Notes de cours
Calcul différentiel

Yannick Delbecque, Automne 2020

Chapitre 1

Notions préalables

1.1 Questions notations et abréviations

1.1.1 Ensembles

Un **ensemble** est une collection d'éléments. Si x est un élément de de l'ensemble A, on écrit $x \in A$. Sinon, on écrit $x \notin A$. On ne tient pas compte des répétitions dans les ensembles : $\{1,2,3\}$ est le même ensemble que $\{1,2,3,3,3,3\}$!

On peut décrire un ensemble de plusieurs manières.

Compréhension Par une condition qui doit être satisfaite pour qu'un x soit élément de l'ensemble.

$$\{x \mid \text{ condition sur } x\}$$

Extension En donnant une liste des éléments de l'ensemble

$$\{-2, 1, \pi, 10\}$$

Exemple 1.1. L'ensemble des nombres naturel pairs P peut être défini en compréhension comme ceci :

$$P = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble P contient donc tout les nombres de la forme $2k$ où k est un nombre naturel quelconque.

Un même ensemble peut être décrit de plusieurs manières :

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ est un nombre naturel pair plus petit que} 10\}$$

Les ensembles A et B sont identiques car ils contiennent les mêmes éléments. On écrit $A = B$ pour dire que deux ensembles sont **égaux**, c'est à dire qu'ils contiennent les mêmes éléments.

L'**ensemble vide** est l'ensemble qui ne contient aucun élément. On dénote l'ensemble vide par le symbole « $\emptyset$ ». Autrement dit,

$$\emptyset = \{\}$$

Remarque 1.1. Le symbole « $\emptyset$ » est parfois utilisé à tord pour signifier » aucune solution » ou « impossible ».

On peut dire que l'ensemble solution d'un problème donné (l'ensemble de toutes les solutions du problème) est l'ensemble vide, ce qui signifie effectivement qu'il n'y a aucune solution. Cependant, on ne peut pas écrire

$$\sqrt{-1} = \emptyset \text{ ou } \sqrt{-1}\,\emptyset$$

car $\emptyset$ est un ensemble et $\sqrt{-1}$, si ce nombre était défini, serait justement un nombre.

Cardinalité

Un ensemble peut être **infini** comme l'ensemble des nombres pairs ou celui des nombres premiers, ou **fini** comme l'ensemble des facteurs entiers du nombre 12. On appelle la taille d'un ensemble sa **cardinalité**.

Opérations de base sur les ensembles

Union

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} \qquad \text{« } A \text{ union } B \text{ »}$$

Intersection

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\} \qquad \text{« } A \text{ intersection } B \text{ »}$$

Différence

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} \qquad \text{« } A \text{ sauf } B \text{ »}$$

Exemple 1.2.

$$\{1,2,3\} \cup \{2,3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$$

$$\{1,2,3\} \cap \{2,3,4,5\} = \{2,3\}$$

$$\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4,5\} = \{1\}$$

$$\{1,2\} \cap \{3,4,5\} = \emptyset$$

$$\{2,3\} \setminus \{2,3,4,5\} = \emptyset$$

Sous-ensemble

Si chaque élément d'un ensemble A est aussi un élément d'un ensemble B, alors on dit que A est un **sous-ensemble** de B. On écrit alors

$$A \subseteq B.$$

Remarque 1.2. Ne pas confondre $\in$ (« est élément de ») avec $\subseteq$ (« est sous-ensemble de »).

Par exemple

$$2 \in \{1,2,3,4\}$$

mais l'énoncé « $2 \subseteq \{1,2,3,4\}$ » n'a pas de sens.

De même

$$\{2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\}$$

mais

$$\{2,3\} \in \{1,2,3,4\}$$

est faux.

Ensembles souvent utilisés dans ce cours

Certains ensembles sont très importants en mathématiques et ont des noms et notations standard. Dans ce cours, nous utiliserons régulièrement les ensembles de nombres suivants :

$\mathbb{N}$: les nombres naturels ;

$\mathbb{Z}$: les nombres entiers ;

$\mathbb{Q}$: les nombres rationnels ;

$\mathbb{R}$: les nombres réels.

Ces ensembles importants seront décrits plus loin. Il existe d'autres ensembles de nombres utilisés ou étudiés en mathématiques que nous ne verrons pas dans ce cours : les nombres complexes ($\mathbb{C}$), les nombres algébriques ($\mathbb{A}$), les nombres transcendants, et plusieurs autres.

Nous utiliserons aussi les intervalles de nombres réels, qui sont les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ définis comme suit.

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (intervalle **fermé**)

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalle **ouvert**)

$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

On peut remplacer a ou b dans un intervalle par $-\infty$ ou ∞ pour signifier que le nombre x n'a pas à être plus grand que a ou plus petit que b. Par exemple :

$$[2,\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x\}$$

$$]-\infty,3[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$$

Note 1.1. On considèrera toujours qu'un intervalle est ouvert aux valeurs $\pm\infty$.

Beaucoup d'autres ensembles sont utilisés en mathématiques, mais ne joueront pas un rôle important dans ce cours. Par exemple,

$\mathbb{R}^2$ l'ensemble des points (x,y) du plan Cartésien ;

$\mathbb{R}^3$ l'ensemble des points (x,y,z) de l'espace Euclidien à trois dimensions ;

$\mathbb{C}$ l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ qui satisfont l'équation d'une courbe algébrique ;

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;

etc.

1.2 Logique et abréviations

Un **énoncé** est une affirmation pouvant être vraie ou fausse.

Exemple 1.3. Les affirmations suivantes sont des énoncés.

« 2+2=5 »
« 5 est un nombre premier » « $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ » « La fonction définie par $f(x) = x^2$ est croissante si $x \geq 0$.

Remarque 1.3. Ne pas confondre un énoncé avec une expression. Par exemple

$$2x+3=5$$

est un énoncé (pouvant être vrai ou faut selon la valeur de x), mais

$$2x+3$$

est une expression algébrique qui représente un nombre. Cela n'a pas de sens de dire que le nombre $2x+3$ est vrai ou est faux. En mathématique élémentaire, les énoncés comportent le plus souvent le symbole « = » ou un symbole d'inégalité.

Voici quelques symboles logiques que nous utiliserons dans ce cours.

« non-A » Négation de A. Diverses notations sont utilisées, par exemple $\neg A$

« si A, alors B » Notation : $A \implies B$. A est l'**hypothèse**, B est la **conclusion**. On dit aussi que A est une condition suffisante pour B et que B est une condition nécessaire pour A.

« A si et seulement si B » Notation : $A \iff B$ ou A ssi B. $A \iff B$ est équivalent à dire que $A \implies B$ et $B \implies A$.

« $\forall A$ » « Pour tout A. » On écrit par exemple

$$\forall n \in \mathbb{Z}. n \text{ est pair ou impair}$$

pour dire qu'un nombre entier quelconque est pair ou impair.

« $\exists A$ » « Il existe A ». On écrit par exemple

$$\exists n \in \mathbb{Z}. n \text{ est un nombre premier}$$

pour dire qu'il y a (au moins) un nombre entier qui est premier.

Notons que, donné par écrit, l'énoncé d'une implication n'est pas toujours exactement la forme « si ... alors ... ». Par exemple :

« Un nombre entier est divisible par 2 s'il se termine par 0,2,4,6 ou 8 »

est le même énoncé que

« S'il se termine par 0,2,4,6 ou 8, un nombre entier est divisible par 2. »

En utilisant le symbole $\implies$, cela revient à dire que

$$A \implies B \text{ et } B \impliedby A$$

sont des énoncés équivalents.

La **contraposée** d'une implication de la forme $A \implies B$ est l'implication non$-B \implies$ non$-A$. La contraposée est équivalente à l'implication originale.

Exemple 1.4. L'énoncé

« Un nombre entier n'est pas divisible par 2 s'il ne se termine pas par 0,2,4,6 ou 8. »

est la contraposée de

« Si un nombre entier se termine par 0,2,4,6 ou 8, alors il est divisible par 2. »

Exemple 1.5. L'énoncé

> « Si un nombre est premier, alors il n'a pas de diviseurs autre que 1 et lui-même. »

est la contraposée de

> « Si un nombre a d'autres diviseurs que 1 et lui-même alors il n'est pas premier. »

Une **tautologie** est une affirmation qui est toujours vraie pour des raisons logiques.

Exemple 1.6. Les énoncés des formes suivantes sont toujours vrais.

$$A \implies A$$

> « Si n est un nombre entier, alors n est un nombre entier. »

$$A \text{ et } B \implies A$$

> « Si n est un nombre entier et q est un nombre rationnel, alors n est un nombre entier. »

$$A \implies B \text{ ou non-}B$$

> « Si n est un nombre entier, alors n est pair ou n est impair. »

1.2.1 Division du discours mathématique

Pour clarifier la lecture, un texte est normalement divisés en plusieurs parties de différents niveaux hiérarchiques : chapitres, sections, paragraphes, phrases, etc. Pour clarifier la lecture d'un texte mathématique, on utilise en plus des divisions spéciales associées au différents éléments du discours mathématique.

Axiome Propriété qui est acceptée sans démonstration, considérée comme assez évidente pour être le fondement d'une théorie mathématique.

Définition Propriété ou identité qui défini le sens d'une notation ou d'un terme nouveau.

Théorème Résultat important, dont la validité est établie par une démonstration ou une preuve, et qui a une grande importance dans un domaine donné des mathématiques étant donné ses multiples conséquences. Abréviation en classe : « thm ».

Proposition Résultat important, dont la validité est établie par une démonstration ou une preuve. Abréviation en classe : « prop ».

Lemme Résultat servant à démontrer un ou plusieurs autres résultats.

Corrolaire Résultat qui est déduit facilement d'un résultat précédant, une conséquence immédiate d'un théorème ou d'une proposition.

Preuve (ou **démonstration**) Suite de déduction logiques dont la conclusion est un théorème, une proposition ou un lemme. Une preuve répond à la question « pourquoi c'est vrai. » On indique habituellement la fin d'une preuve à l'aide de CQFD (« ce qu'il fallait démontrer »), QED (« *quod erat demonstrandum* », CQFD en latin) ou par un signe comme « $\square$ ». Il existe plusieurs formes de preuves (directes, par induction, par contradiction ou par l'absurde, etc.) que nous verrons à l'œuvre au cours de la session.

Note importante : « démontrer » ne veut pas dire « donner un exemple ». Un cas particulier n'établit pas la vérité pour tous les cas.

Cependant, un seul cas particulier peut réfuter une affirmation générale. On appelle un tel exemple un **contre exemple**.

Exemple 1.7. Le fait que

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

est un cas particulier qui ne démontre pas que

$$x^2 + y^2 = z^2$$

pour n'importe quel nombres x, y et z. Par exemple,

$$2^2 + 3^2 \neq 4^2.$$

Ce dernier exemple démontre cependant que

$$x^2 + y^2 = z^2$$

n'est pas toujours vrai !

Exemple 1.8. Démontrer à l'aide d'un contre-exemple qu'il n'est pas vrai que

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2$$

pour tout choix de nombres entier x, y et z.

On peut prendre le cas particulier $x = 2$ et $y = 3$.

$$(2 + 3)^2 = 25, \text{ mais } 2^2 + 3^2 = 13.$$

1.3 Ensembles de nombres

Dans ce qui suit, on passe en revue les différents ensembles de nombres étudiés en mathématiques. Nous donnons pour chacun quelques propriétés mathématiquement importantes qui font que l'on considère important de considérer ces types de nombres.

Cette section sera probablement difficile à lire si vous n'êtes pas familier avec la notation et l'écriture mathématique. L'objectif est de rappeler certains résultats et définitions qui ont été vue avant ce cours, main exprimés de manière moins rigoureuse.

Nombres naturels

L'ensemble des nombres naturels est

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Ces nombres sont caractérisés par le fait que chaque nombre naturel n a un successeur $n + 1$; il y a toujours un nombre naturel encore plus grand qu'un nombre naturel donné.

Il arrivera dans ce cours que nous ayons besoin du principe d'induction. Ce principe permet de démontrer qu'une proposition est vraie pour pour les nombres naturels sans avoir à la démontrer pour chaque nombre naturel, ce qui est impossible car il y en a une infinité ! Le principe d'induction est une partie essentielle de la définition des nombres naturels :

Hypothèse 1 (principe d'induction). *Si $A(n)$ est une proposition impliquant une variable n représentant un nombre entier*

(1) est vraie pour le nombre naturel $n = 0$ et

(2) lorsqu'elle est vraie pour $n > 0$ et ses prédécesseurs, alors elle l'est aussi pour $n+1$,

alors la proposition est vraie pour tout n.

Rappelons maintenant quelques concepts et résultats importants liés aux nombres naturels.

Définition 1.1. n est un nombre **pair** s'il existe un nombre $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$n = 2k.$$

Définition 1.2. n est un nombre **impair** s'il existe un nombre naturel $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$n = 2k + 1.$$

Définition 1.3. $p \in \mathbb{N}$ est un nombre **premier** s'il existe un nombre naturel $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$n = 2k + 1.$$

Cela est peut être contre-intuitif, mais la division est d'abord une propriété des nombres entiers, souvent connue comme la « division avec reste ». Les mathématiciennes et mathématiciens préfèrent plutôt nommer cette propriété « division Euclidienne ».

Théorème 1.1 (Division Euclidienne). Pour tous nombres naturel n et $d \neq 0$, il existe deux nombres naturels uniques q (quotient) et r (reste) tels que $0 \leq r < d$

$$n = qd + r.$$

Exemple 1.9. Si $n = 10$ et $d = 4$, alors $q = 2$ et $r = 2$ sont les quotients et restes de division.

$$10 = 2(4) + 2.$$

Définition 1.4. On dit que $d \in \mathbb{N}$ **divise** n si le reste de la division euclidienne de n par d est 0.

On peut aussi dire que d est un **diviseur** de n.

Définition 1.5. un nombre naturel $p \in \mathbb{N}$ est **premier** s'il a deux diviseurs différents, 1 et p.

Le théorème le plus important concertant les nombres naturel est le résultat suivant.

Théorème 1.2 (Théorème fondamental de l'arithmétique)**.** Tout nombre naturel n peut se factoriser de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme un produit de facteurs premiers.

Exemple 1.10.

$$10 = 2 \cdot 5 \qquad 7 = 7$$
$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \qquad 36 = 6 \cdot 6$$
$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 360 \qquad = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Nombres entiers

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Les nombres négatifs sont un concept abstrait introduit pour pouvoir résoudre des équations comme
$$x + 4 = 1.$$
La solution de cette équation est -3, mais on n'accepte pas les nombres négatifs comme des nombres légitimes, l'équation n'a pas de solution. Les solutions d'une équation dépendent des nombres que l'on considère comme légitimes. Les nombres négatifs et la manière de les additionner et de les multiplier ont été étudiés il y a plusieurs siècles en Inde, mais les savants européens ont été très longtemps attachés à une conception géométrique des nombres. De ce point de vue géométrique, les nombres négatifs n'ont pas de sens et n'étaient pas acceptés comme solutions, même encore au début des années 1800 !

Voyons quelques concepts liés aux nombres naturels et aux nombres entiers.

La plupart des concepts défini pour les nombres naturels peuvent être adapté aux nombres entiers.

Définition 1.6. Le nombre $n \in \mathbb{Z}$ est **pair** s'il existe un nombre $k \in \mathbb{Z}$ tel que
$$n = 2k.$$

Définition 1.7. Le nombre $n \in \mathbb{Z}$ est **impair** s'il existe un nombre entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que
$$n = 2k + 1.$$

La division avec reste fonctionne toujours avec les nombres entier, mais il faut permettre que le quotient soit négatif.

Théorème 1.3 (Division Euclidienne pour les nombres entiers)**.** Pour tous nombres entiers n et d, il existe deux nombres entiers uniques q (quotient) et r (reste) tels que $0 \leq r < d$
$$n = qd + r.$$

Exemple 1.11. La division Euclidienne fonctionne aussi pour les nombres négatifs. Par exemple, si $n = -3$ et $d = 2$, alors $q = -2$ et $r = 1$ sont les quotients et restes de division.

$$-3 = 2(-2) + 1.$$

Bien qu'habituellement défini pour les nombres naturels, le concept de nombre premier peut être défini pour les nombres entiers.

Définition 1.8. $d \in \mathbb{Z}$ est un diviseur de $n \in \mathbb{Z}$ si le reste de division de n par d est 0.

On peut ainsi généraliser le théorème fondamental de l'arithmétique aux nombres entiers.

Théorème 1.4 (Théorème fondamental de l'arithmétique)**.** Tout nombre naturel n peut se factoriser de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme un produit de facteurs premiers et du facteur (-1).

Exemple 1.12.

$$234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$$
$$-51 = (-1)3 \cdot 17$$
$$-24 = (-1)2^3 \cdot 3$$

Nombres rationnels

D'un point de vue algébrique, les nombres rationnels permettent de résoudre des problèmes qui n'ont pas de solution si on considère uniquement les nombres entiers ou les nombres naturels. Par exemple, l'équation

$$2x = 1$$

a comme solution $x = \frac{1}{2}$.

On défini un nombre rationnel comme le rapport de deux nombres entiers :

$$\frac{n}{m} \text{ où } n, m \in \mathbb{Z} \text{ et } m \neq 0.$$

La condition $m \neq 0$ est importante car on ne peut pas diviser par 0.

L'ensemble des nombres rationnels est défini en compréhension par :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$$

Simplification Une propriété fondamentale pour la manipulation des fraction est l'existence d'une unique version simplifiée de chaque fraction :

Théorème 1.5. Pour tout nombre rationnel $\frac{m}{n}$, avec $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$ et $m \neq 0$, il existe un unique $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ telle que

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$$

et que a et b n'ont pas de facteurs communs.

Développement décimal On peut caractériser les nombres rationnels par leur développement décimaux.

Théorème 1.6. Un nombre a peut s'écrire comme une fraction si et seulement si son développement décimal est périodique.

Nombres réels

La nécessité algébrique des nombres réels est due au fait que certaines équations n'ont pas de solution si on considère uniquement les nombres rationnels. Par exemple, si on cherche la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, on doit résoudre l'équation :

$$x^2 = 2.$$

On doit donc avoir que $x = \sqrt{2}$ (si on garde uniquement la solution positive car on cherche la diagonale d'un carré). Cette solution n'est pas un nombre rationnel : il n'y a aucun moyen d'écrire $\sqrt{2}$ comme une faction. Ce fait n'est pas si simple à démontrer, mais nous verrons une preuve complète un peu plus loin.

En mathématiques, il y a plusieurs manières de définir les nombres réels, mais celle-ci est probablement celle qui est la plus simple et qui utilise le théorème 1.6

$$\mathbb{R} = \begin{array}{l}\text{ensemble de tous les développements décimaux} \\ \text{quelconques (possiblement infini non-périodique)}\end{array}$$

Les nombres réels peuvent être combinés à l'aide des opérations de base : addition, soustraction, multiplication, division, exposants et racines, c'est à dire que le résultat de ces opérations, s'il est défini, est aussi un nombre réel. Quand une expression combine plusieurs opérations, on doit les effectuer dans l'ordre conventionnel déterminé par la « priorité des opérations ».

On suppose que les opérations de base ont les propriétés vu au secondaire (voir formulaire d'algèbre) : associativité, distributivité, commutativité, etc.

Un fait important au sujet des nombres réels, c'est qu'ils comportent des nombres ne pouvant s'écrire sous forme de fractions. Il est généralement assez difficile de démontrer qu'un nombre n'est pas un nombre rationnel. Voici un des exemples les plus simple et la première preuve historique de l'existence d'un nombre ne pouvant s'écrire comme une fraction de nombre entiers. Cet argument a été formulé pour la première fois il y a 25 siècles par Hippasus, un disciple de Pythagore.

Théorème 1.7. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Lemme 1.1.

$$n \text{ pair} \iff n^2 \text{ pair.}$$

Preuve du lemme. ($\Longrightarrow$) On commence par démontrer que si n est un nombre pair, alors n^2 est aussi un nombre pair.

Si n est pair, alors n est le double d'un certain nombre k. On peut donc écrire que $n = 2k$. Dans ce cas,

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

ce qui montre que n^2 est bien le double d'un nombre entier.

($\Longleftarrow$) On démontre maintenant que si n^2 est un nombre pair, alors n doit être un nombre pair.

On démontre la contraposée : si n est impair, alors n^2 est aussi impair. Supposons que n est impair ; il peut donc s'écrire comme $n = 2k + 1$ pour un certain nombre k. Dans ce cas,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

ce qui établi que n^2 est impair. $\square$

Preuve du théorème. Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Nous allons montrer que cette hypothèse mène à un résultat absurde et qu'elle ne peut pas être vraie, donc que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Si $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, il existe deux entiers a et $b \neq 0$ tel que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Comme on peut toujours simplifier une faction, on peut simplifier $\frac{a}{b}$ pour obtenir une fraction simplifiée $\frac{m}{n}$. On a donc

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

où m et n n'ont aucuns facteurs communs.

En multipliant chaque membre de l'égalité $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ par n, on obtient

$$n\sqrt{2} = m.$$

En mettant au carré, on a que

$$n^2(2) = m^2$$

m^2 doit donc être pair. Par le lemme précédant, on a que m doit être pair lui aussi. m peut donc s'écrire comme $m = 2k$ pour un certain entier k. En remplaçant m par $2k$ dans l'égalité précédente

$$n\sqrt{2} = m,$$

on obtient que

$$n\sqrt{2} = 2k.$$

On met au carré pour obtenir

$$2n^2 = 4k^2.$$

En divisant par 2, on trouve

$$n^2 = 2k^2.$$

n^2 est donc pair, ce qui implique par le lemme précédant que n est pair lui aussi.

La fraction $\frac{m}{n}$ peut donc être simplifiée car le numérateur m et le dénominateurs n sont tous les deux pairs ! Cela contredit le fait que $\frac{m}{n}$ est une faction simplifiée. L'hypothèse « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel » est donc fausse et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Il y a plusieurs autre nombres réels qui ne sont pas rationnels :

$$\pi, \mathrm{e}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \log_2(3), \log_5(7), \text{ etc.}$$

La preuve donnée pour $\sqrt{2}$ est une des preuve les plus simples de l'irrationalité d'un nombre réel — même si elle vous semble compliquée, elle est beaucoup plus simple que la preuve que π ne peut pas être écrit comme une fraction.

Les mathématiciens n'ont pas épuisé la question de savoir quels nombres réels peuvent être écrit comme des nombres rationnels, car il y a encore plusieurs nombres réels pour lesquels on ne sait toujours pas s'il sont rationnels ou non ! Par exemple, on ne sait pas si $\pi \mathrm{e}$ et $\pi + \mathrm{e}$ sont rationnels ou non et la réponse à ces deux questions demandera le développement de nouvelles idées mathématiques.

Autre types de nombres

Bien que ces concepts ne seront pas à l'étude dans ce cours, les nombres naturels, entiers, rationnels et réels ne sont pas les seuls types de nombres étudiés en mathématiques. Pour vous donner une idée de ce qu'il y a au delà des nombres que vous avez déjà étudiés, en voici quelques autres.

- les nombre complexes (ensemble $\mathbb{C}$) : ce sont les nombres réels auxquels on ajoute un nouveau nombres $i = \sqrt{-1}$, c'est à dire qu'on ajoute un nombre i qui permet de résoudre l'équation $x^2 = -1$, qui n'a pas de solution dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
- les nombres algébriques (ensemble $\mathbb{A}$) : nombres qui sont des solutions d'équations algébriques
- les nombres transcendants : nombres qui ne sont pas algébriques ; le plus célèbre est π.
- nombres calculables : nombres réels pour lesquels il existe un algorithme permettant de calculer ses décimales. Fait surprenant : la plupart des nombres réels sont non-calculables : il est impossible de de calculer leur décimales !

1.4 Algèbre

L'objectif principal de l'algèbre élémentaire est de déterminer une valeur inconnue dans une relation numérique. On peut poser ce genre de questions sous forme « écrite », par exemple

> (Problème vieux de quelques millénaires figurant sur la tablette cunéiforme AO 8862)
> J'ai multiplié longueur et largeur pour obtenir l'aire. J'ai additionné ce par quoi la longueur dépasse la largeur à l'aire et j'ai obtenu 183. La somme de la longueur et de la largeur est 27. Quelles sont la longueur, la largeur et l'aire ?

Les géomètres et mathématiciens ont développé au fil du temps différentes manière de représenter ce genre de problème afin de les résoudre plus facilement. La notation moderne, malgré le fait qu'elle exige plusieurs années d'entrainement, est de loin la plus efficace. Si x est la longueur et y la largeur, le problème se traduit en notation moderne comme

$$\begin{aligned} x-y+xy &= 183 \\ x+y &= 27 \end{aligned}$$

L'algébriste moderne applique ensuite quelques principes simples de manière astucieuse pour déterminer les valeurs inconnues. On peut même décrire la méthode de solution avec ces techniques : (1) exprimer y en fonction de x dans la seconde équation : $y = 27 - x$ (2) substituer la valeur trouvée dans la première équation $x-(27-x)+x(27-x) = 183$ (3) résoudre l'équation obtenue en regroupant : $-x^2+29x-210 = 0$. On trouve deux solutions : $x = 14$ et $x = 15$, et donc les valeurs de y correspondantes : $y = 13$ et $y = 12$. L'aire correspondante est respectivement 182 et 180.

Si la solution de cet ancien problème vous semble complexe, en comparant avec une solution n'utilisant aucune des idées modernes comme des variables, la substitution, isoler, la formule quadratique, etc, la solution serait beaucoup plus complexe.

1.4.1 Principes généraux

Voici les principes les plus utilisés dans les raisonnements algébriques :

(Propriétés des variables) Une variable représentant un nombre inconnu d'un certain type (entier, rationnel, nombre réel) a les mêmes propriétés que les nombres du même type. On peut y appliquer les mêmes opérations.

(Transitivité de l'égalité) Si $A = B$ et $B = C$, alors $A = C$.

(Application d'une opération) Si $f(x)$ est une opération (fonction), on a que

$$A = B \implies f(A) = f(B).$$

Si f est une opération inversible, alors $A = B \iff f(A) = f(B)$.
Si $f^{-1}(x)$ est l'opération inverse de $f(x)$, alors

$$f(A) = B \iff A = f^{-1}(B).$$

(Substitution) Si $A(x) = B(x)$ alors $A(C) = B(C)$, où C est une expression algébrique quelconque substituée à la place de la variable x.

Voyons maintenant des exemples où ces principes sont utilisés.

Transitivité

La transitivité de l'égalité est très souvent utilisé sans que l'on s'en rende compte ou sans que l'on mentionne explicitement son utilisation.

Exemple 1.13. Par exemple, si on écrit

$$(x+2)^2 = (x+2)(x+2) = x(x+2)+2(x+2) = x^2+2x+2x+4 = x^2+4x+4.$$

On utilise (plusieurs fois) la *transitivité de l'égalité* pour conclure que

$$(x+2)^2 = x^2+4x+4.$$

Note : on écrit souvent verticalement une telle suite d'égalité quand elle est trop longue :

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= (x+2)(x+2)\\ &= x(x+2)+2(x+2)\\ &= x^2+2x+2x+4\\ &= x^2+4x+4.\end{aligned}$$

Substitution

On utilise le principe de *substitution* quand on prend une identité algébrique simple pour en trouver une plus complexe.

Exemple 1.14. Voici l'identité générale pour les différences de carré

$$x^2-y^2 = (x-y)(x+y),$$

Cette identité est vraie peu importe les valeurs de x et y. On peut déduite une nouvelle identité en *substituant* (par exemple) x^2 à x et $2x$ à y :

$$(x^2)^2-(2x)^2 = \big((x^2)-(2x)\big)\big((x^2)+(2x)\big),$$

Cette dernière égalité est donc déduite de la première à l'aide du principe de substitution.

En simplifiant l'identité obtenue, on obtient que

$$x^4-4x^2 = (x^2-2x)(x^2+2x).$$

Application d'une même opération

L'application d'une même opération sur chaque membre d'une égalité est probablement le premier principe algébrique appris dans les cours d'algèbre élémentaire et est une généralisation du principe ayant donné son nom à l'algèbre.

Exemple 1.15. Si on a que $2x = 5$, on obtient que

$$\frac{2x}{2} = \frac{5}{2}$$

en appliquant l'opération « diviser par deux » sur chaque membre de l'égalité initiale.

Comme « diviser par deux » est une opération inversible (dont l'inverse est « multiplier par deux », on peut écrire

$$2x = 5 \iff \frac{2x}{2} = \frac{5}{2}.$$

L'opération « mettre au carré » n'est pas inversible. Par exemple, si on met −2 au carré, on obtient 4. L'opération inverse est ambigüe : on pourra obtenir un carré de 4 à partir de 2 ou de −2.

Si on applique une opération non inversible, comme mettre au carré, on ne peut pas obtenir une équivalence entre les identités. Par exemple, l'implication

$$2x = 5 \implies 4x^2 = 25$$

est vraie, mais l'équivalence

$$2x = 5 \iff 4x^2 = 25$$

est fausse !

1.4.2 Propriétés algébriques utiles

Les identités algébriques suivantes sont très souvent utilisées. On les suppose connues ou que vous pouvez les vérifier. Elles peuvent être démontrées par des preuve directes à l'aide de manipulation algébriques simples.

$$AB + AC = A(B+C) \qquad \text{(mise en évidence simple)}$$

$$AC + AD + BC + BD = (A+B)(C+D) \qquad \text{(mise en évidence double)}$$

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \qquad \text{(rationalisation)}$$

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B) \qquad \text{(différence de carrés)}$$

$$\left(\sqrt{A} \pm \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}\right) = A - B \qquad \text{(conjugué)}$$

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2) \qquad \text{(différence de cubes)}$$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \qquad \text{(binôme carré parfait)}$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \qquad \text{(développement du binôme degré 3)}$$

$$(A+B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4 \qquad \text{(développement du binôme degré 4)}$$

Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal est un truc permettant de déterminer rapidement les coefficients du développement d'un binôme de degré quelconque : si on développe une expression de la forme $(A+B)^n$, les coefficients du développement sont donnés par la n-ième ligne du triangle de Pascal.

Ce truc sera utile plus loin pour obtenir une formule importante de dérivation et nous y reviendrons à ce moment.

Triangle de Pascal

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
(A+B)^0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
(A+B)^1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
(A+B)^2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
(A+B)^3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
(A+B)^4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
(A+B)^5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
(A+B)^6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\vdots & & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Exemple 1.16. Le développement de $(x+2)^5$ a la forme suivante :

$$C_0x^5 + C_1x^4 2^1 + C_2x^3 2^2 + C_3x^2 2^3 + C_4x^1 2^4 + C_5 2^5$$

Les coefficients C_0, C_1, ..., C_5 sont donnés par la ligne correspondant à $(A+B)^5$ du triangle de Pascal, soit

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1.$$

On a donc que

$$(x+2)^5 = x^5 + 5x^4 2 + 10x^3 2^2 + 10x^2 2^3 + 5x 2^4 + 2^5$$

La preuve que les coefficients données par le triangle de Pascal sont bien ceux des développement du binôme fût le premier exemple d'une preuve utilisant explicitement le principe d'induction sur les nombres naturels.

1.4.3 Propriétés fréquemment utilisées pour résoudre des équations

(EQ1) Si un produit de facteurs est nul, un des facteurs doit être nul.

$$ABC = 0 \implies A = 0 \text{ ou } B = 0 \text{ ou } C = 0.$$

(EQ2) Si un rapport est nul, le numérateur doit être nul (et le dénominateur ne peut pas être nul).

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC \text{ et } B, D \neq 0.$$

Le premier de ces principes permet de résoudre des équations sous forme factorisée. Par exemple, si on a l'équation

$$(x-2)(x+1) = 0$$

On a une expression de la forme $AB = 0$. Il faut donc que $A = 0$ ou que $B = 0$. Dans ce cas particulier, il faut donc que

$$x - 2 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0.$$

Cela implique que $x = 2$ ou $x = -1$.

Ce principe s'applique à un produit d'un nombre de facteurs aussi grand que l'on veut : si un produit de facteurs est nul, un des facteurs doit être nul. Ainsi, les zéros de

$$(x-3)\left(x+\sqrt{33}\right) left(x - \log_2(3) = 0$$

sont $x=3$, $x=-\sqrt{33}$ et $x=\log_2(3)$.

La simplicité de la solution d'une équation factorisée est évidente si on la compare avec même équation non-factorisée :

$$x^3-x^2\log_2(3)+\sqrt{33}x^2-\sqrt{33}x\log_2(3)-3x^2+3x\log_2(3)-3\sqrt{33}x+3\sqrt{33}\log_2(3)=0.$$

C'est une des raisons principales pour lesquelles les techniques de factorisations de polynômes sont importantes : elles permettent de prendre une équation polynômiale de degré élevé et de la transformer (en la factorisant et en utilisant EQ1) en plusieurs équations de degrés moins élevés (donc plus faciles à résoudre).

Le second principe permet de résoudre facilement des équations comportant des expressions rationnelles factorisée comme l'équation suivante

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x-6}=0.$$

Par (EQ2), cette équation est équivalente à

$$(x-3)(x+1)=0(x-6)=0.$$

On est donc ramené à une situation où le produit de facteurs est nul. L'équation a donc comme solution les zéros de $(x-3)(x+1)$, soit $x=3$ et $x=-1$. Ainsi, seul le numérateur détermine les zéros d'une expression de la forme A/B. Cependant, le dénominateur ne peut pas s'annuler car il ne peut par y avoir de division par zéro. Ainsi, dans une équation comme

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x^2+2x+1}=0$$

$x=3$ et $x=-1$ sont les zéros du numérateur, mais $x=-1$ annule le dénominateur (ce qui cause une division par zéro !). La valeur $x=-1$ n'est donc par un zéro de l'équation.

1.4.4 Opérations inverses usuelles

En algèbre, on utilise souvent le « principe de la balance » : on peut faire la même opération de « chaque côté » d'une égalité. Les opérations inverses les plus souvent utilisée sont indiquées dans la liste suivante, avec les restrictions faisant en sorte que les opérations soient inversibles.

$A+C=B \iff A=B-C$

$CA=B \iff A=\frac{1}{C}B$ si $C\neq 0$.

$A^n=B \implies A=\pm\sqrt[n]{B}$ si n pair.

$A^n=B \iff A=\sqrt[n]{B}$ si n impair.

$b^A=B \iff \log_b(B)=A$ si $B>0$.

$\sin(A)=B \iff A=\arcsin(B)$ si $-\frac{\pi}{2}\leq A\leq\frac{\pi}{2}$

$\cos(A)=B \iff A=\arccos(B)$ si $0\leq A\leq\pi$

$\tan(A)=B \iff A=\arctan(B)$ si $-\frac{\pi}{2}<A<\frac{\pi}{2}$

Remarque 1.4. Il faut faire la différence entre résoudre une équation comportant un carré et appliquer l'opération racine carrée. Si on résout une équation de la forme

$$x^2=a,$$

qui a comme solutions $x=\pm\sqrt{a}$ si $a\geq 0$, donc deux solutions. Si on applique la fonction racine carrée sur a, il y a une seule valeur, le résultat de l'opération $\sqrt{a}$, qui est toujours positif.

Par exemple :

$$x^2 = 2 \implies x = \pm\sqrt{2} \text{ (deux solutions)}$$

$$\text{La racine carrée de 2 est } \sqrt{2} \text{ (une seule valeur)}$$

Formule quadratique

On apprend à l'école secondaire qu'il y a une « formule » permettant de trouver directement les zéros d'un polynôme général de degré 2.

Théorème 1.8 (Formule quadratique)**.** Les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont données par

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Démonstration. Si $ax^2+bx+c=0$, alors,

$$\begin{aligned}
a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) &= 0 && \text{mise en évidence de } a\\
a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) &= 0 && \text{complétion du carré } x^2+\frac{b}{a}x\\
a\left(\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) &= 0 && \text{associativité}\\
a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) &= 0 && \text{trinôme carré parfait}\\
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c &= 0 && \text{distribution de } a\\
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a}-c && \text{application d'une même opération}\\
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a} && \text{dénominateur commun}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2} && \text{application d'une même opération } (\div a)\\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} && \text{substitution dans solution de } A^2=B\\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}} && \text{propriétés des exposants}\\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && \text{propriétés des exposants}\\
x &= -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && \text{application d'une même opération}\\
x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && \text{propriétés des fractions}
\end{aligned}$$

□

Exemple 1.17. En utilisant la formule quadratique, on a que $-x^2+2x+4=0$ si

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2-4(-1)(4)}}{2(-1)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{-2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{-2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4(5)}}{-2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{-2} \\ &= \frac{-2\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{-2} \\ &= 1+\sqrt{5} \text{ ou } 1-\sqrt{5} \end{aligned}$$

Exemple 1.18.

$$3x^2+4x+5=0 \iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4(3)(5)}}{2(3)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-60}}{6}$$

Comme $\sqrt{16-60}$ n'est pas défini, l'équation donnée n'a pas de solutions.

Définition 1.9. Le nombre $\Delta = b^2-4ac$ est appelé le **discriminant** de l'équation quadratique $ax^2+bx+c=0$.

Proposition 1.1. Le discriminant détermine le nombre de zéros de l'équation quadratique $ax^2+bx+c=0$:

Si $\Delta > 0$ alors l'équation à 2 solutions distinctes.
Si $\Delta = 0$ alors l'équation à 1 seule solution.
Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solutions.

Démonstration. Il suffit d'utiliser la formule quadratique donnant les solutions de quadratique $ax^2+bx+c=0$. En effet, comme $\Delta = b^2-4ac$, la formule quadratique peut s'écrire

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

La racine carrée de la formule quadratique doit être définie pour obtenir des solutions. C'est le cas uniquement si $\Delta \geq 0$. Dans le cas où $\Delta = 0$, la formule quadratique donne une seule solution :

$$\frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

Si $\Delta > 0$, les deux nombres $\pm\sqrt{\Delta}$ sont distincts et on trouve deux solutions

Enfin, si $\Delta < 0$, $\sqrt{\Delta}$ n'est pas défini et il n'y a pas de solutions. □

1.4.5 Factorisation

Factorisation de polynômes de degrée 2

Comme la factorisation joue un rôle important pour trouver les zéros d'un polynôme et que plusieurs problèmes se traduisent en équation polynômiale du deuxième degré, les techniques de factorisations des polynômes de degré 2 sont utiles pour résoudre de tels problèmes. Rappelons qu'un polynôme de degré 2 est de forme générale

$$ax^2 + bx + c.$$

La technique la plus souvent utilisée est le « produit-somme ».

Produit-somme avec a=1 Si on fait le produit des deux facteurs $(x+u)$ et $(x+v)$, on obtient un polynôme de degrée 2 avec a=1 :

$$(x+u)(x+v) = x^2 + (u+v)x + (uv).$$

Dans ce polynôme, on a que $b = u+v$ est la somme de u et de v, et que $c = uv$ est le produit de u et v. On peut ainsi factoriser $x^2 + bx + c$ en trouvant deux nombres u et v tels que $u+v = b$ et $uv = c$.

Exemple 1.19. Pour factoriser le polynôme

$$x^2 + x - 6,$$

on cherche deux nombres u et v tels que leur produit $uv = -6$ et leur somme $u+v = 1$. On peut chercher ces nombres en trouvant toutes les manière de multiplier deux entiers pour obtenir -6. On trouve ensuite la somme de ces deux facteurs dans chaque cas : la bonne combinaison est celle où la somme est $b = 1$.

u	v	$u+v$
1	-6	-5
-1	6	5
-2	3	1
3	-3	-1

On trouve donc que $u = -2$ et $v = 3$, ce qui nous donne la factorisation :

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3).$$

Avec assez de pratique, ont peut trouver mentalement les deux nombres u et v de cette factorisation.

Produit somme avec $a \neq 1$ Dans ce cas, on veut factoriser un polynôme de forme générale

$$ax^2 + bx + c.$$

Pour trouver la factorisation de manière générale, on commence avec deux facteurs quelconques de degré 1 : $(px+q)$ et $(sx+t)$. Si on les multiplie, on obtient :

$$\begin{aligned}(px+q)(sx+t) &= (px+q)sx + (px+q)t \\ &= psx^2 + qsx + ptx + qt \\ &= psx^2 + (qs+pt)x + qt\end{aligned}$$

Si on fait correspondre le développement de ce produit avec la forme générale du polynôme de degrée 2 que l'on veut factoriser, on trouve

$$ax^2 + bx + c = psx^2 + (qs + pt)x + qt$$

Ainsi, pour factoriser $ax^2 + bx + c$, on veut deux nombres $u = qs$ et $v = pt$ tels que

$$uv = ax \text{ et } u + v = b.$$

Exemple 1.20.

$$2x^2 - 3x - 2$$

Produit $uv = 2(-2) = -4$ et somme $u + v = -3$

u	v	$u+v$
1	-4	-3
-1	4	3
2	-2	0
-2	2	0

On a donc $u = 1$ et $v = -4$. On factorise pas double mise en évidence en écrivant $-3x$ comme $x - 4x$:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x - 2 &= 2x^2 + x - 4x - 2 \\ &= x(2x+1) - 2(2x+1) \\ &= (x-2)(2x+1). \end{aligned}$$

Lien entre facteurs et zéros

Comme nous l'avons dit précédemment, la factorisation est une stratégie importante pour simplifier une équation afin de la résoudre.

Exemple 1.21. Considérons l'équation

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

En factorisant le membre de gauche, on obtient

$$(x+1)(x-5) = 0.$$

Comme un produit de facteur est nul si un de ses facteur est nul, soit $(x+1) = 0$, soit $(x-5) = 0$. Les solutions sont donc $x = -1$ ou $x = 5$.

On voit dans cet exemple que chaque facteur de degré un, donc de la forme $x - a$, correspond à une solution de l'équation originale. Il y a en fait une correspondance entre les facteurs de degré 1 et les zéro : si $x = a$ est un zéro d'une équation polynômiale $P(x) = 0$, alors $(x - a)$ est un facteur de $P(x)$.

Le résultat suivant dit que chaque zéro d'un polynôme est lié à un « facteur coupable » lui correspondant et réciproquement.

Proposition 1.2 (Factorisation)**.** Si $P(x)$ est un polynôme quelconque, alors a

est un zéro de $P(x)$ si et seulement si $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$:

$$P(a)=0 \iff P(x)=(x-a)Q(x).$$

On peut résumer ce lien entre facteurs de degré 1 d'un polynôme et zéro du polynôme sous forme d'un « slogan » plus facile à mémoriser :

« zéro si et seulement si facteur (de degré 1). »

Exemple 1.22. Si $P(x)=x^2-x-2$, on a que

$$P(2)=2^2-2-2=0.$$

La valeur $a=2$ est donc un zéro de $P(x)$. Le théorème de factorisation dit que $P(x)$ doit avoir $(x-2)$ (c'est à dire le facteur (x-le zéro)) comme facteur. Si on divise $P(x)=x^2-x-2$ par $(x-2)$, on trouve que

$$P(x)=(x-2)(x+1),$$

ce qui est est bien de la forme donnée par le théorème :

$$P(x)=(x-a)Q(x).$$

Exemple 1.23. La valeur $x=1$ est un zéro de x^3-1. On sait donc par le théorème de factorisation que $x^3-1=(x-1)Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme à déterminer. On peut toujours déterminer $Q(x)$ en divisant :

$$Q(x)=\frac{x^3-1}{(x-1)}.$$

En divisant, trouve que $Q(x)=x^2+x+1$, et donc

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

Démonstration. Comme le résultat à démontrer est de la forme « $A \iff B$ », on fait les démonstration de chacune des deux implications $A \implies B$ et $A \impliedby B$.

($\implies$) Supposons que $P(a)=0$. On peut diviser $P(x)$ par $(x-a)$ pour obtenir un expression de la forme

$$P(x)=(x-a)Q(x)+R(x),$$

où $R(x)$ est le reste de la division et $Q(x)$ le quotient.

Le degré de $R(x)$ doit être zéro car on divise par le polynôme $(x-a)$ qui est de degré 1. (Le degré du reste est toujours strictement inférieur au degré du polynôme par lequel on divise.) Comme un polynôme de degré 0 est en fait une constante $R\in\mathbb{R}$, en divisant on a donc réécrit $P(x)$ comme suit :

$$P(x)=(x-a)Q(x)+R$$

Si on évalue chaque membre de cette dernière égalité en a, on obtient

$$P(a)=(a-a)Q(a)+R$$

Par hypothèse, $P(a) = 0$. De plus, le facteur $a - a$ est toujours nul. On a donc

$$0 = 0 + R.$$

La seule valeur de R satisfaisant cette équation est zéro. On a donc établit que

$$P(x) = (x-a)Q(x) + 0 = (x-a)Q(x),$$

c'est à dire que $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$.

$(\Longleftarrow)$ Pour démontrer la réciproque, on fait l'hypothèque que $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$. Dans ce cas, on peut écrire $P(x)$ comme un produit de facteur de la forme

$$P(x) = (x-a)Q(x)$$

où $Q(x)$ est le quotient de la division de $P(x)$ par $(x-a)$.

On veut montrer que $P(a) = 0$. Il suffit d'évaluer la forme factorisée :

$$P(a) = (a-a)Q(a) = (0)Q(a) = 0. \qquad \square$$

On peut conclure du théorème de factorisation que pour un polynôme $P(x)$,

$$P(a) \neq 0 \iff P(x) \text{ n'a pas de facteur de la forme } (x-a).$$

Cela permet de vérifier qu'un polynôme n'a pas de facteur de la forme $x-a$ sans chercher montrer directement que la factorisation est impossible. Il suffit plutôt d'évaluer $P(a)$.

Polynômes premiers

La proposition 1.2 établit une correspondance entre les facteurs de degré 1 (donc de la forme $(ax-b)$) et les zéros d'un polynôme. On peut utiliser cette proposition de manière répétée pour factoriser un polynôme comme un produit de facteurs de degré 1.

Exemple 1.24. Factorisons $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ le plus possible.

On peut vérifier que $P(1) = (1)^3 - 2(1)^2 - (1) + 2 = 0$ (on « devine » par essai et erreur que 1 est un zéro du polynôme $P(x)$). Par la proposition 1.2, on sait que $x-1$ est le « facteur coupable » et que l'on peut factoriser $P(x)$ de la manière suivante :

$$P(x) = (x-1)Q(x),$$

c'est-à-dire

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)Q_1(x).$$

On trouve $Q(x)$ en divisant $P(x)$ par $x-1$. On trouve que

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x^2 - x - 2).$$

On peut factoriser davantage car $Q_1(2) = (2)^2 - (2) - 2 = 0$. Comme 2 est un zéro de $Q_1(x)$, on a que $Q_1(x)$ peut se factoriser comme

$$x^2 - x - 2 = (x-2)Q_2(x).$$

Comme il s'agit de factoriser un polynône de degré 2, on peut utilise la technique « produit-somme » au lieu de diviser (mais les deux techniques donnent le même résultat !). On trouve que

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1).$$

On a donc une factorisation complète :

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - x + 2 &= (x-1)(x^2 - x - 2) \\ &= (x-1)(x+1)(x-2). \end{aligned}$$

On sait que la factorisation donnée la le dernier exemple est complète car un facteur de degré 1 ne peut pas être factorisé davantage.

Proposition 1.3. Un polynôme de degré 1 ne peut pas être factorisé on un produit de deux autre polynômes non constants.

Démonstration. Un polynôme de degré 1 est de la forme

$$ax + b.$$

Si on pouvait l'écrire comme un produire de deux autre polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ non constants (de degré plus grand ou égal à 0), on devrait pouvoir écrire

$$ax + b = P(x)Q(x).$$

Or si on multiplie deux polynômes de degré n et m, le produit est de degré $n+m$. Dans ce car, il faudrait que

$$\deg(ax+b) = \deg(P(x)) + \deg(Q(x)) \geq 2,$$

ce qui est impossible car $ax + b$ est de degré 1. □

On sait que certains polynômes ne se factorisent pas. L'exemple le plus connu est souvent vu au secondaire : $x^2 + 1$ ne se factorise pas. Ainsi, il n'est pas toujours possible de factoriser un polynôme comme un produit de polynômes de degré 1.

Exemple 1.25. Nous avons factorisé précédemment le polynôme $x^3 - 1$ à l'aide de la proposition **??** :

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Est-ce que cette factorisation est complète ? Cela revient à se demander si

$$x^2 + x + 1$$

peut être factorisé. Cela n'est pas possible. En effet, le discriminant de $x^2 + x + 1$ est $\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$. Par la proposition 1.1, le polynôme $x^2 + x + 1$ n'a pas de zéros.

Si on pouvait écrire ce polynôme de degré 2 comme le produit de deux facteurs, ces facteurs devraient être des facteurs de degré 1. Supposons que ces facteurs sont $ax + b$ et $cx + d$. La factorisation, si elle était possible, serait de la forme

$$x^2 + x + 1 = (ax+b)(cx+d).$$

Dans ce cas, $x^2 + x + 1$ aurait deux zéros, car si on substitue $\frac{b}{a}$ dans $ax + b$, le premier facteur s'annule, et si on substitue $\frac{d}{c}$ dans $cx+d$, le deuxième facteur s'annule. Comme le polynôme x^2+x+1 n'a pas de zéro, cela est impossible.

On peut généraliser cet exemple pour démontrer un critère général.

Proposition 1.4. Un polynôme de degré 2 ax^2+bx+c ne peut pas être factorisé si et seulement si $\Delta = b^2-4ac < 0$.

Définition 1.10. Un polynôme $P(x)$ de degré ≥ 1 est **premier** s'il ne peut pas être factorisé comme un produit de deux autres polynômes de degré ≥ 1.

Est-ce tous les polynômes de degré 3 et plus peuvent être factorisés ou existe-t-il des polynômes premiers de degré supérieur à 3 ? Un théorème d'algèbre pouvant être démontré à l'aide des nombres complexes que nous n'étudions pas dans ce cours dit que les polynômes premiers de degré 1 et de degré 2 sont les seuls polynômes ne pouvant pas être factorisés ; autrement dit, tous les autres polynômes peuvent être factorisés !

Théorème 1.9. Les polynômes réels premiers sont de l'une des deux formes suivantes :

- degré 1 de la forme $c(x-a)$ (a est nécessairement un zéro)
- degré 2 de la forme ax^2+bx+c, où $\Delta = b^2-4ac < 0$. (polynôme de degré deux sans zéros).

Le résultat mathématique le plus important concernant la factorisation de polynômes est le *théorème fondamental de l'algèbre*. Il est similaire au *théorème fondamental de l'arithmétique* : les deux résultats disent qu'il y a une unique manière de factoriser complètement en facteur premier, que ce soit des nombres (arithmétique) ou des polynômes (algèbre).

Théorème 1.10 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** Tout polynôme réel peut s'écrire comme un produit d'une constante réelle et de polynômes premiers, produit unique à l'ordre des facteurs près.

La preuve du théorème fondamental de l'algèbre repose sur plusieurs propriétés des nombres complexes est ne peut pas être donnée sans étudier ceux-ci. On demande cependant dans ce cours-ci d'être capable de factoriser complètement des polynômes.

Enfin, comme chaque solution d'une équation polynômiale de la forme $P(x) = 0$ correspond à un facteur de degré 1 de $P(x)$, on déduit du théorème fondamental de l'algèbre le corolaire suivant.

Corollaire 1.1. Une équation polynômiale de degré n de la forme

$$P(x) = 0$$

a au plus n solutions.

1.4.6 Fractions algébriques

Définition 1.11. Une **fraction algébrique** est une expression de la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes. Autrement dit, c'est une fraction de la forme

$$\frac{\text{polynôme}}{\text{polynôme}}.$$

Comme on peut factoriser des polynômes (à cause du théorème fondamental de l'algèbre), certaines opérations que l'on peut faire avec des fractions peuvent aussi être effectuées avec des polynômes : simplification de fractions, plus grand commun dénominateur, plus petit commun multiples, etc.

Exemple 1.26. Simplifions la fraction algébrique

$$\frac{x^2+x-2}{x^3-1}.$$

Pour simplifier la fraction algébrique, on cherche des facteurs communs au numérateur et au dénominateur. Il faut donc factoriser ces deux polynômes.

$$\frac{x^2+x-2}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

(On utilise la technique « produit-somme » pour le numérateur et le théorème de factorisation pour le dénominateur, sachant que 1 est un zéro de x^3-1.)

On peut maintenant simplifier le facteur commun $(x-1)$.

$$\frac{x^2+x-2}{x^3-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)} = \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

On ne peut simplifier davantage car le numérateur et le dénominateur ne peuvent plus être factorisés (x^2+x+1 est un polynôme premier car $\Delta = 1^1 - 4(1)(1) < 0$.

Exemple 1.27. On peut simplifier

$$\frac{(2x+1)^3(x-2)^2+(2x+1)^2(x-2)^3}{(2x+1)(x-2)}$$

en mettant en évidence les plus grandes puissances possibles de $2x+1$ et de $x-2$

et en simplifiant ensuite :

$$\begin{aligned}\frac{(2x+1)^3(x-2)^2+(2x+1)^2(x-2)^3}{(2x+1)(x-2)} &= \frac{(2x+1)^2(x-2)^2\big((2x+1)+(x-2)\big)}{(2x+1)} \\ &= \frac{(2x+1)(x-2)^2\big((2x+1)+(x-2)\big)}{x-2} \\ &= \frac{(2x+1)(x-2)^2(3x-1)}{x-2}\end{aligned}$$

1.5 Fonctions, graphes et domaines

1.5.1 Fonctions et relations

En mathématiques on étudie les quantités et figures géométriques, mais aussi comment les objets mathématiques sont mis en relations les uns avec les autres. On étudie particulièrement les *fonctions*, qui sont un type de relation où un objet mathématique (un nombre, un vecteur, etc) peut être déterminé à partir d'un autre objet donné. On peut penser à la hauteur d'un triangle en fonction de son aire, à l'aire d'un carré en fonction de la longueur de son côté, au rayon du cercle en fonction de sa circonférence, à une règle de calcul disant qu'un nombre est le carré de l'autre, etc. Dans chaque cas, une quantité est déterminée en fonction d'une autre. Une *relation* est plus générale car elle établi un lien entre objets mathématique sans nécessairement qu'un soit déterminé uniquement en fonction des autres. On peut penser à la loi des gaz parfaits

$$PV = nRT.$$

Cette égalité établie une relation entre les quantités P, V et T, sans préciser si une est déterminée en fonction des autres. La loi des gaz parfaits est une relation et non une fonction.

> **Définition 1.12.** Une **fonction** $f\colon A \to B$ allant d'un ensemble A à un autre ensemble B est une règle quelconque associant à des éléments a de l'ensemble A un unique élément b de l'ensemble B.
>
> On dénote $f(a)$ l'élément de l'ensemble B associé à a.

Cette dernière définition est très générale et abstraite car elle appelle « fonction » une règle donnant des éléments d'un ensemble quelconque à partir des éléments d'un ensemble quelconque. Bien que les mathématiciennes et mathématiciens ont besoin d'une définition aussi générale pour pouvoir étudier la multitude d'objets mathématiques qui les intéressent, dans ce cours nous allons uniquement considérer des fonctions permettant de calculer des nombres réels.

> **Définition 1.13.** Une **fonction réelle** est une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une règle quelconque associant à un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ au plus un unique nombre réel $y \in \mathbb{R}$.
>
> On dénote $f(x)$ le nombre réel associé à x.

1.5.2 Définir une fonction

On peut définir une fonction réel f de plusieurs manières.

On peut le faire en donnant explicitement une expression algébrique pour déterminer $f(x)$ à partir de la valeur de x, par exemple

$$f(x) = x^2.$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

On peut aussi définir une fonction *implicitement* à l'aide d'une égalité algébrique (un relation), par exemple une des égalités suivantes :

$$y = x^2$$

$$x^2 - y = 0$$

Dans ce cas, il faut spécifier quelle variable est déterminée en fonction de l'autre variable. La variable « entrée » est appelée **variable indépendante** et la « sortie » est appelé **variable dépendante** — elle dépend de la valeur de la variable indépendante.

Remarque 1.5. La variable indépendante n'apparait pas nécessairement dans l'expression algébrique définissant une fonction. Par exemple,

$$f(x) = 5$$

Dans ce cas, peut importe la valeur de la variable indépendante x, la règle détermine que la variable dépendante vaut toujours 5. On appelle une telle fonction réelle donnant toujours la même valeur une **fonction constante**.

Une équation (donc une relation) ne définit pas toujours une fonction : il arrive qu'une valeur donnée de la variable indépendante corresponde à plusieurs valeurs de la variable dépendante. Par exemple

$$y^2 = x$$

ne définie par une fonction si on considère y comme variable dépendante. En effet, pour $x = 1$, les valeurs $y = 1$ et $y = -1$ satisfont toutes deux l'équation donnée. Il n'y a donc pas une valeur unique de y associée à la valeur $x = 1$. Cette relation ne défini donc pas une fonction si on considère y comme variable dépendante.

Fonctions définies par parties

La règle définissant une fonction peut être beaucoup plus complexe que celles pouvant être donnée par une équation ou une expression algébrique. On peut par exemple utiliser plusieurs expressions algébriques, variant selon la valeur de la variable indépendante. On appelle une telle fonction une **fonction définie par parties**, **par intervalle**. ou **par morceaux**.

Exemple 1.28.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ -x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1.5.3 Évaluation d'une fonction

La valeur d'un fonction définie par une expression algébrique est déterminée par substitution. Par exemple, si $f(x) = x^2 + 1$, on détermine $f(2)$ en remplaçant x par 2 dans l'expression $x^2 + 1$ définissant la fonction :

$$f(2) = (2)^2 + 1.$$

On dit que $f(2)$ est la valeur de la fonction en $x = 2$.

En général, dans l'expression $f(x)$, on appelle 2 l'**argument** de la fonction.

On peut évaluer une fonction en y substituant une expression algébrique. Par exemple, si $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, on a que

$$f(x+1) = \frac{(x+1)}{(x+1)+2}.$$

On note que toutes les occurrences de x dans l'expression définissant f sont remplacées par l'expression argument de la fonction.

Exemple 1.29. Si $f(x) = x^2 + 3$, alors $f(x+1) = (x+1)^2 + 3$.

Si $f(x) = x^2 - x$, alors $f(x+2) = (x+2)^2 - (x+2)$.

Si $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x+1}$, alors $f(x^2 + x) = \dfrac{(x^2 + x)^2 + (x^2 + x)}{(x^2 + x) + 1}$.

Remarque 1.6. Une erreur de compréhension peut donner beaucoup de difficulté à comprendre la notation utilisée pour les fonctions : la notation $f(x)$ ne désigne pas un produit ; $f(x)$ n'est pas le produit de f par x. En conséquence, la simplification suivante n'a pas de sens :

$$\frac{\cancel{f}(x)}{\cancel{f}(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$

car f n'est pas un nombre (on peut simplifier un facteur commun au numérateur et au dénominateur, mais un facteur est toujours un nombre ou une expression algébrique représentant un nombre).

Évaluation de fonctions définies par parties

Pour évaluer une fonction définie par partie, on doit utiliser l'expression algébrique déterminée par la condition qui est vraie pour la valeur de la variable indépendante donnée.

Exemple 1.30. Si f est la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ -x & \text{si } x \leq 1, \end{cases}$$

Évaluons $f(2)$. Comme $f(x) = x^2$ pour $x > 1$ et que $x = 2 > 1$, on a que $f(2) = (2)^2 = 4$.

Évaluons $f(1)$: comme $x = 1 \leq 1$, la deuxième condition est satisfaire et $f(1) = -(1) = -1$. Si

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

évaluons $g(-1)$: comme $x = -1 < 0$, la deuxième condition est satisfaite, alors $g(x) = -x$ pour $x < 0$ et $g(-1) = -(-1) = 1$.

Si

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

évaluons $h(1)$. Comme $x = 1$, c'est la deuxième condition qui est satisfaite. On a donc que $h(1) = 3$.

1.5.4 Composition de fonctions

Si on a deux fonctions $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$ on peut créer une nouvelle fonction en appliquant la règle de f et ensuite la règle de g. On appelle cette fonction la **composée** de f et g.

Définition 1.14. Si $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$, alors la composition de f et g est définie par

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$$

La notation $g \circ f$ se lit « g rond f »

Exemple 1.31. Par exemple, si

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ et } g(x) = x + 1,$$

la composée de f et g est

$$g(f(x)) = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1) + 1$$

On note cette nouvelle fonction $g \circ f$ (lire « g rond f »). Ainsi

$$g \circ f(x) = (x^2 + 1) + 1 = x^2 + 2.$$

La composée de g et f est

$$f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 + 1$$

Ainsi

$$f \circ g(x) = (x + 1)^2 + 1.$$

Dans ce dernier exemple, on voit qu'en général $f \circ g \neq g \circ f$.

Composition de fonctions définies algébriquement

La composition de fonction peut être déterminée même si on défini les fonctions sans utiliser la notation d'Euler « f(x). »

Par exemple, si on a les relations

$$z = y^2 \text{ et } y = (x + 1),$$

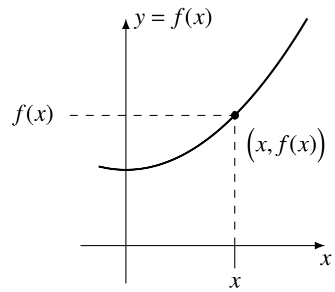
on peut considérer que z est fonction de y et que y est fonction de x. Dans ce cas, si on fixe une valeur de x, on peut calculer une valeur de y et à partir de cette valeur intermédiaire, on peut déterminer la valeur de z. C'est exactement la composition des deux fonctions donnée. On trouve la relation directe en z et x en substituant l'expression déterminant y en fonction de x à la place de y dans l'expression déterminant z en fonction de y :

$$z = y^2 = (x+1)^2.$$

On a donc la fonction composée $z = (x+1)^2$, donnant la valeur de z directement en fonction de la valeur de x.

1.5.5 Graphe d'une relation ou d'une fonction

Le *graphe* d'une fonction f est l'ensemble des points de la forme $(x, f(x))$. Dans le cas des fonctions réelles, ces points peuvent être placés dans le plan cartésien pour obtenir une représentation graphique de f. Par exemple, si $f(x) = x^2 + 1$, on obtient



On peut déterminer les coordonnées exactes d'un point du graphe d'une fonction en évaluant la fonction. Par exemple, si $f(x) = x^2 + 1$, le point

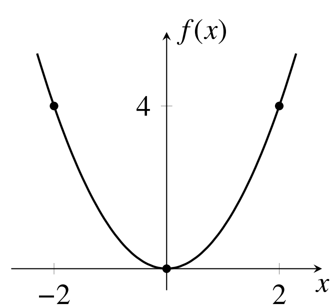
$$(1, f(1)) = (1, 2)$$

fait partie du graphe de la fonction.

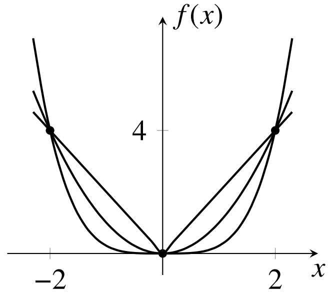
Remarque 1.7. On peut se faire une idée de l'allure du graphe d'une fonction en calculant les coordonnées de quelques points sur la fonction. Par exemple, si $f(x) = x^2$, on a que

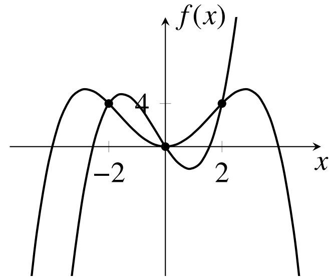
x	-2	0	2
$f(x)$	4	0	4

On peut placer ces points dans le plan cartésien ; si on sait à l'avance que le graphe doit être une parabole, on peut tracer la parabole qui passe par ces trois points :



Si on ne sait pas que le graphique doit être une parabole, on peut tenter de deviner l'allure du graphique à partir de ces quelques points. Cependant cela ne fonctionne pas, car plusieurs courbes « raisonnables » passent par ces points :





Ajouter des points ne permettrait pas de déterminer le graphique de manière unique : le nombre de points $(x, f(x))$ calculés peut être aussi grand que l'on veut, il y aura toujours plusieurs graphiques possibles.

Dans ce cours, même si vous devez comprendre que les points de la forme $(x, f(x))$ sont sur le graphe de f, vous ne pourrez pas calculer quelques points pour tracer le graphe d'une fonction car cela n'est pas suffisant mathématiquement pour déterminer l'allure d'un graphique. Vous apprendrez plutôt à faire l'analyse de la fonction (à l'aide notamment des concepts du calcul différentiel) pour en faire une esquisse.

Les points de croisement avec les axes de coordonnées donnent souvent de l'information importante sur une fonction.

Définition 1.15. Les **zéros** d'une fonction sont les points de croisement de son graphe avec l'axe des abscisses (des x). On les trouve en résolvant l'équation

$$f(x) = 0$$

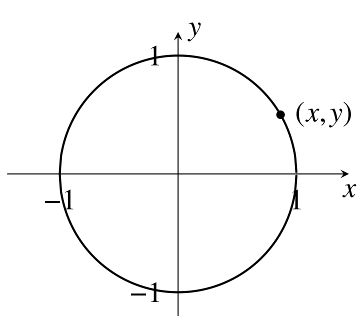
L'**ordonnée à l'origine** d'une fonction est le point de croisement de son graphe avec l'axe des ordonnées (des y). On la trouve en évaluant la fonction en 0 :

$$f(0).$$

On peut aussi faire le graphe d'une relation qui n'est pas nécessairement une fonction. Dans ce cas, le graphe est l'ensemble de tous les points satisfaisant la relation donnée. Par exemple, la relation

$$x^2 + y^2 = 1$$

est constituée de tous les points sur le cercle unité :



On peut trouver un point sur le graphe d'une relation en donnant une valeur à une variable et en isolant pour trouver la valeur de l'autre variable.

Exemple 1.32. Trouvons un point sur le graphe de la relation

$$2x^2 + 3y^2 = 1.$$

Si on prend $x = 0$, on obtient

$$2(0)^2 + 3y^2 = 1.$$

En simplifiant

$$3y^2 = 1.$$

On isole y :

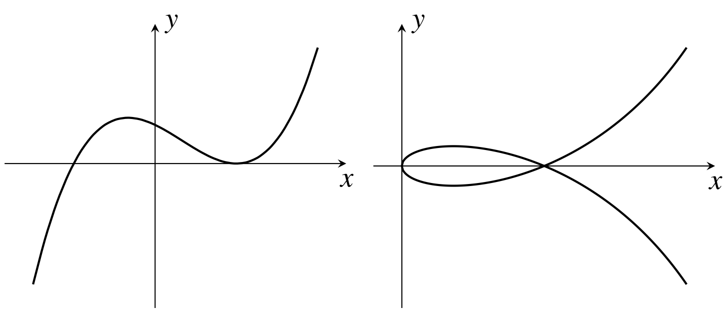
$$y^2 = \frac{1}{3}.$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Il y a donc deux points correspondant à $x = 0$ sur le graphe de la relation donnée :

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ et } \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Note 1.2. On peut déterminer si une relation peut être vue comme une fonction par une propriété géométrique de son graphe : comme $f(x)$ a au plus une seule valeur pour chaque valeur de x, la droite verticale passant par x doit passer par au plus une valeur de y. Le graphe de gauche a cette propriété alors que le graphe de droite ne l'a pas. Le graphe de gauche représente la fonction définie par l'équation $y = x^3 - x^2 - x + 1$. Le graphe de droite représente une relation (définie par l'équation algébrique $y^2x + x^3 - 3y^2 - 2x^2 + x = 0$) pour laquelle on ne peut pas considérer y comme une fonction de x.



1.5.6 Fonctions réciproques

Définition 1.16. On dit que les fonctions f et g sont **inverses** ou **réciproques** l'une de l'autre si

$$g(f(x)) = x \quad f(g(y)) = y$$

pour toutes les valeurs où ces expressions sont définies.

Exemple 1.33. Les fonctions

$$f(x) = \frac{x-2}{3} \text{ et } g(x) = 3x + 2$$

sont des fonctions réciproques l'une de l'autre. En effet,

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g\left(\frac{x-2}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{x-2}{3}\right)+2 \\ &= (x-2)+2 \\ &= x. \end{aligned}$$

De même, on a que

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(3x+2) \\ &= \frac{(3x+2)-2}{3} \\ &= \frac{3x}{3} \\ &= x \end{aligned}$$

Si la fonction est définie par une équation, on peut trouver la fonction inverse en isolant la variable indépendante en fonction de la variable dépendante. Cependant, cela ne donne pas toujours une fonction.

Exemple 1.34. Trouvons la fonction réciproque de la fonction définie par $y = 3x+1$. On isole x.

$$x = \frac{y-1}{3}$$

Pour exprimer la fonction réciproque en utilisant x comme variable indépendante, on interchange les variables x et y :

$$y = \frac{x-1}{3}.$$

Exemple 1.35. Trouvons la fonction réciproque de la fonction définie par $y = x^2+1$. On isole x.

$$x = \pm\sqrt{y-1}$$

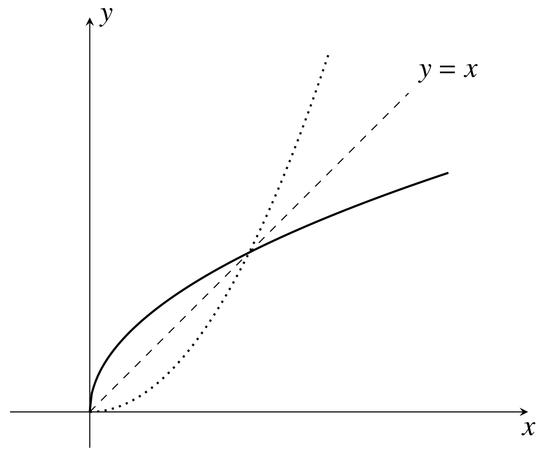
Pour exprimer la fonction réciproque en utilisant x comme variable indépendante, on interchange les variables x et y :

$$y = \pm\sqrt{y-1}.$$

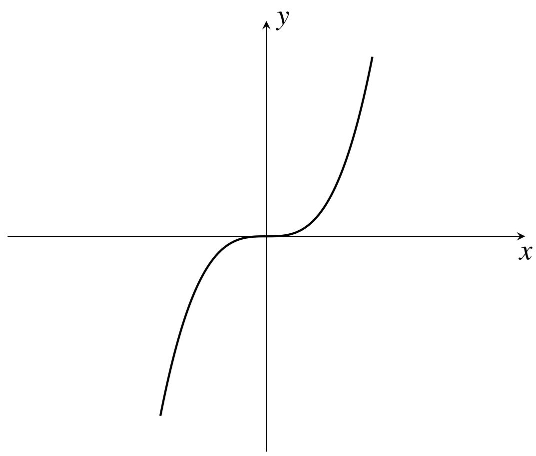
Cette expression ne définie par une fonction car pour une valeur de x donnée on a deux valeurs différentes de y. La fonction définie par $y = x^2+1$ n'a donc pas de fonction réciproque.

Graphe d'une fonction réciproque

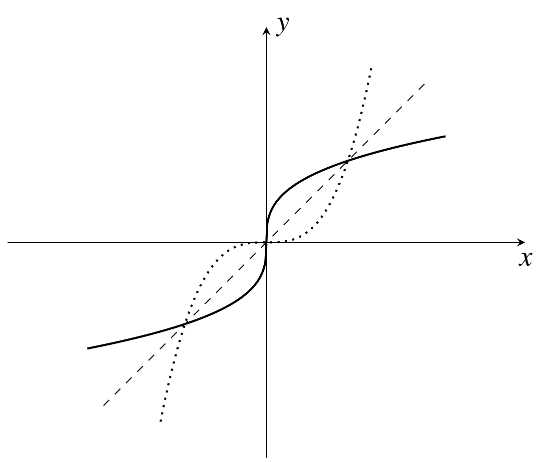
Si f^{-1} est la fonction réciproque de f, son graphe est le résultat de la symétrie par rapport à la droite $y = x$ dans le plan cartésien.



Exemple 1.36. Le graphe de la fonction $f(x) = x^3$ est



La fonction inverse de $f(x) = x^3$ est $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$. On trouve le graphe de f^{-1} par symétrie par rapport à la droite $y = x$.



1.5.7 Domaine d'une fonction

Définition 1.17. Le **domaine de définition** d'une fonction $f\colon A \to B$ est l'ensemble des éléments de A où $f(a)$ est défini. Notation :

$$\mathrm{dom}(f) = \{a \mid f(a) \text{ est défini}\}.$$

Les fonctions qui seront étudiées dans ce cours sont des **fonctions réelles**, c'est-à-dire les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On détermine le domaine d'une fonction réelle définie à l'aide des opérations dites « élémentaires » en utilisant les principes suivants.

$(\cancel{\div 0})$ Il ne peut y avoir de division par zéro.

$$\frac{A}{B} \text{ est défini} \iff B \neq 0$$

$\left(\cancel{\sqrt{} < 0}\right)$ Il ne peut y avoir de racine paire de nombre négatifs.

$$\sqrt{A} \text{ est défini} \iff A \geq 0$$

$\left(\cancel{\log_b(\leq 0)}\right)$ Le logarithme d'un nombre négatif ou nul n'est pas défini (peu importe la base)

$$\log_b(A) \text{ est défini} \iff A > 0$$

Exemple 1.37. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x-3}$. Le domaine de f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ où $f(x)$ est défini. Comme il y a une racine carrée dans la définition de f, on a que

$$\begin{aligned} f(x) \text{ def} &\iff \sqrt{2x-3} \text{ def} \\ &\iff 2x - 3 \geq 0 \\ &\iff 2x \geq 3 \\ &\iff x \geq 3/2 \end{aligned}$$

On a donc que $f(x)$ est défini pour $x \geq 3/2$. Le domaine est donc

$$\operatorname{dom}(f) = [3/2, \infty[.$$

Exemple 1.38. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$. Le domaine de f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ où $f(x)$ est défini. Comme il y a une division dans la définition de f, on a que

$$\begin{aligned} f(x) \text{ def} &\iff \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \text{ def} \\ &\iff x^2 - 4x + 3 \neq 0 \\ &\iff (x-1)(x-3) \neq 0 \\ &\iff x - 1 \neq 0 \text{ et } x - 3 \neq 0 \\ &\iff x \neq 1 \text{ et } x \neq 3 \end{aligned}$$

On a donc que $f(x)$ est défini pour $x \neq 1$ ou 3. Le domaine est donc

$$\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}.$$

Rappels sur les inégalités

On voit dans l'exemple précédent certaines des conditions données pour déterminer le domaine d'une fonction exige de manipuler des inégalités. Voici un rappel des propriétés importantes permettant de le faire.

Hypothèse 2. *Pour tous nombres réels a,b,c, on a que*

$$a \leq b \text{ et } b \leq c \implies a \leq c$$
$$a < b \text{ et } b < c \implies a < c$$

Additionner un constante préserve les inégalités :

$$a \leq b \implies a+c \leq b+c$$

$$a < b \implies a+c < b+c$$

Multiplier par une constante positive préserve les inégalités :

$$a \leq b \implies ac \leq bc \ (\text{si } c > 0)$$

$$a < b \implies ac < bc \ (\text{si } c > 0)$$

Multiplier par une constante négative inverse le sens des inégalités :

$$a \leq b \implies ac \geq bc \ (\text{si } c < 0)$$

$$a < b \implies ac > bc \ (\text{si } c < 0)$$

Inverser change de sens des inégalités :

$$a \leq b \implies \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

$$a < b \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Remarque 1.8. Une erreur fréquente consiste à imaginer faussement que certaines fonction préservent les inégalités. Par exemple si

$$4 \leq x^2,$$

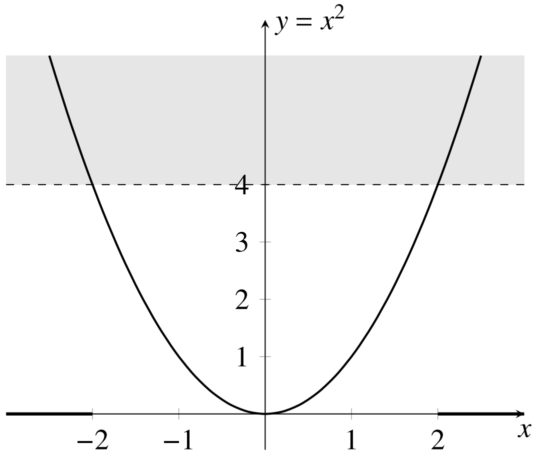
cela n'implique pas que

$$2 \leq x.$$

Autrement dit, la fonction racine carré ne préserve pas les inégalités.

$$a \leq b \not\Longrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

On peut voir pourquoi dans le graphe de $y = x^2$:



On voit que $x^2 \geq 4$ dans la région en gris dans le graphique précédent. Cela correspond aux valeurs suivantes de x :

$$x \leq -2 \text{ ou } 2 \leq x$$

On peut aussi voir comprendre la situation par la loi des signes.

$$\begin{aligned} 4 \leq x^2 &\iff 0 \leq x^2 - 4 \\ &= \iff 0 \leq (x-2)(x+2) \end{aligned}$$

Pour que $4 \leq x^2$, il faut que le produit de $(x-2)$ par $(x+2)$ soit positif. Il faut donc que ceux deux facteurs soit positif, ou que ces deux facteurs soient négatifs. Dans le premier cas, on a

$$0 \leq x-2 \iff 2 \leq x \text{ et } 0 \leq x+2 \iff -2 \leq x$$

Ces deux inégalités sont vraies dès que $2 \leq x$, car si $2 \leq x$, on a automatiquement que $-2 \leq x$.

Dans le second cas, on a

$$x-2 \leq 0 \iff x \leq 2 \text{ et } x+2 \leq 0 \iff x \leq -2$$

Ces deux inégalités sont vraies dès que $-22 \leq x$, car si $x \leq -2$, on a automatiquement que $x \leq 2$.

Ainsi, on a que $4 \leq x^2$ dès que $x \leq 2$ ou $x \leq -2$.

Exemple 1.39. Trouvons le domaine de $f(x) = \sqrt{x^2-4x-5}$. La seule opération pouvant limiter le domaine de la fonction est la racine carrée.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-4x-5} \text{ est défini } &\iff x^2-4x-5 \geq 0 \\ &\iff (x-5)(x+1) \geq 0 \end{aligned}$$

Le produit $(x-5)(x+1)$ est positif si ses deux facteurs sont de même signe. On doit donc traiter des deux cas.

Si les deux facteurs sont positifs, on a

$$x-5 \geq 0 \text{ et } x+1 \geq 0.$$

Dans ce cas, $x \geq 5$ et $x \geq -1$. Les deux conditions sont satisfaites quand $x \geq 5$.

Si les deux facteurs sont négatifs ou nuls, on a

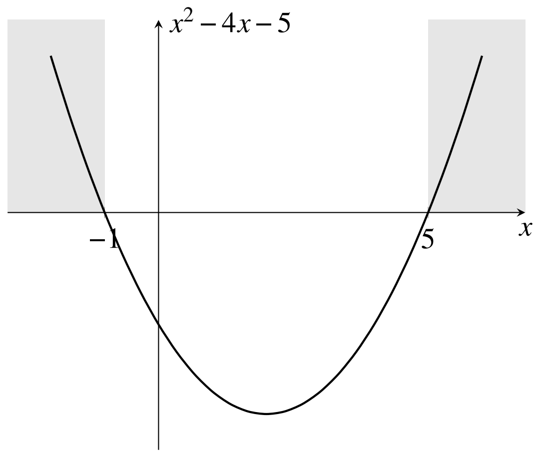
$$x-5 \leq 0 \text{ et } x+1 \leq 0.$$

Dans ce cas, $x \leq 5$ et $x \leq -1$. Les deux conditions sont satisfaites quand $x \leq -l$.

La racine $\sqrt{x^2-4x-5}$ est donc définie quand $x \leq -1$ ou $5 \leq x$. On a donc que

$$\text{dom}(f) =]-\infty, -1] \cup]5, \infty[.$$

On peut aussi déterminer la région où $x^2-4x-5 \geq 0$ l'aide du graphe de $y = x^2-4x-5 = (x+1)(x-5)$. (On peut faire une esquisse de cette fonction rapidement car on connait ses deux zéros grâce à la forme factorisée et on connait l'orientation de la parabole par le coefficient de x^2 est positif.



Ce graphe permet de déterminer que $x^2-4x-5 \geq 0$ si

$$x \in]-\infty, -1] \cup]5, \infty[.$$

Domaine de fonctions plus complexes

On détermine le domaine d'une fonction définie par composition de plusieurs fonction élémentaires en vérifiant que chacune des opérations utilisée est définie.

Exemple 1.40. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x-1}}$. Le domaine de f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ où $f(x)$ est défini. Comme il y a une racine carrée dans la définition de f, on a que

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} \text{ def} &\iff x-1 \geq 0 \\ &\iff x \geq 1\end{aligned}$$

On a donc que pour que $f(x)$ soit défini, il faut que $x \geq 1$.

Il y a une seconde opération problématique, la division.

$$\begin{aligned}\frac{3x}{\sqrt{x-1}} \text{ est défini } &\iff \sqrt{x-1} \neq 0 \\ &\iff x-1 \neq 0 \\ &\iff x \neq 1\end{aligned}$$

La fonction est donc définie quand $x \geq 1$ et $x \neq 1$. En combinant ces deux condition, on a donc

$$\mathrm{dom}(f) =]1, \infty[.$$

De manière générale, on détermine de domaine de la composition de deux fonctions de la manière suivante :

Définition 1.18.

$$\mathrm{dom}(f \circ g) = \{x \in \mathrm{dom(g)} \mid g(x) \in \mathrm{dom}(f)\}$$

Cette définition dit que pour que $f \circ g(x) = f(g(x))$ soit défini, il faut que $g(x)$ soit défini et que $f(g(x))$ soit aussi défini, autrement dit que $g(x)$ est dans le domaine de f.