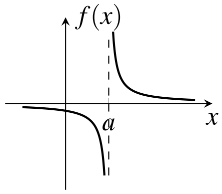
Résumé analyse de fonctions

Asymptotes

Asymptotes verticales (AV)

La fonction f a une AV en $x=a$ si

$$\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty.$$



x	a
$f(x)$	$\pm\infty$ AV

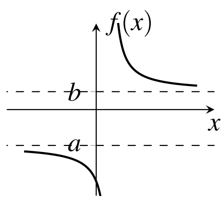
Pour les fonctions algébriques, on trouve les AV pour les valeurs de x où il y a division par 0.

Asymptotes horizontales (AH)

La droite $y=C$ est une AH de f si

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = C.$$

Il y a 0, 1 ou 2 AH pour une fonction donnée.

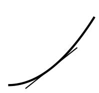


x	$-\infty$	∞
$f(x)$	a	b

Dérivée et croissance

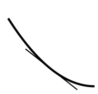
Si $f'(x) \geq 0$ sur [a,b], alors $f(x)$ croissante sur $[a,b]$

$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$



Si $f'(x) \leq 0$ sur [a,b], alors $f(x)$ décroissante sur $[a,b]$

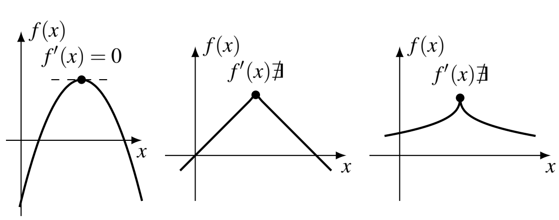
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\searrow$



Extrémumns

Thm de Fermat généralisé

Si $f(x)$ a un minimum ou un maximum en $x=a$, alors $f'(a)=0$ ou $f'(a)\nexists$.



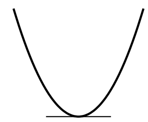
Les **valeurs critiques** de f sont les valeurs $x=a$ où $f'(a)=0$ ou $f'(a)\nexists$.

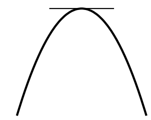
Test de la dérivée première

Si a est une valeur critique de f, alors $f(a)$ est un extrémum local si $f'(x)$ change de signe en $x=a$.

$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$



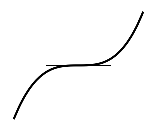


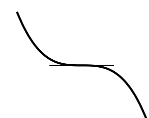
Autres points singuliers

Points stationnaires

$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	STA	$\nearrow$

$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	STA	$\searrow$





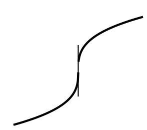
Tangente verticales (TV)

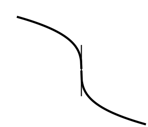
f a une TV en $x=a$ si $f(a)$ est défini et la pente de la tangente devient « ∞ » :

$$\lim_{x\to a} f'(x) = \pm\infty.$$

$f'(x)$	$+$	∞	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\overset{c}{\text{TV}}$	$\nearrow$

$f'(x)$	$-$	∞	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\overset{c}{\text{TV}}$	$\searrow$

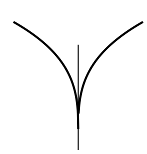


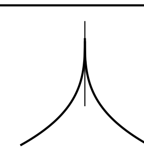


Si f' change de signe en $x=a$ et f a une TV en $x=a$, alors on dit que f a un point de rebroussement (PR) en $x=a$.

$f'(x)$	$-$	∞	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\overset{c}{\text{PRmin}}$	$\nearrow$

$f'(x)$	$+$	∞	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\overset{c}{\text{PRmax}}$	$\searrow$

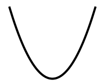




Dérivée seconde et concavité

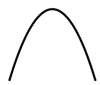
Si $f''(a) > 0$ sur $[a,b]$, alors $f(x)$ convexe sur $[a,b]$.

$f''(x)$	$+$
$f(x)$	$\smile$



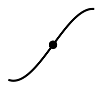
Si $f''(a) < 0$ sur $[a,b]$, alors $f(x)$ concave sur $[a,b]$.

$f''(x)$	$-$
$f(x)$	$\frown$

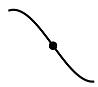


Si $f(x)$ a un point d'inflexion en $x = a$, alors $f''(x) = 0$ ou $f''(x)\nexists$

$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\smile$	PI	$\frown$

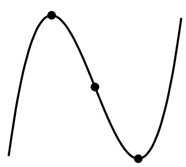


$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	PI	$\smile$



Les quatre combinaisons possibles de croissance et de convexité

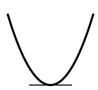
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$



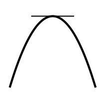
Test de la dérivée seconde

Permet de déterminer si une fonction a un max ou un min quand $f'(a) = 0$

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f a un min en $x = a$.



Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f a un max en $x = a$.



Détermination de signes pour l'analyse de fonctions

Une fonction algébrique $g(x)$ ne change de signe qu'en passant par zéro ou quand il y a une division par zéro. Ils faut donc trouver quand $g(x) = 0$ et quand il y a une division par zéro et déterminer les les signes sur les intervalles.

Truc 1 : factoriser Si on connait le signe de chacun des facteurs, on trouve le signe global à l'aide de la loi des signes pour les produits et divisions.

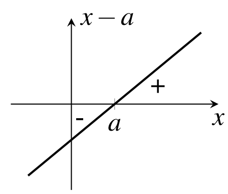
Par exemple, on trouve le signe de $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}$ en déterminant le signe de $(x-1)$, $(x-2)$ et $(x-3)$ séparément et en utilisant la loi des signes :

x		1		2		3	
$(x-1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\overset{\div 0}{\nexists}$	$+$

Truc 2 : inégalités utiles

- Signe des expressions de la forme $(x-a)$:

$$(x-a) > 0 \text{ si } x > a \qquad (x-a) < 0 \text{ si } x < a$$



x		a	
$(x-a)$	$-$	0	$+$

- Les puissances paires sont toujours positives :

$$A^n \geq 0 \text{ si } n \text{ pair :}$$

$$(x-6)^2 \geq 0 \quad (3x-2)^4 \geq 0$$

- Les racines paires sont toujours positives quand elles sont définies :

$$\sqrt[n]{A} \geq 0 \text{ si } n \text{ pair et } \sqrt[n]{A} \text{ défini}$$

- Les puissances et racines impaires de A ont le même signe que A :

$$A^n \text{ et } \sqrt[n]{A} \text{ ont le même signe que } A \text{ si } n \text{ impair :}$$

$$(x-3)^3 \geq 0 \iff (x-3) \geq 0 \iff x \geq 3$$

$$\sqrt[3]{(x-3)} \geq 0 \iff (x-3) \geq 0 \iff x \geq 3$$