Calcul différentiel — Notions préliminaires — Fonctions

1 Fonctions, graphes et domaines

1.1 Fonctions et relations

En mathématiques on étudie les quantités et figures géométriques, mais aussi comment les objets mathématiques sont mis en relations les uns avec les autres. On étudie particulièrement les *fonctions*, qui sont un type de relation où un objet mathématique (un nombre, un vecteur, etc) peut être déterminé à partir d'un autre objet donné. On peut penser à la hauteur d'un triangle en fonction de son aire, à l'aire d'un carré en fonction de la longueur de son côté, au rayon du cercle en fonction de sa circonférence, à une règle de calcul disant qu'un nombre est le carré de l'autre, etc. Dans chaque cas, une quantité est déterminée en fonction d'une autre. Une *relation* est plus générale car elle établi un lien entre objets mathématique sans nécessairement qu'un soit déterminé uniquement en fonction des autres. On peut penser à la loi des gaz parfaits

$$PV = nRT.$$

Cette égalité établie une relation entre les quantités P, V et T, sans préciser si une est déterminée en fonction des autres. La loi des gaz parfaits est une relation et non une fonction.

> **Définition.** Une **fonction** $f : A \to B$ allant d'un ensemble A à un autre ensemble B est une règle quelconque associant à des éléments a de l'ensemble A un unique élément b de l'ensemble B.
>
> On dénote $f(a)$ l'élément de l'ensemble B associé à a.

Cette dernière définition est très générale et abstraite car elle appelle « fonction » une règle donnant des éléments d'un ensemble quelconque à partir des éléments d'un ensemble quelconque. Bien que les mathématiciennes et mathématiciens ont besoin d'une définition aussi générale pour pouvoir étudier la multitude d'objets mathématiques qui les intéressent, dans ce cours nous allons uniquement considérer des fonctions permettant de calculer des nombres réels.

> **Définition.** Une **fonction réelle** est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une règle quelconque associant à un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ au plus un unique nombre réel $y \in \mathbb{R}$.
>
> On dénote $f(x)$ le nombre réel associé à x.

1.2 Définir une fonction

On peut définir une fonction réel f de plusieurs manières.

On peut le faire en donnant explicitement une expression algébrique pour déterminer $f(x)$ à partir de la valeur de x, par exemple

$$f(x) = x^2.$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

On peut aussi définir une fonction *implicitement* à l'aide d'une égalité algébrique (un relation), par exemple une des égalités suivantes :

$$y = x^2$$

$$x^2 - y = 0$$

Dans ce cas, il faut spécifier quelle variable est déterminée en fonction de l'autre variable. La variable « entrée » est appelée **variable indépendante** et la « sortie » est appelé **variable dépendante** — elle dépend de la valeur de la variable indépendante.

> **Remarque.** La variable indépendante n'apparait pas nécessairement dans l'expression algébrique définissant une fonction. Par exemple,
>
> $$f(x) = 5$$
>
> Dans ce cas, peut importe la valeur de la variable indépendante x, la règle détermine que la variable dépendante vaut toujours 5. On appelle une telle fonction réelle donnant toujours la même valeur une **fonction constante**.

Une équation (donc une relation) ne définit pas toujours une fonction : il arrive qu'une valeur donnée de la variable indépendante corresponde à plusieurs valeurs de la variable dépendante. Par exemple

$$y^2 = x$$

ne définie par une fonction si on considère y comme variable dépendante. En effet, pour $x = 1$, les valeurs $y = 1$ et $y = -1$ satisfont toutes deux l'équation donnée. Il n'y a donc pas une valeur unique de y associée à la valeur $x = 1$. Cette relation ne défini donc pas une fonction si on considère y comme variable dépendante.

1.2.1 Fonctions définies par parties

La règle définissant une fonction peut être beaucoup plus complexe que celles pouvant être donnée par une équation ou une expression algébrique. On peut par exemple utiliser plusieurs expressions algébriques, variant selon la valeur de la variable indépendante. On appelle une telle fonction une **fonction définie par parties**, **par intervalle**. ou **par morceaux**.

Exemple 1.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ -x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Résumé

1.3 Évaluation d'une fonction

La valeur d'un fonction définie par une expression algébrique est déterminée par substitution. Par exemple, si $f(x) = x^2 + 1$, on détermine $f(2)$ en remplaçant x par 2 dans l'expression $x^2 + 1$ définissant la fonction :

$$f(2) = (2)^2 + 1.$$

On dit que $f(2)$ est la valeur de la fonction en $x = 2$.

En général, dans l'expression $f(x)$, on appelle 2 l'**argument** de la fonction.

On peut évaluer une fonction en y substituant une expression algébrique. Par exemple, si $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, on a que

$$f(x+1) = \frac{(x+1)}{(x+1)+2}.$$

On note que toutes les occurrences de x dans l'expression définissant f sont remplacées par l'expression argument de la fonction.

Exemple 2.
Si $f(x) = x^2 + 3$, alors $f(x+1) = (x+1)^2 + 3$.

Si $f(x) = x^2 - x$, alors $f(x+2) = (x+2)^2 - (x+2)$.

Si $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x+1}$, alors $f\left(x^2+x\right) = \dfrac{\left(x^2+x\right)^2 + \left(x^2+x\right)}{(x^2+x)+1}$.

> **Remarque.** Une erreur de compréhension peut donner beaucoup de difficulté à comprendre la notation utilisée pour les fonctions : la notation $f(x)$ ne désigne pas un produit ; $f(x)$ n'est pas le produit de f par x. En conséquence, la simplification suivante n'a pas de sens :
>
> $$\frac{\cancel{f}(x)}{\cancel{f}(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$
>
> car f n'est pas un nombre. On peut simplifier un facteur commun au numérateur et au dénominateur, mais un facteur est toujours un nombre ou une expression algébrique représentant un nombre.

1.3.1 Évaluation de fonctions définies par parties

Pour évaluer une fonction définie par partie, on doit utiliser l'expression algébrique déterminée par la condition qui est vraie pour la valeur de la variable indépendante donnée.

Exemple 3. Si f est la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ -x & \text{si } x \leq 1, \end{cases}$$

Évaluons $f(2)$. Comme $f(x) = x^2$ pour $x > 1$ et que $x = 2 > 1$, on a que $f(2) = (2)^2 = 4$.

Évaluons $f(1)$: comme $x = 1 \leq 1$, la deuxième condition est satisfaire et $f(1) = -(1) = -1$.
Si

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

évaluons $g(-1)$: comme $x = -1 < 0$, la deuxième condition est satisfaite, alors $g(x) = -x$ pour $x < 0$ et $g(-1) = -(-1) = 1$.

Si

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

évaluons $h(1)$. Comme $x = 1$, c'est la deuxième condition qui est satisfaite. On a donc que $h(1) = 3$.

Résumé

1.4 Composition de fonctions

Si on a deux fonctions $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$ on peut créer une nouvelle fonction en appliquant la règle de f et ensuite la règle de g. On appelle cette fonction la **composée** de f et g.

> **Définition.** Si $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$, alors la composition de f et g est définie par
>
> $$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$$
>
> La notation $g \circ f$ se lit « g rond f »

Exemple 4. Par exemple, si

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ et } g(x) = x + 1,$$

la composée de f et g est

$$g(f(x)) = g\left(x^2 + 1\right) = \left(x^2 + 1\right) + 1$$

On note cette nouvelle fonction $g \circ f$ (lire « g rond f »). Ainsi

$$g \circ f(x) = \left(x^2 + 1\right) + 1 = x^2 + 2.$$

La composée de g et f est

$$f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 + 1$$

Ainsi

$$f \circ g(x) = (x + 1)^2 + 1.$$

Dans ce dernier exemple, on voit qu'en général $f \circ g \neq g \circ f$.

1.4.1 Composition de fonctions définies algébriquement

La composition de fonction peut être déterminée même si on défini les fonctions sans utiliser la notation d'Euler « f(x). »

Par exemple, si on a les relations

$$z = y^2 \text{ et } y = (x+1),$$

on peut considérer que z est fonction de y et que y est fonction de x. Dans ce cas, si on fixe une valeur de x, on peut calculer une valeur de y et à partir de cette valeur intermédiaire, on peut déterminer la valeur de z. C'est exactement la composition des deux fonctions donnée. On trouve la relation directe en z et x en substituant l'expression déterminant y en fonction de x à la place de y dans l'expression déterminant z en fonction de y :

$$z = y^2 = (x+1)^2.$$

On a donc la fonction composée $z = (x+1)^2$, donnant la valeur de z directement en fonction de la valeur de x.

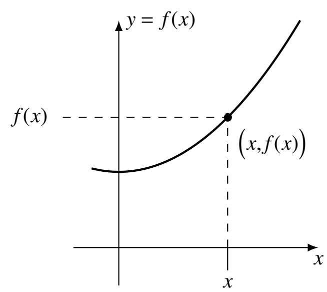
Résumé

1.5 Graphes

1.5.1 Graphe d'une fonction

Définition. Le *graphe* d'une fonction f est l'ensemble des points de la forme $(x, f(x))$.

Dans le cas des fonctions réelles, ces points peuvent être placés dans le plan cartésien pour obtenir une représentation graphique de f. Par exemple, si $f(x) = x^2 + 1$, on obtient



On peut déterminer les coordonnées exactes d'un point du graphe d'une fonction en évaluant la fonction. Par exemple, si $f(x) = x^2 + 1$, le point

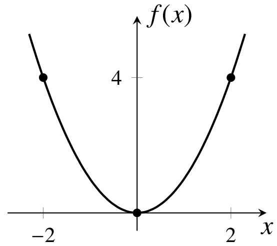
$$(1, f(1)) = (1, 2)$$

fait partie du graphe de la fonction.

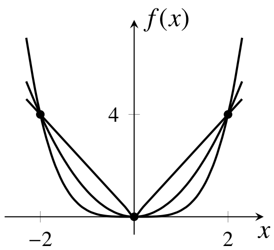
Remarque. On peut se faire une idée de l'allure du graphe d'une fonction en calculant les coordonnées de quelques points sur la fonction. Par exemple, si $f(x) = x^2$, on a que

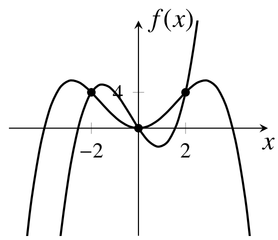
x	-2	0	2
$f(x)$	4	0	4

On peut placer ces points dans le plan cartésien ; si on sait à l'avance que le graphe doit être une parabole, on peut tracer la parabole qui passe par ces trois points :



Si on ne sait pas que le graphique doit être une parabole, on peut tenter de deviner l'allure du graphique à partir de ces quelques points. Cependant cela ne fonctionne pas, car plusieurs courbes « raisonnables » passent par ces points :





Ajouter des points ne permettrait pas de déterminer le graphique de manière unique. En effet, le nombre de points $(x, f(x))$ calculés peut être aussi grand que l'on veut, il y aura toujours plusieurs graphiques possibles.

Dans ce cours, même si vous devez comprendre que les points de la forme $(x,f(x))$ sont sur le graphe de f, vous ne pourrez pas calculer quelques points pour tracer le graphe d'une fonction, car cela n'est pas suffisant mathématiquement pour déterminer l'allure d'un graphique. Vous apprendrez plutôt à faire l'analyse de la fonction (à l'aide notamment des concepts du calcul différentiel) pour en faire une esquisse.

Les points de croisement avec les axes de coordonnées donnent souvent de l'information importante sur une fonction.

Définition. Les **zéros** d'une fonction sont les points de croisement de son graphe avec l'axe des abscisses (des x). On les trouve en résolvant l'équation

$$f(x) = 0$$

L'**ordonnée à l'origine** d'une fonction est le point de croisement de son graphe avec l'axe des ordonnées (des y). On la trouve en évaluant la fonction en 0 :

$$f(0).$$

Résumé

1.5.2 Graphe d'une relation

On peut aussi faire le graphe d'une relation qui n'est pas nécessairement une fonction.

> **Définition.** Le graphe d'une relation entre deux variables réelles est l'ensemble de tous les points (x,y) satisfaisant la relation donnée.

Exemple 5. Le graphe de la relation

$$x^2 + y^2 = 1$$

est constituée de tous les points satisfaisant l'équation $x^2 + y^2 = 1$.

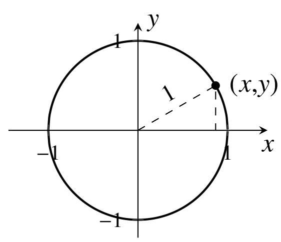
Par exemple, le point (1,0) est dans le graphe de cette relation car $x = 1$ et $y = 0$ satisfait l'équation :

$$1^1 + 0^1 = 0.$$

Au contraire, le point (1,1) n'est pas dans le graphe de cette relation, car $x = 1$ et $y = 1$ ne satisfait pas l'équation $x^2 + y^2 = 1$:

$$1^1 + 1^1 \neq 0.$$

Si on place les points du graphe de la relation $x^2 + y^2 = 1$ dans le plan Cartésien, ils forment le cercle unité (cercle de rayon 1 centrée à l'origine). En effet, par le théorème de Pythagore, chacun de ces points est à distance 1 de l'orgine.



On peut trouver un point sur le graphe d'une relation en donnant une valeur à une variable et en isolant pour trouver la valeur de l'autre variable.

Exemple 6. Trouvons un point sur le graphe de la relation

$$2x^2 + 3y^2 = 1.$$

Si on prend $x = 0$, on obtient

$$2(0)^2 + 3y^2 = 1.$$

En simplifiant

$$3y^2 = 1.$$

On isole y :

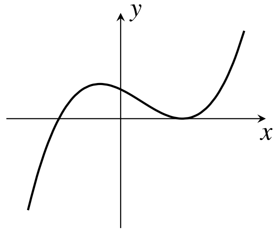
$$y^2 = \frac{1}{3}.$$

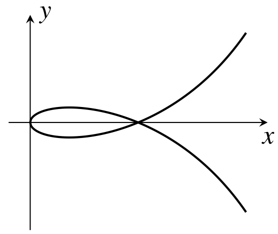
$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Il y a donc deux points correspondant à $x = 0$ sur le graphe de la relation donnée :

$$\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ et } \left(0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Note. On peut déterminer si une relation peut être vue comme une fonction par une propriété géométrique de son graphe : comme $f(x)$ a au plus une seule valeur pour chaque valeur de x, la droite verticale passant par x doit passer par au plus une valeur de y. Le graphe de gauche a cette propriété alors que le graphe de droite ne l'a pas. Le graphe de gauche représente la fonction définie par l'équation $y = x^3 - x^2 - x + 1$. Le graphe de droite représente une relation (définie par l'équation algébrique $y^2x + x^3 - 3y^2 - 2x^2 + x = 0$) pour laquelle on ne peut pas considérer y comme une fonction de x.





Résumé

1.6 Fonctions réciproques

Définition. On dit que les fonctions f et g sont **inverses** ou **réciproques** l'une de l'autre si

$$g(f(x)) = x \quad f(g(y)) = y$$

pour toutes les valeurs où ces expressions sont définies.

Exemple 7. Les fonctions

$$f(x) = \frac{x-2}{3} \text{ et } g(x) = 3x + 2$$

sont des fonctions réciproques l'une de l'autre. En effet,

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g\left(\frac{x-2}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{x-2}{3}\right)+2 \\ &= (x-2)+2 \\ &= x. \end{aligned}$$

De même, on a que

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(3x+2) \\ &= \frac{(3x+2)-2}{3} \\ &= \frac{3x}{3} \\ &= x \end{aligned}$$

Si la fonction est définie par une équation, on peut trouver la fonction inverse en isolant la variable indépendante en fonction de la variable dépendante. Cependant, cela ne donne pas toujours une fonction.

Exemple 8. Trouvons la fonction réciproque de la fonction définie par $y = 3x+1$. On isole x.

$$x = \frac{y-1}{3}$$

Pour exprimer la fonction réciproque en utilisant x comme variable indépendante, on interchange les variables x et y :

$$y = \frac{x-1}{3}.$$

Exemple 9. Trouvons la fonction réciproque de la fonction définie par $y = x^2+1$. On isole x.

$$x = \pm\sqrt{y-1}$$

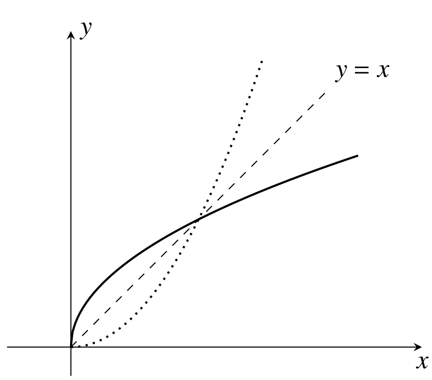
Pour exprimer la fonction réciproque en utilisant x comme variable indépendante, on interchange les variables x et y :

$$y = \pm\sqrt{x-1}.$$

Cette expression ne définie par une fonction car pour une valeur de x donnée on a deux valeurs différentes de y. La fonction définie par $y = x^2+1$ n'a donc pas de fonction réciproque.

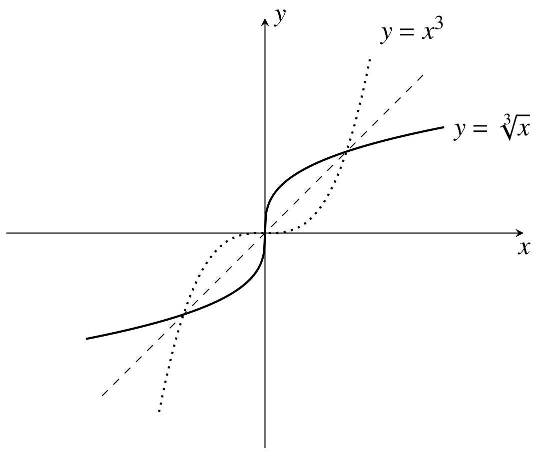
1.6.1 Graphe d'une fonction réciproque

Si f^{-1} est la fonction réciproque de f, son graphe est le résultat de la symétrie par rapport à la droite $y = x$ dans le plan cartésien.



Exemple 10. Le graphe de la fonction $f(x) = x^3$ est

La fonction inverse de $f(x) = x^3$ est $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$. On trouve le graphe de f^{-1} par symétrie par rapport à la droite $y = x$.



Résumé

1.7 Domaine d'une fonction

Définition. Le **domaine de définition** d'une fonction $f: A \to B$ est l'ensemble des éléments de A où $f(a)$ est défini. Notation :

$$\text{dom}(f) = \{a \mid f(a) \text{ est défini}\}.$$

Les fonctions qui seront étudiées dans ce cours sont des **fonctions réelles**, c'est-à-dire les fonctions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On détermine le domaine d'une fonction réelle définie à l'aide des opérations dites « élémentaires » en utilisant les principes suivants.

$\cancel{(\div 0)}$ Il ne peut y avoir de division par zéro.

$$\frac{A}{B} \text{ est défini} \iff B \neq 0$$

$\cancel{\left(\sqrt{<0}\right)}$ Il ne peut y avoir de racine paire de nombre négatifs.

$$\sqrt{A} \text{ est défini} \iff A \geq 0$$

$\cancel{\left(\log_b(\leq 0)\right)}$ Le logarithme d'un nombre négatif ou nul n'est pas défini (peu importe la base)

$$\log_b(A) \text{ est défini} \iff A > 0$$

Exemple 11. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x-3}$. Le domaine de f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ où $f(x)$ est défini. Comme il y a une racine carrée dans la définition de f, on a que

$$\begin{aligned} f(x) \text{ def} &\iff \sqrt{2x-3} \text{ def} \\ &\iff 2x-3 \geq 0 \\ &\iff 2x \geq 3 \\ &\iff x \geq 3/2 \end{aligned}$$

On a donc que $f(x)$ est défini pour $x \geq 3/2$. Le domaine est donc

$$\text{dom}(f) = [3/2, \infty[.$$

Exemple 12. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$. Le domaine de f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ où $f(x)$ est défini. Comme il y a une division dans la définition de f, on a que

$$\begin{aligned} f(x) \text{ def} &\iff \frac{1}{x^2-4x+3} \text{ def} \\ &\iff x^2-4x+3 \neq 0 \\ &\iff (x-1)(x-3) \neq 0 \\ &\iff x-1 \neq 0 \text{ et } x-3 \neq 0 \\ &\iff x \neq 1 \text{ et } x \neq 3 \end{aligned}$$

On a donc que $f(x)$ est défini pour $x \neq 1$ ou 3. Le domaine est donc

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}.$$

1.7.1 Rappels sur les inégalités

On voit dans l'exemple précédent certaines des conditions données pour déterminer le domaine d'une fonction exige de manipuler des inégalités. Voici un rappel des propriétés importantes permettant de le faire.

Hypothèse. Pour tous nombres réels a,b,c, on a que

$$a \leq b \text{ et } b \leq c \implies a \leq c$$
$$a < b \text{ et } b < c \implies a < c$$

Additionner un constante préserve les inégalités :

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

$$a < b \implies a + c < b + c$$

Multiplier par une constante positive préserve les inégalités :

$$a \leq b \implies ac \leq bc \text{ (si } c > 0)$$

$$a < b \implies ac < bc \text{ (si } c > 0)$$

Multiplier par une constante négative inverse le sens des inégalités :

$$a \leq b \implies ac \geq bc \text{ (si } c < 0)$$

$$a < b \implies ac > bc \text{ (si } c < 0)$$

Inverser change de sens des inégalités :

$$a \leq b \implies \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

$$a < b \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

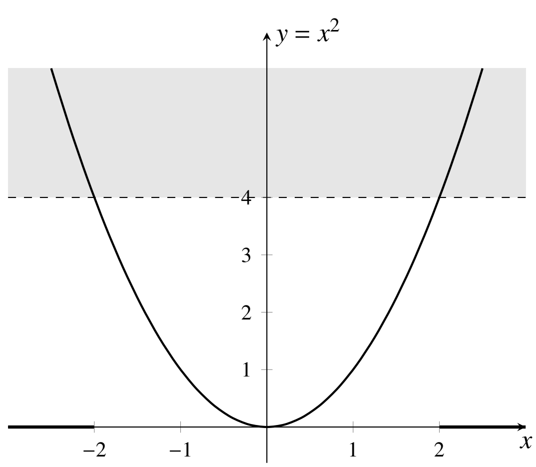
Remarque. Une erreur fréquente consiste à imaginer faussement que certaines fonction préservent les inégalités. Par exemple si

$$4 \leq x^2,$$

cela n'implique pas que

$$2 \leq x.$$

On peut voir pourquoi dans le graphe de $y = x^2$:



On voit que $x^2 \geq 4$ dans la région en gris dans le graphique précédent. Cela correspond aux valeurs suivantes de x :

$$x \leq -2 \text{ ou } 2 \leq x$$

On peut aussi voir comprendre la situation par la loi des signes.

$$\begin{aligned} 4 \leq x^2 &\iff 0 \leq x^2 - 4 \\ &= \iff 0 \leq (x-2)(x+2) \end{aligned}$$

Pour que $4 \leq x^2$, il faut que le produit de $(x-2)$ par $(x+2)$ soit positif. Il faut donc que ceux deux facteurs soit positif, ou que ces deux facteurs soient négatifs. Dans le premier cas, on a

$$0 \leq x-2 \iff 2 \leq x \text{ et } 0 \leq x+2 \iff -2 \leq x$$

Ces deux inégalités sont vraies dès que $2 \leq x$, car si $2 \leq x$, on a automatiquement que $-2 \leq x$.

Dans le second cas, on a

$$x-2 \leq 0 \iff x \leq 2 \text{ et } x+2 \leq 0 \iff x \leq -2$$

Ces deux inégalités sont vraies dès que $-22 \leq x$, car si $x \leq -2$, on a automatiquement que $x \leq 2$.

Ainsi, on a que $4 \leq x^2$ dès que $x \leq 2$ ou $x \leq -2$.

Exemple 13. Trouvons le domaine de $f(x) = \sqrt{x^2-4x-5}$. La seule opération pouvant limiter le domaine de la fonction est la racine carrée.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-4x-5} \text{ est défini } &\iff x^2-4x-5 \geq 0 \\ &\iff (x-5)(x+1) \geq 0 \end{aligned}$$

Le produit $(x-5)(x+1)$ est positif si ses deux facteurs sont de même signe. On doit donc traiter des deux cas.

Si les deux facteurs sont positifs, on a

$$x-5 \geq 0 \text{ et } x+1 \geq 0.$$

Dans ce cas, $x \geq 5$ et $x \geq -1$. Les deux conditions sont satisfaites quand $x \geq 5$.

Si les deux facteurs sont négatifs ou nuls, on a

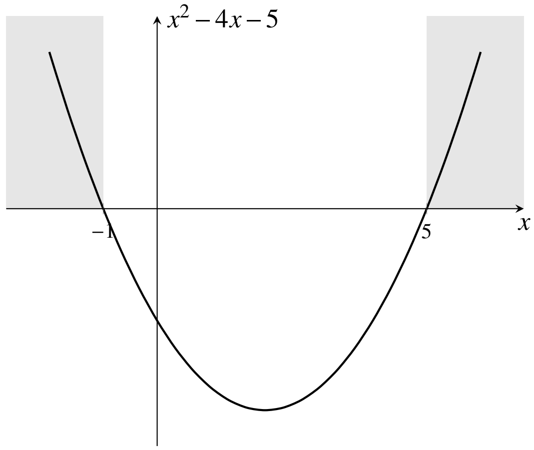
$$x-5 \leq 0 \text{ et } x+1 \leq 0.$$

Dans ce cas, $x \leq 5$ et $x \leq -1$. Les deux conditions sont satisfaites quand $x \leq -l$.

La racine $\sqrt{x^2-4x-5}$ est donc définie quand $x \leq -1$ ou $5 \leq x$. On a donc que

$$\operatorname{dom}(f) =]-\infty,-1] \cup]5,\infty[.$$

On peut aussi déterminer la région où $x^2-4x-5 \geq 0$ l'aide du graphe de $y = x^2-4x-5 = (x+1)(x-5)$. (On peut faire une esquisse de cette fonction rapidement car on connait ses deux zéros grâce à la forme factorisée et on connait l'orientation de la parabole par le coefficient de x^2 est positif.



Ce graphe permet de déterminer que $x^2-4x-5 \geq 0$ si

$$x \in]-\infty,-1] \cup]5,\infty[.$$

1.7.2 Domaine de fonctions composées

On détermine le domaine d'une fonction définie par composition de plusieurs fonction élémentaires en vérifiant que chacune des opérations utilisée est définie.

Exemple 14. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x-1}}$. Le domaine de f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ où $f(x)$ est défini. Comme il y a une racine carrée dans la définition de f, on a que

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} \text{ def} &\iff x-1 \geq 0 \\ &\iff x \geq 1 \end{aligned}$$

On a donc que pour que $f(x)$ soit défini, il faut que $x \geq 1$.

Il y a une seconde opération problématique, la division.

$$\begin{aligned} \frac{3x}{\sqrt{x-1}} \text{ est défini} &\iff \sqrt{x-1} \neq 0 \\ &\iff x-1 \neq 0 \\ &\iff x \neq 1 \end{aligned}$$

La fonction est donc définie quand $x \geq 1$ et $x \neq 1$. En combinant ces deux condition, on a donc

$$\text{dom}(f) =]1,\infty[.$$

$x \neq 1$
$(x+3)(x-2) \geq 0$ et $x-1 \geq 0$: $[2,\infty]$
$(x+3)(x-2) \leq 0$ et $x-1 \leq 0$: $]-\infty,-3]$
(Faire graphique de $(x+3)(x-2)$).
Domaine : $\mathbb{R} \backslash]-3,2[$

De manière générale, on détermine de domaine de la composition de deux fonctions de la manière suivante :

Proposition 1.

$$\text{dom}(f \circ g) = \{x \in \text{dom(g)} \mid g(x) \in \text{dom}(f)\}$$

Cette définition dit que pour que $f \circ g(x) = f(g(x))$ soit défini, il faut que $g(x)$ soit défini et que $f(g(x))$ soit aussi défini, autrement dit que $g(x)$ est dans le domaine de f.

Exemple 15. Déterminons le domaine la fonction définie par $\sqrt{\frac{1}{x-3}}$.

Si on prend $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x-3}$, on a que

$$f \circ g(x) = \sqrt{\frac{1}{x-3}}.$$

Pour que $\sqrt{x^2-4}$ soit défini, il faut que (a) $g(x) = \frac{1}{x-3}$ soit défini et que (b) $f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x-3}}$ soit défini.

(a) $g(x) = \frac{1}{x-3}$ est défini ssi $x - 3 \neq 0$, ce qui est équivalent à dire que $x \neq 3$.

$$\begin{aligned}
\text{(b) } f(g(x)) \text{ est défini} &\iff \sqrt{\frac{1}{x-3}} \text{est défini} \\
&\iff \frac{1}{x-3} \geq 0 \\
&\iff x-3 \geq 0 \\
&\iff x \geq 3
\end{aligned}$$

Il faut donc que $x \neq 3$ et que $x \geq 3$. En combinant ces deux condition, on voit que la fonction définie par $\sqrt{\frac{1}{x-3}}$ est définie quand $x > 3$. Autrement dit, le domaine de $f \circ g$ est $]3,\infty[$.

Résumé