentes techniques permettant de lever ce type d'indétermination. La stratégie consiste à transformer les fonctions dont les limites donnent une de ces formes indéterminées en fonctions où les formes indéterminées sont « $\frac{0}{0}$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

6.3 Limites et asymptotes

6.3.1 Asymptotes verticales

Définition 6.3. Une fonction réelle f a comme **asymptote verticale** la droite $x = a$ si

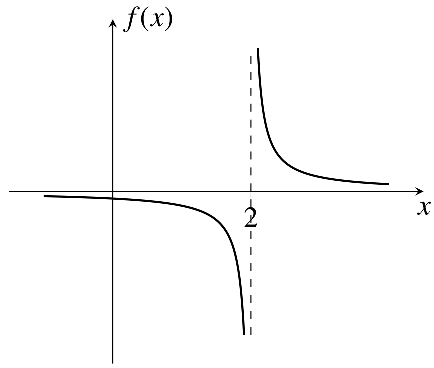
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$



Note 6.3. De manière générale, une fonction de la forme $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ peut avoir une asymptote verticale quand $g(x) = 0$, c'est-à-dire pour les valeurs de x où il y a une division par zéro. Il n'y a pas toujours une asymptote verticale quand il y a division par zéro, mais c'est l'endroit où les chercher !

Exemple 6.12. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ a une asymptote verticale en $x = 2$ car

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

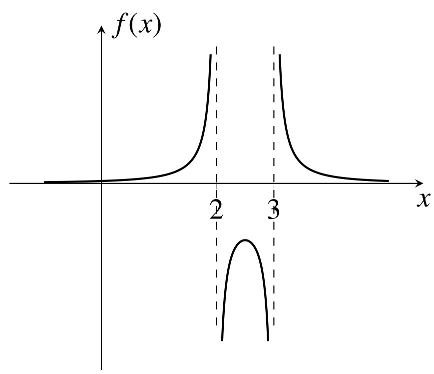


Une fonction peut avoir plusieurs asymptotes verticales.

Exemple 6.13. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5x+6} = \dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$ a des asymptotes verticales en $x = 2$ et en $x = 3$ car

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{(0^+)(-1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{(1)(0^+)} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

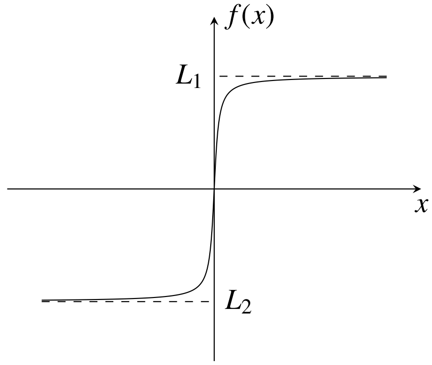


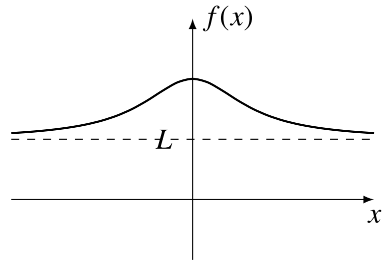
6.3.2 Asymptotes horizontales

Définition 6.4. Une fonction réelle f a comme **asymptote horizontale** la droite $y = L$ si

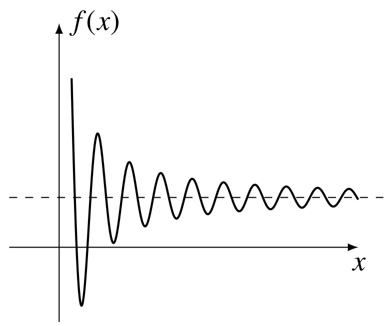
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \text{ ou } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Remarque 6.3. Une fonction peut avoir deux asymptotes horizontales différentes, une quand $x \to \infty$ et une autre quand $x \to -\infty$ (graphe de gauche), elle peut n'avoir aucun aucune asymptote horizontale, ou encore une seule asymptote horizontale (graphe de droite).





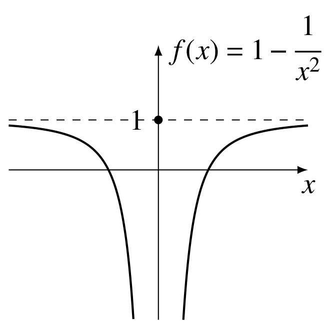
Remarque 6.4. Une erreur fréquente est de penser qu'une asymptote est une droite de laquelle le graphe d'une fonction se rapproche *sans jamais la croiser*. Cette conception est erronée. Par exemple, pour la fonction suivante



la droite $y = 1$ est une asymptote horizontale, même si la fonction croise une infinité de fois l'asymptote !

Pour information, la fonction dans cet exemple est $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} + 1$.

Exemple 6.14. Soit $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.



Déterminons algébriquement si f une asymptote horizontale.

$$\lim_{x\to\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{\infty^2} = 1 - 0 = 1$$

La droite $y = 1$ est donc une asymptote horizontale de la fonction f.

Bien que ce qui précède suffit à démontrer que $y = 1$ est une asymptote horizontale de f, on peut aussi étudier le comportement de f quand $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{(-\infty)^2} = 1 - 0 = 1$$

On voit donc que $y = 1$ est une asymptote horizontale autant quand $x \to \infty$ que quand $x \to -\infty$.

Exemple 6.15. Déterminons si $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{3x^2 + 2}$ a une asymptote horizontale.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x - 4}{3x^2 + 2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(3 + \frac{2}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}{3 + \frac{2}{x^2}} \\
&= \frac{1 - \frac{3}{\infty} - \frac{4}{\infty^2}}{3 + \frac{2}{\infty^2}} \\
&= \frac{1 - 0 - 0}{3 + 0} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

La droite $y = 1/3$ est donc une asymptote horizontale de la fonction f.

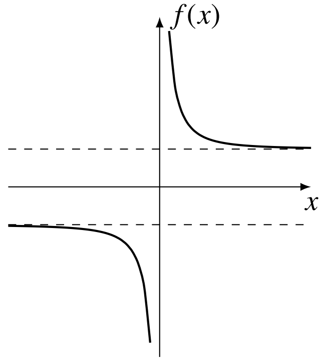
Il y a généralement des asymptotes horizontale dans un quotient de fonction quand les deux fonctions sont « de même force » ou du même ordre quand $x \to \pm\infty$, ce qui fait en sorte que la limite du quotient ait une valeur $k \in \mathbb{R}$.

Exemple 6.16. La fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ a deux asymptotes horizontales différentes. Dans ce cas, cela est du au fait que $\sqrt{x^2} = |x|$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\
&= \sqrt{1+\frac{1}{\infty^2}} \\
&= \sqrt{1+0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\
&= -\sqrt{1+\frac{1}{(-\infty)^2}} \\
&= -\sqrt{1+0} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Les droites $y = 1$ et $y = -1$ sont donc toutes deux des asymptotes horizontales de la fonction f. Voici le graphe de f.


$f(x)$
x