Calcul différentiel — Notions préliminaires — Algèbre

1 Algèbre

L'objectif principal de l'algèbre élémentaire est de déterminer une valeur inconnue dans une relation numérique. On peut poser ce genre de questions sous forme « écrite », par exemple

> (Problème vieux de quelques millénaires figurant sur la tablette cunéiforme AO 8862)
>
> J'ai multiplié longueur et largeur pour obtenir l'aire. J'ai additionné ce par quoi la longueur dépasse la largeur à l'aire et j'ai obtenu 183. La somme de la longueur et de la largeur est 27. Quelles sont la longueur, la largeur et l'aire ?

Il est normal l'énoncé de cet ancien problème vous semble étrange. À l'époque où il a été écrit, on utilisée aucune des idées et notations modernes comme les variables, la substitution, isoler, les polynômes, la formule quadratique, etc.

Les géomètres et mathématiciens ont développé au fil du temps différentes manière de représenter ce genre de problème afin de les résoudre plus facilement. La notation moderne, malgré le fait qu'elle exige plusieurs années d'entrainement, est de loin la plus efficace. Si x est la longueur et y la largeur, le problème se traduit en notation moderne comme

$$\begin{aligned} x - y + xy &= 183 \\ x + y &= 27 \end{aligned}$$

L'algébriste moderne applique ensuite quelques principes simples de manière astucieuse pour déterminer les valeurs inconnues. On peut même décrire la méthode de solution avec ces techniques : (1) exprimer y en fonction de x dans la seconde équation : $y = 27 - x$ (2) substituer la valeur trouvée dans la première équation $x - (27 - x) + x(27 - x) = 183$ (3) résoudre l'équation obtenue en regroupant : $-x^2 + 29x - 210 = 0$. On trouve deux solutions : $x = 14$ et $x = 15$, et donc les valeurs de y correspondantes : $y = 13$ et $y = 12$. L'aire correspondante est respectivement 182 et 180.

1.1 Concepts algébrique de base

Définition. Une **expression algébrique** est une combinaison de nombres, d'opérations sur les nombres et de variables respectant les règles d'application des opérations utilisées si on considère les variables comme des nombres.

Exemple 1. Les expressions suivantes sont des expressions algébriques :

$$2AB \qquad 4x^2 + 3x + 1 \qquad 42 \qquad \frac{x+2}{y-\pi} \qquad \sqrt[3]{ax+y} \qquad MC^2.$$

Les expressions suivantes ne sont pas des expressions algébriques car les règles d'application des opérations ne sont pas respectées :

$$2x+ \qquad 4^+ \qquad 2+-+3x$$

Définition. Une **équation algébrique** est une égalité entre deux expressions algébriques.

Exemple 2.

$$x^2 - 4 = 0 \qquad x^3 + 3x^2 + x + 1 = \frac{x+2}{\sqrt{x}+1} \qquad \sqrt{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$$

Définition. Une **identité** est une équation algébrique qui est toujours vraie, peut importe les valeurs substituées aux variables utilisées.

Exemple 3. Les équations algébriques suivantes sont des identités :

$$x+3 = 3+x \qquad \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y} \qquad (x+1)^2 = x^2+2x+1$$

Les équations algébriques suivantes ne sont pas des identités car elles ne sont pas vraies quand on substitue les valeurs données au variables.

$x = 2$	Faux pour $x = 1$
$(x+2)^2 = x^2+4$	Faux pour $x = 3$
$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x}+\frac{1}{2}$	Faux pour $x = 1$

1.2 Principes algébriques généraux

Voici les principes les plus utilisés dans les raisonnements algébriques :

(Propriétés des variables) Une variable représentant un nombre inconnu d'un certain type (entier, rationnel, nombre réel) a les mêmes propriétés que les nombres du même type. On peut y appliquer les mêmes opérations.
(Transitivité de l'égalité) Si $A = B$ et $B = C$, alors $A = C$.
(Application d'une opération) Si $f(x)$ est une opération (fonction), on a que

$$A = B \implies f(A) = f(B).$$

Si f est une opération inversible, alors $A = B \iff f(A) = f(B)$.
Si $f^{-1}(x)$ est l'opération inverse de $f(x)$, alors

$$f(A) = B \iff A = f^{-1}(B).$$

(Substitution) Si $A(x) = B(x)$ alors $A(C) = B(C)$, où C est une expression algébrique quelconque substituée à la place de la variable x.

Voyons maintenant des exemples où ces principes sont utilisés.

1.2.1 Transitivité

La transitivité de l'égalité est très souvent utilisé sans que l'on s'en rende compte ou sans que l'on mentionne explicitement son utilisation.

Exemple 4. Par exemple, si on écrit

$$(x+2)^2 = (x+2)(x+2) = x(x+2)+2(x+2) = x^2+2x+2x+4 = x^2+4x+4.$$

On utilise (plusieurs fois) la *transitivité de l'égalité* pour conclure que

$$(x+2)^2 = x^2+4x+4.$$

Note : on écrit souvent verticalement une telle suite d'égalité quand elle est trop longue :

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= (x+2)(x+2)\\ &= x(x+2)+2(x+2)\\ &= x^2+2x+2x+4\\ &= x^2+4x+4.\end{aligned}$$

1.2.2 Substitution

On utilise le principe de *substitution* quand on prend une identité algébrique simple pour en trouver une plus complexe.

Exemple 5. Voici l'identité générale pour les différences de carré

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y),$$

Cette identité est vraie peu importe les valeurs de x et y. On peut déduite une nouvelle identité en *substituant* (par exemple) x^2 à x et $2x$ à y :

$$(x^2)^2 - (2x)^2 = \Big(\big(x^2\big) - (2x)\Big)\Big(\big(x^2\big) + (2x)\Big),$$

Cette dernière égalité est donc déduite de la première à l'aide du principe de substitution.

En simplifiant l'identité obtenue, on obtient que

$$x^4 - 4x^2 = \left(x^2 - 2x\right)\left(x^2 + 2x\right).$$

1.2.3 Application d'une même opération

L'application d'une même opération sur chaque membre d'une égalité est probablement le premier principe algébrique appris dans les cours d'algèbre élémentaire et est une généralisation du principe ayant donné son nom à l'algèbre.

Exemple 6. Si on a que $2x = 5$, on obtient que

$$\frac{2x}{2} = \frac{5}{2}$$

en appliquant l'opération « diviser par deux » sur chaque membre de l'égalité initiale.

Comme « diviser par deux » est une opération inversible (dont l'inverse est « multiplier par deux », on peut écrire

$$2x = 5 \iff \frac{2x}{2} = \frac{5}{2}.$$

L'opération « mettre au carré » n'est pas inversible. Par exemple, si on met -2 au carré, on obtient 4. L'opération inverse est ambigüe : on pourra obtenir un carré de 4 à partir de 2 ou de -2.

Si on applique une opération non inversible, comme mettre au carré, on ne peut pas obtenir une équivalence entre les identités. Par exemple, l'implication

$$2x = 5 \implies 4x^2 = 25$$

est vraie, mais l'équivalence

$$2x = 5 \iff 4x^2 = 25$$

est fausse !

Résumé

1.3 Propriétés algébriques utiles

Les identités algébriques suivantes sont très souvent utilisées. On les suppose connues ou que vous pouvez les vérifier. Elles peuvent être démontrées par des preuve directes à l'aide de manipulation algébriques simples.

$AB + AC = A(B + C)$ (mise en évidence simple)
$AC + AD + BC + BD = (A + B)(C + D)$ (mise en évidence double)
$\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$ (rationalisation)
$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ (différence de carrés)
$\left(\sqrt{A} \pm \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}\right) = A - B$ (conjugué)
$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ (différence de cubes)
$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (binôme carré parfait)
$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ (développement du binôme degré 3)
$(A + B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$ (développement du binôme degré 4)

1.3.1 Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal est un truc permettant de déterminer rapidement les coefficients du développement d'un binôme de degré quelconque : si on développe une expression de la forme $(A + B)^n$, les coefficients du développement sont donnés par la n-ième ligne du triangle de Pascal.

Ce truc sera utile plus loin pour obtenir une formule importante de dérivation et nous y reviendrons à ce moment.

Triangle de Pascal

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
(A+B)^0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
(A+B)^1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
(A+B)^2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
(A+B)^3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
(A+B)^4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
(A+B)^5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
(A+B)^6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\vdots & & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Exemple 7. Le développement de $(x+2)^5$ a la forme suivante :

$$C_0x^5 + C_1x^42^1 + C_2x^32^2 + C_3x^22^3 + C_4x^12^4 + C_52^5$$

Les coefficients $C_0, C_1, \ldots, C_5$ sont donnés par la ligne correspondant à $(A + B)^5$ du triangle de Pascal, soit

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1.$$

On a donc que

$$(x+2)^5 = x^5 + 5x^42 + 10x^32^2 + 10x^22^3 + 5x2^4 + 2^5$$

Exemple 8. Déterminons le développement de $(x^2 - 2)^3$.

L'expression donnée est de la forme $(A + B)^3$ avec $A = x^2$ et $B = -2$.

Les coefficients du développement sont donnés par la ligne correspondant à $(A + B)^3$ du triangle de Pascal, soit

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1.$$

Le développement de $(x^2 - 2)^3$ a la forme suivante :

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

On a donc que

$$\left(x^2 - 2\right)^3 = x^6 + 3x^4(-2) + 3x^2(-2)^2 + (-2)^3.$$

En simplifiant, on trouve enfin que

$$\left(x^2-2\right)^3 = x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8.$$

Note. La preuve que les coefficients données par le triangle de Pascal sont bien ceux des développement du binôme fût le premier exemple d'une preuve utilisant explicitement le principe d'induction sur les nombres naturels.

Résumé

1.4 Propriétés fréquemment utilisées pour résoudre des équations

Les deux propositions suivantes sont souvent utilisées pour résoudre des équations.

Proposition 1.

(EQ1) Si un produit de facteurs est nul, un des facteurs doit être nul.

$$AB = 0 \implies A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

$$ABC = 0 \implies A = 0 \text{ ou } B = 0 \text{ ou } C = 0.$$

$$ABCD = 0 \implies A = 0 \text{ ou } B = 0 \text{ ou } C = 0 \text{ ou } D = 0.$$

$$\vdots$$

(EQ2) Si un rapport est nul, le numérateur doit être nul (et le dénominateur ne peut pas être nul).

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC \text{ et } B, D \neq 0.$$

La proposition (EQ1) permet de résoudre des équations sous forme factorisée.

Exemple 9. Si on a l'équation

$$(x-2)(x+1) = 0$$

On a une expression de la forme $AB = 0$. Il faut donc que $A = 0$ ou que $B = 0$. Dans ce cas particulier, il faut donc que

$$x - 2 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0.$$

Cela implique que $x = 2$ ou $x = -1$.

Exemple 10. Si on a l'équation

$$(x-2)^3 = 0$$

Comme $(x-2)^3 = (x-2)(x-2)(x-2)$, on a une expression de la forme $ABC = 0$. Il faut donc avoir $A = 0$ ou $B = 0$ ou $C = 0$. Dans ce cas particulier, il faut donc que

$$x-2 = 0 \text{ ou } x-2 = 0 \text{ ou } x-2 = 0,$$

ce qui revient à dire que

$$x-2 = 0$$

et donc que

$$x = 2$$

Ce principe s'applique à un produit d'un nombre de facteurs aussi grand que l'on veut : si un produit de facteurs est nul, un des facteurs doit être nul. Ainsi, les zéros de

$$(x-3)\left(x+\sqrt{33}\right)(x-\log_2(3)) = 0$$

sont $x = 3$, $x = -\sqrt{33}$ et $x = \log_2(3)$.

La simplicité de la solution d'une équation factorisée est évidente si on la compare avec même équation non-factorisée :

$$x^3 - x^2\log_2(3) + \sqrt{33}x^2 - \sqrt{33}x\log_2(3) - 3x^2 + 3x\log_2(3) - 3\sqrt{33}x + 3\sqrt{33}\log_2(3) = 0.$$

C'est une des raisons principales pour lesquelles les techniques de factorisations de polynômes sont importantes : elles permettent de prendre une équation polynômiale de degré élevé et de la transformer (en la factorisant et en utilisant EQ1) en plusieurs équations de degrés moins élevés (donc plus faciles à résoudre).

La proposition (EQ2) permet de résoudre facilement des équations comportant des expressions rationnelles factorisée comme l'équation suivante

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x-6} = 0.$$

Par (EQ2), cette équation est équivalente à

$$(x-3)(x+1) = 0(x-6) = 0.$$

On est donc ramené à une situation où le produit de facteurs est nul. L'équation a donc comme solution les zéros de $(x-3)(x+1)$, soit $x = 3$ et $x = -1$. Ainsi, seul le numérateur détermine les zéros d'une expression de la forme A/B. Cependant, le dénominateur ne peut pas s'annuler car il ne peut par y avoir de division par zéro. Ainsi, dans une équation comme

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x^2+2x+1} = 0$$

$x = 3$ et $x = -1$ sont les zéros du numérateur, mais $x = -1$ annule le dénominateur (ce qui cause une division par zéro !). La valeur $x = -1$ n'est donc par un zéro de l'équation.

1.4.1 Formule quadratique

On apprend à l'école secondaire qu'il y a une « formule » permettant de trouver directement les solution d'une équation quadratique de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Théorème (Formule quadratique)**.** Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont données par

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Démonstration. Si $ax^2+bx+c=0$, alors,

$$\begin{aligned}
a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)&=0 && \text{mise en évidence de } a\\
a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)&=0 && \text{complétion du carré } x^2+\frac{b}{a}x\\
a\left(\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)&=0 && \text{associativité}\\
a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)&=0 && \text{trinôme carré parfait}\\
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c&=0 && \text{distribution de } a\\
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2}{4a}-c && \text{application d'une même opération}\\
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2-4ac}{4a} && \text{dénominateur commun}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2-4ac}{4a^2} && \text{application d'une même opération } (\div a)\\
x+\frac{b}{2a}&=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} && \text{substitution dans solution de } A^2=B\\
x+\frac{b}{2a}&=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}} && \text{propriétés des exposants}\\
x+\frac{b}{2a}&=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && \text{propriétés des exposants}\\
x&=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && \text{application d'une même opération}\\
x&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && \text{propriétés des fractions}
\end{aligned}$$

□

Exemple 11. En utilisant la formule quadratique, on a que $-x^2+2x+4=0$ si

$$\begin{aligned}
x&=\frac{-(2)\pm\sqrt{(2)^2-4(-1)(4)}}{2(-1)}\\
&=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{-2}\\
&=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{-2}\\
&=\frac{-2\pm\sqrt{4(5)}}{-2}\\
&=\frac{-2\pm 2\sqrt{5}}{-2}\\
&=\frac{-2\left(1\pm\sqrt{5}\right)}{-2}\\
&=1+\sqrt{5} \text{ ou } 1-\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Exemple 12. On résout l'équation $3x^2+4x+5=0$ à l'aide de la formule quadratique :

$$3x^2+4x+5=0 \iff x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(3)(5)}}{2(3)}=\frac{-4\pm\sqrt{16-60}}{6}$$

Comme $\sqrt{16-60}$ n'est pas défini, l'équation donnée n'a pas de solutions.

Définition. Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le **discriminant** de l'équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$.

Proposition 2. Le discriminant détermine le nombre de zéros de l'équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$:

Si $\Delta > 0$ alors l'équation à 2 solutions distinctes.
Si $\Delta = 0$ alors l'équation à 1 seule solution.
Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solutions.

Démonstration. Il suffit d'utiliser la formule quadratique donnant les solutions de quadratique $ax^2 + bx + c = 0$. En effet, comme $\Delta = b^2 - 4ac$, la formule quadratique peut s'écrire

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

La racine carrée de la formule quadratique doit être définie pour obtenir des solutions. C'est le cas uniquement si $\Delta \geq 0$. Dans le cas où $\Delta = 0$, la formule quadratique donne une seule solution :

$$\frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

Si $\Delta > 0$, les deux nombres $\pm\sqrt{\Delta}$ sont distincts et on trouve deux solutions

Enfin, si $\Delta < 0$, $\sqrt{\Delta}$ n'est pas défini et il n'y a pas de solutions. □

Résumé

1.5 Opérations inverses usuelles

En algèbre, on utilise souvent le « principe de la balance » : on peut faire la même opération de « chaque côté » d'une égalité. Les opérations inverses les plus souvent utilisée sont indiquées dans la liste suivante, avec les restrictions faisant en sorte que les opérations soient inversibles.

$A+C=B \iff A=B-C$

$CA=B \iff A=\frac{1}{C}B$ si $C\neq 0$.

$A^n=B \implies A=\pm\sqrt[n]{B}$ si n pair.

$A^n=B \iff A=\sqrt[n]{B}$ si n impair.

> **Remarque.** Il faut faire la différence entre résoudre une équation comportant un carré et appliquer l'opération racine carrée. Si on résout une équation de la forme
>
> $$x^2=a,$$
>
> qui a comme solutions $x=\pm\sqrt{a}$ si $a\geq 0$, donc deux solutions. Si on applique la fonction racine carrée sur a, il y a une seule valeur, le résultat de l'opération $\sqrt{a}$, qui est toujours positif.
>
> Par exemple :
>
> $$x^2=2 \implies x=\pm\sqrt{2} \text{ (deux solutions)}$$
>
> La racine carrée de 2 est $\sqrt{2}$ (une seule valeur)

Note. Nous verrons en étudiant les fonctions transcendantes que pour résoudre des équations comportant des fonctions exponentielles et trigonométriques il est nécessaire d'utiliser des les opérations inverses de ces fonction, soit respectivement les logarithmes et les fonctions trigonométriques inverses.

1.6 Factorisation

1.6.1 Factorisation de polynômes de degré 2

Comme la factorisation joue un rôle important pour trouver les zéros d'un polynôme et que plusieurs problèmes se traduisent en équation polynômiale du deuxième degré, les techniques de factorisations des polynômes de degré 2 sont utiles pour résoudre de tels problèmes. Rappelons qu'un polynôme de degré 2 est de forme générale

$$ax^2+bx+c.$$

La technique la plus souvent utilisée est souvent appelée « produit-somme ».

Produit-somme avec a=1 Si on fait le produit des deux facteurs $(x+u)$ et $(x+v)$, on obtient un polynôme de degrée 2 avec a=1 :

$$(x+u)(x+v)=x^2+(u+v)x+(uv).$$

Dans ce polynôme, on a que $b=u+v$ est la somme de u et de v, et que $c=uv$ est le produit de u et v. On peut ainsi factoriser x^2+bx+c en trouvant deux nombres u et v tels que $u+v=b$ et $uv=c$.

Exemple 13. Pour factoriser le polynôme

$$x^2+x-6,$$

on cherche deux nombres u et v tels que leur produit $uv=-6$ et leur somme $u+v=1$. On peut chercher ces nombres en trouvant toutes les manière de multiplier deux entiers pour obtenir -6. On trouve ensuite la somme de ces deux facteurs dans chaque cas : la bonne combinaison est celle où la somme est $b=1$.

u	v	$u+v$
1	-6	-5
-1	6	5
-2	3	1
3	-3	-1

On trouve donc que $u = -2$ et $v = 3$, ce qui nous donne la factorisation :

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3).$$

Avec assez de pratique, ont peut trouver mentalement les deux nombres u et v de cette factorisation.

Produit somme avec $a \neq 1$ Dans ce cas, on veut factoriser un polynôme de forme générale

$$ax^2 + bx + c.$$

Pour trouver la factorisation de manière générale, on commence avec deux facteurs quelconques de degré 1 : $(px+q)$ et $(sx+t)$. Si on les multiplie, on obtient :

$$\begin{aligned}(px+q)(sx+t) &= (px+q)sx + (px+q)t \\ &= psx^2 + qsx + ptx + qt \\ &= psx^2 + (qs+pt)x + qt\end{aligned}$$

Si on fait correspondre le développement de ce produit avec la forme générale du polynôme de degrée 2 que l'on veut factoriser, on trouve

$$ax^2 + bx + c = psx^2 + (qs+pt)x + qt$$

Ainsi, pour factoriser $ax^2 + bx + c$, on veut deux nombres $u = qs$ et $v = pt$ tels que

$$uv = ax \text{ et } u + v = b.$$

Exemple 14.

$$2x^2 - 3x - 2$$

Produit $uv = 2(-2) = -4$ et somme $u + v = -3$

u	v	$u+v$
1	−4	−3
−1	4	3
2	−2	0
−2	2	0

On a donc $u = 1$ et $v = -4$. On factorise pas double mise en évidence en écrivant $-3x$ comme $x - 4x$:

$$\begin{aligned}2x^2 - 3x - 2 &= 2x^2 + x - 4x - 2 \\ &= x(2x+1) - 2(2x+1) \\ &= (x-2)(2x+1).\end{aligned}$$

1.6.2 Lien entre facteurs et zéros

Comme nous l'avons dit précédemment, la factorisation est une stratégie importante pour simplifier une équation afin de la résoudre.

Exemple 15. Considérons l'équation

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

En factorisant le membre de gauche, on obtient

$$(x+1)(x-5) = 0.$$

Comme un produit de facteur est nul si un de ses facteur est nul, soit $(x+1) = 0$, soit $(x-5) = 0$. Les solutions sont donc $x = -1$ ou $x = 5$.

On voit dans cet exemple que chaque facteur de degré un, donc de la forme $x - a$, correspond à une solution de l'équation originale. Il y a en fait une correspondance entre les facteurs de degré 1 et les zéro : si $x = a$ est un zéro d'une équation polynômiale $P(x) = 0$, alors $(x - a)$ est un facteur de $P(x)$.

Le résultat suivant dit que chaque zéro d'un polynôme est lié à un « facteur coupable » lui correspondant et réciproquement.

Proposition 3 (Factorisation)**.** Si $P(x)$ est un polynôme quelconque, alors a est un zéro de $P(x)$ si et seulement si $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$:

$$P(a) = 0 \iff P(x) = (x-a)Q(x).$$

On peut résumer ce lien entre facteurs de degré 1 d'un polynôme et zéro du polynôme sous forme d'un « slogan » plus facile à mémoriser :

« zéro si et seulement si facteur (de degré 1). »

Exemple 16. Si $P(x) = x^2 - x - 2$, on a que

$$P(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0.$$

La valeur $a = 2$ est donc un zéro de $P(x)$. Le théorème de factorisation dit que $P(x)$ doit avoir $(x-2)$ (c'est à dire le facteur (x-le zéro)) comme facteur. Si on divise $P(x) = x^2 - x - 2$ par $(x-2)$, on trouve que

$$P(x) = (x-2)(x+1),$$

ce qui est est bien de la forme donnée par le théorème :

$$P(x) = (x-a)Q(x).$$

Exemple 17. La valeur $x = 1$ est un zéro de $x^3 - 1$. On sait donc par le théorème de factorisation que $x^3 - 1 = (x-1)Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme à déterminer. On peut toujours déterminer $Q(x)$ en divisant :

$$Q(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$

En divisant, trouve que $Q(x) = x^2 + x + 1$, et donc

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

On peut conclure de ce lien entre zéros et facteurs que pour un polynôme $P(x)$,

$$P(a) \neq 0 \iff P(x) \text{ n'a pas de facteur de la forme } (x-a).$$

Cela permet de vérifier qu'un polynôme n'a pas de facteur de la forme $x - a$ sans chercher montrer directement que la factorisation est impossible. Il suffit plutôt d'évaluer $P(a)$.

Exemple 18. Est-ce que $P(x) = x^3 - 2x + 1$ est divisible par $x - 3$?

Par la proposition 3, si c'était le cas, on devrait avoir $P(3) = 0$. En substituant et simplifiant, on trouve

$$P(3) = 3^3 - 2(3) + 1 = 22.$$

Comme $P(3) \neq 0$, $x^3 - 2x + 1$ n'est pas divisible par $x - 3$.

1.6.3 Preuve du lien entre zéros et facteurs

Si $P(x)$ est un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 et $a \in \mathbb{R}$ un nombre quelconque, il est toujours possible de diviser $P(x)$ par $x - a$. Comme $x - 1$ est de degré 1, on obtient nécessairement un reste de degré 0, c'est à dire une constante R. On peut donc écrire :

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R.$$

Lemme. Si $P(x)$ est un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 et $a \in \mathbb{R}$ et que

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R,$$

alors

$$P(a) = R$$

Preuve du lemme. Comme $P(x) = (x-a)Q(x)+R$, en évaluant on a que

$$P(a) = (a-a)Q(x)+R = R.$$

□

Preuve de la proposition 3. Soit $P(x)$ un polynôme et $a \in \mathbb{R}$ un nombre quelconque. En divisant $P(x)$ par $x-a$, on peut écrire

$$P(x) = (x-a)Q(x)+R,$$

où $Q(x)$ est le polynôme quotient et R le reste de la division.

Comme le résultat à démontrer est de la forme « $A \iff B$ », on fait les démonstration de chacune des deux implications $A \implies B$ et $A \impliedby B$.

Par le lemme , $R = P(a)$ et donc

$$P(x) = (x-a)Q(x)+P(a).$$

Ainsi, $x-a$ est un facteur de $P(x) = (x-a)Q(x)$ si et seulement si le reste $P(a) = 0$. □

1.6.4 Polynômes premiers

La proposition 3 établit une correspondance entre les facteurs de degré 1 (donc de la forme $ax+b$) et les zéros d'un polynôme. On peut utiliser cette proposition de manière répétée pour factoriser un polynôme comme un produit de facteurs de degré 1.

Exemple 19. Factorisons $P(x) = x^3-2x^2-x+2$ le plus possible.

On peut vérifier que $P(1) = (1)^3-2(1)^2-(1)+2 = 0$ (on « devine » par essai et erreur que 1 est un zéro du polynôme $P(x)$). Par la proposition 3, on sait que $x-1$ est le « facteur coupable » et que l'on peut factoriser $P(x)$ de la manière suivante :

$$P(x) = (x-1)Q(x),$$

c'est-à-dire

$$x^3-2x^2-x+2 = (x-1)Q_1(x).$$

On trouve $Q(x)$ en divisant $P(x)$ par $x-1$. On trouve que

$$x^3-2x^2-x+2 = (x-1)(x^2-x-2).$$

On peut factoriser davantage car $Q_1(2) = (2)^2-(2)-2 = 0$. Comme 2 est un zéro de $Q_1(x)$, on a que $Q_1(x)$ peut se factoriser comme

$$x^2-x-2 = (x-2)Q_2(x).$$

Comme il s'agit de factoriser un polynône de degré 2, on peut utilise la technique « produit-somme » au lieu de diviser (mais les deux techniques donnent le même résultat !). On trouve que

$$x^2-x-2 = (x-2)(x+1).$$

On a donc une factorisation complète :

$$\begin{aligned} x^3-2x^2-x+2 &= (x-1)(x^2-x-2) \\ &= (x-1)(x+1)(x-2). \end{aligned}$$

On sait que la factorisation donnée la le dernier exemple est complète car un facteur de degré 1 ne peut pas être factorisé davantage.

Proposition 4. Un polynôme de degré 1 ne peut pas être factorisé on un produit de deux polynômes non constants.

Démonstration. Un polynôme de degré 1 est de la forme

$$ax + b.$$

Si on pouvait l'écrire comme un produire de deux autre polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ non constants (de degré plus grand ou égal à 0), on devrait pouvoir écrire

$$ax + b = P(x)Q(x).$$

Or si on multiplie deux polynômes de degré n et m, le produit est de degré $n+m$. Dans ce car, il faudrait que

$$\deg(ax + b) = \deg(P(x)) + \deg(Q(x)) \geq 2,$$

ce qui est impossible car $ax + b$ est de degré 1. □

On sait que certains polynômes ne se factorisent pas. L'exemple le plus connu est souvent vu au secondaire : $x^2 + 1$ ne se factorise pas. Ainsi, il n'est pas toujours possible de factoriser un polynôme comme un produit de polynômes de degré 1.

Exemple 20. Nous avons factorisé précédemment le polynôme $x^3 - 1$ à l'aide de la proposition 3 :

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Est-ce que cette factorisation est complète ? Cela revient à se demander si

$$x^2 + x + 1$$

peut être factorisé. Cela n'est pas possible. En effet, le discriminant de $x^2 + x + 1$ est $\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$. Par la proposition 2, le polynôme $x^2 + x + 1$ n'a pas de zéros.

Si on pouvait écrire ce polynôme de degré 2 comme le produit de deux facteurs, ces facteurs devraient être des facteurs de degré 1. Supposons que ces facteurs sont $ax + b$ et $cx + d$. La factorisation, si elle était possible, serait de la forme

$$x^2 + x + 1 = (ax + b)(cx + d).$$

Dans ce cas, $x^2 + x + 1$ aurait deux zéros, car si on substitue $\frac{b}{a}$ dans $ax + b$, le premier facteur s'annule, et si on substitue $\frac{d}{c}$ dans $cx + d$, le deuxième facteur s'annule. Comme le polynôme $x^2 + x + 1$ n'a pas de zéro, cela est impossible.

On peut généraliser cet exemple pour démontrer un critère général.

Proposition 5. Un polynôme de degré 2 $ax^2 + bx + c$ ne peut pas être factorisé si et seulement si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Définition. Un polynôme $P(x)$ de degré ≥ 1 est **premier** s'il ne peut pas être factorisé comme un produit de deux autres polynômes de degré ≥ 1.

Est-ce tous les polynômes de degré 3 et plus peuvent être factorisés ou existe-t-il des polynômes premiers de degré supérieur à 3 ? Un théorème d'algèbre pouvant être démontré à l'aide des nombres complexes que nous n'étudions pas dans ce cours dit que les polynômes premiers de degré 1 et de degré 2 sont les seuls polynômes ne pouvant pas être factorisés ; autrement dit, tous les autres polynômes peuvent être factorisés !

Proposition 6. Les polynômes réels premiers sont de l'une des deux formes suivantes :

- degré 1 de la forme $c(x-a)$ (a est nécessairement un zéro)
- degré 2 de la forme ax^2+bx+c, où $\Delta = b^2-4ac < 0$. (polynôme de degré deux sans zéros).

Le résultat mathématique le plus important concernant la factorisation de polynômes est le *théorème fondamental de l'algèbre*. Il est similaire au *théorème fondamental de l'arithmétique* : les deux résultats disent qu'il y a une unique manière de factoriser complètement en facteur premier, que ce soit des nombres (arithmétique) ou des polynômes (algèbre).

Théorème (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** Tout polynôme réel peut s'écrire comme un produit d'une constante réelle et de polynômes premiers, produit unique à l'ordre des facteurs près.

La preuve du théorème fondamental de l'algèbre repose sur plusieurs propriétés des nombres complexes est ne peut pas être donnée sans étudier ceux-ci. On demande cependant dans ce cours d'être capable de factoriser complètement des polynômes à l'aide des techniques vue au secondaire pour les polynômes du second degré et du lien entre les zéros et les facteurs d'un polynôme.

Enfin, comme chaque solution d'une équation polynômiale de la forme $P(x)=0$ correspond à un facteur de degré 1 de $P(x)$, on déduit du théorème fondamental de l'algèbre le corolaire suivant.

Corollaire. Une équation polynômiale de degré n de la forme

$$P(x)=0$$

a au plus n solutions.

Résumé

1.7 Fractions algébriques

Définition. Une **fraction algébrique** est une expression de la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes. Autrement dit, c'est un quotient de la forme

$$\frac{\text{polynôme}}{\text{polynôme}}.$$

Comme on peut factoriser des polynômes (à cause du théorème fondamental de l'algèbre), certaines opérations que l'on peut faire avec des fractions peuvent aussi être effectuées avec des polynômes : simplification de fractions, plus grand commun dénominateur, plus petit commun multiples, etc.

Exemple 21. Simplifions la fraction algébrique

$$\frac{x^2+x-2}{x^3-1}.$$

Pour simplifier la fraction algébrique, on cherche des facteurs communs au numérateur et au dénominateur. Il faut donc factoriser ces deux polynômes.

$$\frac{x^2+x-2}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

(On utilise la technique « produit-somme » pour le numérateur et le théorème de factorisation pour le dénominateur, sachant que 1 est un zéro de x^3-1.)

On peut maintenant simplifier le facteur commun $(x-1)$.

$$\frac{x^2+x-2}{x^3-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)} = \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

On ne peut simplifier davantage car le numérateur et le dénominateur ne peuvent plus être factorisés (x^2+x+1 est un polynôme premier car $\Delta = 1^1-4(1)(1) < 0$).

Exemple 22. On peut simplifier

$$\frac{(2x+1)^3(x-2)^2+(2x+1)^2(x-2)^3}{(2x+1)(x-2)}$$

en mettant en évidence les plus grandes puissances possibles de $2x+1$ et de $x-2$ et en simplifiant ensuite :

$$\begin{aligned}\frac{(2x+1)^3(x-2)^2+(2x+1)^2(x-2)^3}{(2x+1)(x-2)} &= \frac{(2x+1)^2(x-2)^2\big((2x+1)+(x-2)\big)}{(2x+1)} \\ &= \frac{(2x+1)(x-2)^2\big((2x+1)+(x-2)\big)}{x-2} \\ &= \frac{(2x+1)(x-2)^2(3x-1)}{x-2}\end{aligned}$$