Calcul différentiel — Notions préliminaires: notations, ensembles et nombres

1 Questions notations et abréviations

1.1 Ensembles

Ensemble = collection, liste sans répétition
Montrer patates

Un **ensemble** est une collection d'**éléments**. Si x est un élément de de l'ensemble A, on écrit $x \in A$. Sinon, on écrit $x \notin A$. On ne tient pas compte des répétitions dans les ensembles : $\{1,2,3\}$ est le même ensemble que $\{1,2,3,3,3,3\}$!

Notation **extension**

$$\{a,b,c,e\} \qquad \left\{-2,0,\frac{1}{2},\pi\right\}$$

Notation compréhension :

$$\{2^k \mid k \text{ est un nombre naturel}\}$$

On peut décrire un ensemble de plusieurs manières.

Compréhension Par une condition qui doit être satisfaite pour qu'un x soit élément de l'ensemble.

$$\{x \mid \text{ condition sur } x\}$$

Extension En donnant une liste des éléments de l'ensemble

$$\{-2,1,\pi,10\}$$

Exemple 1. L'ensemble des nombres naturel pairs P peut être défini en compréhension comme ceci :

$$P = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble P contient donc tout les nombres de la forme $2k$ où k est un nombre naturel quelconque.

Exercice — multiples de trois :

$$\{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Un même ensemble peut être décrit de plusieurs manières :

$$A = \{0,2,4,6,8\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ est un nombre naturel pair plus petit que} 10\}$$

Les ensembles A et B sont identiques car ils contiennent les mêmes éléments. On écrit $A = B$ pour dire que deux ensembles sont **égaux**, c'est à dire qu'ils contiennent les mêmes éléments.

Égalité : $A = B$ ssi A et B ont les mêmes éléments

$$\{2k+1 \mid k : \text{ nombre entier}\}$$

$$\{2k-1 \mid k : \text{ nombre entier}\}$$

Ensemble vide : $\emptyset = \{\}$ L'**ensemble vide** est l'ensemble qui ne contient aucun élément. On dénote l'ensemble vide par le symbole « $\emptyset$ ». Autrement dit,

$$\emptyset = \{\}$$

> **Remarque.** Le symbole « $\emptyset$ » est parfois utilisé à tord pour signifier « aucune solution » ou « impossible ».
>
> On peut dire que l'ensemble solution d'un problème donné (l'ensemble de toutes les solutions du problème) est l'ensemble vide, ce qui signifie effectivement qu'il n'y a aucune solution. Cependant, on ne peut pas écrire
>
> $$\sqrt{-1} = \emptyset \text{ ou } \sqrt{-1}\,\emptyset$$
>
> car $\emptyset$ est un ensemble et $\sqrt{-1}$, si ce nombre était défini, serait justement un nombre.

1.1.1 Sous-ensemble

$A \subseteq B$ ssi $x \in A \implies x \in B$. Faire exemple comme exercice : choisir bon symbole :

$$3\,\square\,\{1,2,3,4\}$$

$$\{1,2\}\,\square\,\{1,2,3,4\}$$

$$5\,\square\,\{1,2,3,4\}$$

$$\{1,2,3,4\}\,\square\,\{1,2\}$$

Si chaque élément d'un ensemble A est aussi un élément d'un ensemble B, alors on dit que A est un **sous-ensemble** de B. On écrit alors

$$A \subseteq B.$$

Si A n'est pas un sous-ensemble de B, on écrit

$$A \not\subseteq B.$$

Exemple 2.

$$\{-2,1,\pi\} \subseteq \{-10,-2,0,1,\pi,\pi^2\}$$

$$\{-2,1,\pi\} \not\subseteq \{-3,1,4,5\}$$

> **Remarque.** Ne pas confondre $\in$ (« est élément de ») avec $\subseteq$ (« est sous-ensemble de »).
>
> Par exemple
>
> $$2 \in \{1,2,3,4\}$$
>
> mais l'énoncé « $2 \subseteq \{1,2,3,4\}$ » n'a pas de sens.
>
> De même $\{2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\}$ est vrai, mais $\{2,3\} \in \{1,2,3,4\}$ est faux.

1.1.2 Cardinalité

La **cardinalité** d'un ensemble est le nombre d'élément qu'il contient. Par exemple, la cardinalité de l'ensemble $\{1,\pi,37\}$ est 3.

La cardinalité d'un ensemble peut aussi être **infinie**, comme la cardinalité de l'ensemble des nombres pairs ou celle de l'ensemble des nombres premiers.

Quand la cardinalité d'un ensemble est un nombre naturel, on dit que l'ensemble est **fini**. Par exemple,l'ensemble des facteurs entiers du nombre 12 est fini.

Résumé

1.2 Opérations de base sur les ensembles

On peux créer de nouveaux ensembles à partir d'ensembles donné. Dans ce cours, nous utiliserons les trois opérations ensemblistes suivantes.

L'**union** de deux ensembles A et B est l'ensemble les éléments qui sont dans A ou dans B.

L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble les éléments qui sont à la fois dans A et dans B.

La **différence** de deux ensembles A et B est l'ensemble les éléments qui sont dans A à l'exclusion des éléments de B.

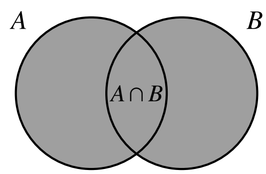
Exemple pour opérations ensemblistes :

$$A = \{-2, 0, 1, \pi\}$$

$$B = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 3{,}14159\right\}$$

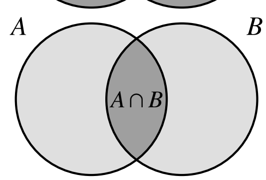
Faire $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \setminus B$.

Union



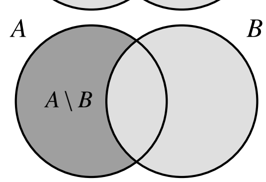
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
« A union B »

Intersection



$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$
« A intersection B »

Différence



$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$
« A sauf B »

Exemple 3.

$$\{1,2,3\} \cup \{2,3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$$

$$\{1,2,3\} \cap \{2,3,4,5\} = \{2,3\}$$

$$\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4,5\} = \{1\}$$

$$\{1,2\} \cap \{3,4,5\} = \emptyset$$

$$\{2,3\} \setminus \{2,3,4,5\} = \emptyset$$

Résumé

1.3 Ensembles souvent utilisés dans ce cours

1.3.1 Ensembles de nombres

Certains ensembles sont très importants en mathématiques et ont des noms et notations standard. Dans ce cours, nous utiliserons régulièrement les ensembles de nombres suivants :

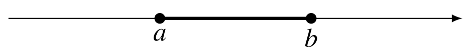
$\mathbb{N}$: les nombres naturels ;
$\mathbb{Z}$: les nombres entiers ;
$\mathbb{Q}$: les nombres rationnels ;
$\mathbb{R}$: les nombres réels.

Ces ensembles importants seront décrits plus loin. Il existe d'autres ensembles de nombres utilisés ou étudiés en mathématiques que nous ne verrons pas dans ce cours : les nombres complexes ($\mathbb{C}$), les nombres algébriques ($\mathbb{A}$), les nombres transcendants, et plusieurs autres.

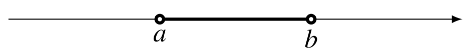
1.3.2 Intervalles

Nous utiliserons aussi les intervalles de nombres réels, qui sont les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ comprenant tous les nombres compris entre deux nombres donnés. Les intervalles sont définis en compréhension de la manière suivante. Par convention, on indique qu'une des extrémité d'un intervalle fait partie de celui-ci à l'aide d'un point plein et au contraire on indique que cette extrémité n'en fait pas partie à l'aide d'un point vide.

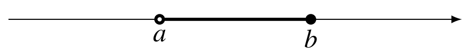
Définition. Fermé $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$



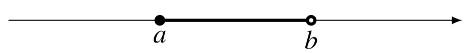
Ouvert $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



Semi-ouvert $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

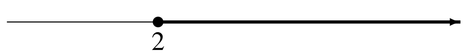


Semi-ouvert $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

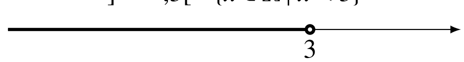


Note. On peut remplacer a ou b dans un intervalle par $-\infty$ ou ∞ pour signifier que le nombre x n'a pas à être plus grand que a ou plus petit que b. Par exemple :

$$[2,\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x\}$$



$$]-\infty,3[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$$



Note. On considèrera toujours qu'un intervalle est ouvert aux valeurs $\pm\infty$.

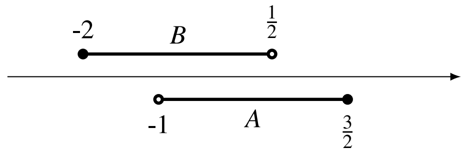
On peut remplacer a ou b dans un intervalle par $-\infty$ ou ∞ pour signifier que le nombre x n'a pas à être plus grand que a ou plus petit que b. Par exemple :

$$[2,\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x\}$$

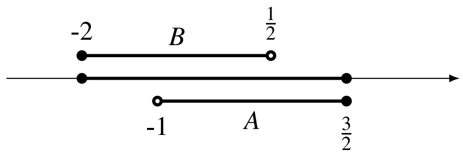
$$]-\infty,3[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$$

Exemple 4. Soient $A = \left]-1, \frac{3}{2}\right]$ et $B = \left[-2, \frac{1}{2}\right[$. Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \setminus B$.

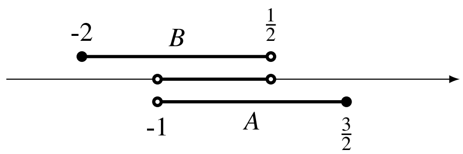
On représente graphiquement les intervalles donnés



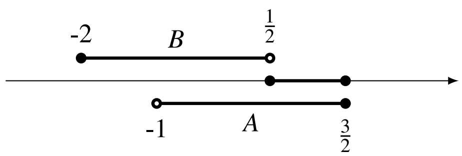
$A \cup B = \left[-2, \frac{3}{2}\right]$



$A \cap B = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$



$A \setminus B = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$



1.3.3 Autres ensembles

Beaucoup d'autres ensembles sont utilisés en mathématiques, mais ne joueront pas un rôle important dans ce cours. Par exemple,

- $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des points (x,y) du plan Cartésien ;
- $\mathbb{R}^3$ l'ensemble des points (x,y,z) de l'espace Euclidien à trois dimensions ;
- $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes
- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
- l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ qui satisfont l'équation d'une courbe algébrique donnée ;
- etc.

Résumé

2 Discours mathématique

2.1 Énoncées

Un **énoncé** est une affirmation pouvant être vraie ou fausse.

Exemple 5. Les affirmations suivantes sont des énoncés.

« 2+2=5 »
« 5 est un nombre premier » « $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ » « La fonction définie par $f(x) = x^2$ est croissante si $x \geq 0$.

> **Remarque.** Ne pas confondre un énoncé avec une expression. Par exemple
>
> $$2x+3 = 5$$
>
> est un énoncé (pouvant être vrai ou faut selon la valeur de x), mais
>
> $$2x+3$$
>
> est une expression algébrique qui représente un nombre. Cela n'a pas de sens de dire que le nombre $2x+3$ est vrai ou est faux. En mathématique élémentaire, les énoncés comportent le plus souvent le symbole « = » ou un symbole d'inégalité.

2.2 Liens logiques

Voici quelques symboles logiques que nous utiliserons dans ce cours.

« non-A » Négation de A. Diverses notations sont utilisées, par exemple $\neg A$

« si A, alors B » Notation : $A \implies B$. A est l'**hypothèse**, B est la **conclusion**. On dit aussi que A est une **condition suffisante** pour que B soit vraie et que B est une **condition nécessaire** pour que A soit vraie.

« A si et seulement si B » Notation : $A \iff B$ ou A ssi B. $A \iff B$ est équivalent à dire que $A \implies B$ et $B \implies A$.

« $\forall A$ » « Pour tout A. » On écrit par exemple

$$\forall n \in \mathbb{Z}.\, n \text{ est pair ou impair}$$

pour dire qu'un nombre entier quelconque est pair ou impair.

« $\exists A$ » « Il existe A ». On écrit par exemple

$$\exists n \in \mathbb{Z}.\, n \text{ est un nombre premier}$$

pour dire qu'il y a (au moins) un nombre entier qui est premier.

En mathématique, on utilise très souvent des énoncés d'une forme particulière appelée identité. Une **identité** est une égalité entre deux expressions algébrique qui est toujours vraie, peu importe les valeurs substituée aux variables présentes.

Exemple 6. L'affirmation $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ est une identité car elle est vraie peut importe la valeur substituée à x.

L'affirmation $x = \frac{x}{2}$ est n'est pas une identité. Elle est vraie si $x = 0$ car l'égalité $0 = \frac{0}{2}$ est vraie. Cependant, elle n'est pas vraie pour toutes les valeurs possible de x, par exemple. Si $x = 1$, alors $1 = \frac{1}{2}$ est fausse.

Note. Donné par écrit, l'énoncé d'une implication n'est pas toujours exactement la forme « si ... alors ... ». Par exemple :

« Un nombre entier est divisible par 2 s'il se termine par 0,2,4,6 ou 8 »

est le même énoncé que

« S'il se termine par 0,2,4,6 ou 8, un nombre entier est divisible par 2. »

En utilisant le symbole $\implies$, cela revient à dire que

$$A \implies B \text{ et } B \impliedby A$$

sont des énoncés équivalents.

La **contraposée** d'une implication de la forme $A \implies B$ est l'implication Exemple : « Si n^2 est pair alors n est pair » est la contraposée de « Si n est impair alors n^2 est impair » Démontrer en prévision de $\sqrt{2}$. non $- B \implies$ non $- A$. La contraposée est équivalente à l'implication originale, c'est à dire qu'un énoncé est vrai si et seulement si sa contraposée est vraie.

Exemple 7. L'énoncé

> « Un nombre entier n'est pas divisible par 2 s'il ne se termine pas par 0,2,4,6 ou 8. »

est la contraposée de

> « Si un nombre entier se termine par 0,2,4,6 ou 8, alors il est divisible par 2. »

Exemple 8. L'énoncé

> « Si un nombre est premier, alors il n'a pas de diviseurs autre que 1 et lui-même. »

est la contraposée de

> « Si un nombre a d'autres diviseurs que 1 et lui-même alors il n'est pas premier. »

Une **tautologie** est une affirmation qui est toujours vraie pour des raisons logiques.

Exemple 9. Les énoncés des formes suivantes sont toujours vrais.

$$A \implies A$$

> « Si n est un nombre entier, alors n est un nombre entier. »

$$A \text{ et } B \implies A$$

> « Si n est un nombre entier et q est un nombre rationnel, alors n est un nombre entier. »

$$A \implies B \text{ ou non-}B$$

> « Si n est un nombre entier, alors n est pair ou n est impair. »

Résumé

2.3 Division du discours mathématique

Pour clarifier la lecture, un texte est normalement divisés en plusieurs parties de différents niveaux hiérarchiques : chapitres, sections, paragraphes, phrases, etc. Pour clarifier la lecture d'un texte mathématique, on utilise en plus des divisions spéciales associées au différents éléments du discours mathématique.

Axiome Propriété qui est acceptée sans démonstration, considérée comme assez évidente pour être le fondement d'une théorie mathématique.

Définition Propriété ou identité qui défini le sens d'une notation ou Déf : n pair si $n = 2k$ Déf : n impair si $n = 2k+1$ Def : p premier si les seuls diviseurs de p sont 1 et p. d'un terme nouveau.

Théorème Résultat important, dont la validité est établie par une Théorème de Pythagore : c'est une identité démonstration ou une preuve, et qui a une grande importance dans un domaine donné des mathématiques étant donné ses multiples conséquences. Abréviation en classe : « thm ».

Proposition Résultat important, Prop : n pair $\implies n^2$ pair. dont la validité est établie par une démonstration ou une preuve. Abréviation en classe : « prop ».

Lemme Résultat servant à démontrer un ou plusieurs autres résultats.

Corolaire Résultat qui est déduit facilement d'un résultat précédant, une conséquence immédiate d'un théorème ou d'une proposition.

Preuve (ou **démonstration**) Suite de déduction logiques dont la Faire preuve directe du résultat précédent conclusion est un théorème, une proposition ou un lemme. Une preuve répond à la question « pourquoi c'est vrai. » On indique habituellement la fin d'une preuve à l'aide de CQFD (« ce qu'il fallait démontrer »), QED (« *quod erat demonstrandum* », CQFD en latin) ou par un signe comme « $\square$ ». Il existe plusieurs formes de preuves (directes, par induction, par contradiction ou par l'absurde, etc.) que nous verrons à l'œuvre au cours de la session.
Insister : exemple, cas particulier ≠ preuve !
$x+x = x^2+1$ car $1+1 = 1^2+1$?
Erreurs célèbre : Conjecture de Mersennes (1644), de la forme $M_p = 2^p - 1$ (p permier) sont premiers uniquement pour les nombres 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 et 257.

Faux : $M_{61} = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$ est premier.
Note : super important pour la cryptographie, le plus grand nombre premier connu est $M_{282589933} = 2^{282589933}1$!
Les nombres de la forme $12-2^2\times 3$, $121 = 11^2$, $1211 = 7\times 171$, $12111 = 3\times 11\times 367$ sont sont jamais premiers ? Faux ! 12 suivit de 136 chiffres 1 est premier.
Note importante : « démontrer » ne veut pas dire « donner un exemple ». Un cas particulier n'établit pas la vérité pour tous les cas.
Cependant, un seul cas particulier peut réfuter une affirmation générale. On appelle un tel exemple un **contre exemple**.

Exemple 10. Le fait que
$$3^2+4^2 = 5^2$$
est un cas particulier qui ne démontre pas que
$$x^2+y^2 = z^2$$
pour n'importe quel nombres x,y et z. Par exemple,
$$2^2+3^2 \neq 4^2.$$
Ce dernier exemple démontre cependant que
$$x^2+y^2 = z^2$$
n'est pas toujours vrai !

Exemple 11. Démontrer à l'aide d'un contre-exemple qu'il n'est pas vrai que
$$(x+y)^2 = x^2+y^2$$

pour tout choix de nombres entier x,y et z.

On peut prendre le cas particulier $x = 2$ et $y = 3$.

$$(2+3)^2 = 25, \text{ mais } 2^2 + 3^2 = 13.$$

Résumé

3 Les nombres et leurs propriétés

Dans ce qui suit, on passe en revue les différents ensembles de nombres étudiés en mathématiques. Nous donnons pour chacun quelques propriétés mathématiquement importantes qui font que l'on considère important de considérer ces types de nombres.

Cette section sera probablement difficile à lire si vous n'êtes pas familier avec la notation et l'écriture mathématique. L'objectif est de rappeler certains résultats et définitions qui ont été vue avant ce cours, main exprimés de manière moins rigoureuse.

3.1 Nombres naturels

L'ensemble des nombres naturels est

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\ldots\}.$$

Ces nombres sont caractérisés par le fait que chaque nombre naturel n a un successeur $n+1$; il y a toujours un nombre naturel encore plus grand qu'un nombre naturel donné.

Il arrivera dans ce cours que nous ayons besoin du principe d'induction. Ce principe permet de démontrer qu'une proposition est vraie pour pour les nombres naturels sans avoir à la démontrer pour chaque nombre naturel, ce qui est impossible car il y en a une infinité ! Le principe d'induction est une partie essentielle de la définition des nombres naturels :

Hypothèse (principe d'induction)**.** Si $A(n)$ est un énoncé impliquant une variable n représentant un nombre entier et tel que

(1) $A(0)$ est vrai pour le nombre naturel $n = 0$ et
(2) si $A(k)$ est vrai pour $k > 0$ et ses prédécesseurs, alors elle l'est aussi pour $k+1$,

alors l'énoncé $A(n)$ est vrai pour tout n.

Rappelons maintenant quelques concepts et résultats importants liés aux nombres naturels.

Définition. Le nombre naturel n est un nombre **pair** s'il existe un nombre $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.

Définition. Le nombre naturel n est un nombre **impair** s'il existe un nombre naturel $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.

La division est une propriété des nombres entiers, souvent connue comme la « division avec reste ». Les mathématiciennes et mathématiciens préfèrent plutôt nommer cette propriété « division Euclidienne ».

Théorème (Division Euclidienne)**.** Pour tout nombres naturel n et $d \neq 0$, il existe deux nombres naturels uniques q (quotient) et r (reste) tels que $0 \le r < d$

$$n = qd + r.$$

Diviser 33 par 5 : $33 = 5 \times 6 + 3$.
Expliquer passage de $n = qd + r$ à $\frac{n}{d} = q + \frac{r}{d}$

Exemple 12. Si $n = 10$ et $d = 4$, alors $q = 2$ et $r = 2$ sont les quotients et restes de division.

$$10 = 2(4) + 2.$$

Définition. On dit que $d \in \mathbb{N}$ **divise** n si le reste de la division euclidienne de n par d est 0.

On peut aussi dire que d est un **diviseur** de n.

Définition. Un nombre naturel $p \in \mathbb{N}$ est **premier** si $p \neq 1$ et s'il n'a pas d'autre diviseurs que 1 et p.

Les nombres premiers plus petits que 100 sont les suivants :

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97$$

Le théorème le plus important concertant les nombres naturels est le résultat suivant.

Théorème (Théorème fondamental de l'arithmétique)**.** Tout nombre naturel n peut se factoriser de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme un produit de facteurs premiers.

Exemple 13.

$$10 = 2 \cdot 5 \qquad 7 = 7 \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$36 = 6 \cdot 6 \qquad 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \qquad 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$468 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 \qquad 312323 = 3 \cdot 167 \cdot 823 \qquad 999999 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$$

Résumé

3.2 Nombres entiers

Les nombres entiers sont les nombres naturels auquel ont ajoute un nombre négatif $-n$ pour chaque nombre naturel $n \neq 0$. L'ensemble des nombres négatifs est décrit en extension de la manière suivante.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Ajouter solution de $x + 2 = 0$ En compréhension : $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -k \mid k \in \mathbb{N}$ Les nombres négatifs sont un concept abstrait introduit pour pouvoir résoudre des équations comme

$$x + 4 = 1.$$

La solution de cette équation est -3, mais on n'accepte pas les nombres négatifs comme des nombres légitimes, l'équation n'a pas de solution. Les solutions d'une équation dépendent des nombres que l'on considère comme légitimes. Les nombres négatifs et la manière de les additionner et de les multiplier ont été étudiés il y a plusieurs siècles en Inde, mais les savants européens ont été très longtemps attachés à une conception géométrique des nombres. De ce point de vue géométrique, les nombres négatifs n'ont pas de sens et n'étaient pas acceptés comme solutions, même encore au début des années 1800 !

La plupart des concepts défini pour les nombres naturels peuvent être adapté aux nombres entiers.

Définition. Le nombre $n \in \mathbb{Z}$ est **pair** s'il existe un nombre $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k.$$

Définition. Le nombre $n \in \mathbb{Z}$ est **impair** s'il existe un nombre entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k + 1.$$

La division avec reste fonctionne toujours avec les nombres entier, mais il faut permettre que le quotient soit négatif.

Théorème (Division Euclidienne pour les nombres entiers)**.** Pour tous nombres entiers n et d, il existe deux nombres entiers uniques q (quotient) et r (reste) tels que $0 \leq r < d$

$$n = qd + r.$$

Exemple : $-32 = 5 \times -7 + 3$

Exemple 14. La division Euclidienne fonctionne aussi pour les nombres négatifs. Par exemple, si $n = -3$ et $d = 2$, alors $q = -2$ et $r = 1$ sont les quotients et restes de division.

$$-3 = 2(-2) + 1.$$

Définition. $d \in \mathbb{Z}$ est un diviseur de $n \in \mathbb{Z}$ si le reste de division de n par d est 0.

On peut ainsi généraliser le théorème fondamental de l'arithmétique aux nombres entiers.

Théorème (Théorème fondamental de l'arithmétique)**.** Tout nombre naturel n peut se factoriser de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme un produit de facteurs premiers et du facteur (-1).

Exemple 15.

$$234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$$
$$-51 = (-1)3 \cdot 17$$
$$-24 = (-1)2^3 \cdot 3$$

Résumé

3.3 Nombres rationnels

D'un point de vue algébrique, les nombres rationnels permettent de résoudre des problèmes qui n'ont pas de solution si on considère uniquement les nombres entiers ou les nombres naturels. Par exemple, l'équation

$$2x = 1$$

a comme solution $x = \frac{1}{2}$.

On défini un nombre rationnel comme le rapport de deux nombres entiers :

$$\frac{n}{m} \text{ où } n, m \in \mathbb{Z} \text{ et } m \neq 0.$$

La condition $m \neq 0$ est importante car on ne peut pas diviser par 0.

> **Remarque.** Pourquoi est-il impossible de diviser par zéro ? En général a est un nombre entier différent de 0, son inverse est $\frac{1}{a}$. Cet inverse est l'unique solution à l'équation $ab = 1$. Autrement dit, l'inverse de a est l'unique nombre $\frac{1}{a}$ tel que
>
> $$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1.$$
>
> Si 0 avait un inverse $\frac{1}{0}$, on devrait avoir
>
> $$0\left(\frac{1}{0}\right) = 1.$$
>
> Mais cela est impossible car le produit de n'importe quel nombre par 0 est toujours 0 :
>
> $$0\left(\frac{1}{0}\right) = 0.$$

L'ensemble des nombres rationnels est défini en compréhension de la manière suivante :

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\right\}.$$

Simplification Une propriété fondamentale pour la manipulation des fraction est l'existence d'une unique version simplifiée de chaque fraction :

> **Théorème.** Pour tout nombre rationnel $\frac{m}{n}$, avec $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$ et $m \neq 0$, il existe un unique $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ telle que
>
> $$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$$
>
> et que a et b n'ont pas de facteurs communs.

Développement décimal On peut caractériser les nombres rationnels par leur développement décimaux.

> **Théorème.** Un nombre a peut s'écrire comme une fraction si et seulement si son développement décimal est périodique.

Idée de la preuve :
mettre $\dfrac{22}{7}$ en décimales
Mettre $0.1\overline{23}$ sous forme factionnaire

Enfin, une propriété importante des nombres rationnels est le fait qu'entre deux nombres rationnels donnés, il y a toujours un nombre rationnel entre les deux.

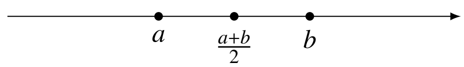
> **Théorème.** Soient a et b deux nombres rationnels différents. Il existe toujours un autre nombre rationnel c compris strictement entre a et b : $a < c < b$.

Démonstration. Soient a et b sont deux nombres rationnels différents. On suppose que $b > a$.

On prend comme nombre c situé entre a et b la moyenne a et b :

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

On peut voir dans la représentation graphique suivante que c devrait satisfaire $a < c < b$.



On vérifie que cette inégalité est vraie à l'aide des propriétés de base des inégalités. On a que $a < c < b$. En effet, comme $a < b$, on doit avoir que

$$\begin{aligned}
a &< b \\
a+b &< b+b && \text{[addition de } b \text{ à chaque membre]} \\
a+b &< 2b && \text{[car } b+b = 2b\text{]} \\
\frac{a+b}{2} &< b. && \text{[division de chaque membre par 2]}
\end{aligned}$$

De même, on a que

$$\begin{aligned}
a &< b \\
a+a &< a+b && \text{[addition de } a \text{ à chaque membre]} \\
2a &< a+b && \text{[car } a+a = 2a\text{]} \\
a &< \frac{a+b}{2}. && \text{[division de chaque membre par 2]}
\end{aligned}$$

On a donc

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

Enfin, on doit s'assurer que c est un nombre rationnel. Comme la somme de deux nombres rationnels est aussi un nombre rationnel, $a+b$ est un nombre rationnel. Diviser un nombre rationnel par 2 donne encore un nombre rationnel. La moyenne $\frac{a+b}{2}$ est donc elle aussi un nombre rationnel. □

Résumé

3.4 Nombres réels

La nécessité algébrique des nombres réels est due au fait que certaines équations n'ont pas de solution si on considère uniquement les nombres rationnels. Par exemple, si on cherche la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, on doit résoudre l'équation :

$$x^2 = 2.$$

On doit donc avoir que $x = \sqrt{2}$ (si on garde uniquement la solution positive car on cherche la diagonale d'un carré). Cette solution n'est pas un nombre rationnel : il n'y a aucun moyen d'écrire $\sqrt{2}$ comme une faction. Ce fait n'est pas si simple à démontrer, mais nous verrons une preuve complète un peu plus loin.

En mathématiques, il y a plusieurs manières de définir les nombres réels, mais celle-ci est probablement celle qui est la plus simple et qui utilise le théorème

$$\mathbb{R} = \text{ensemble de tous les développements décimaux quelconques (possiblement infini non-périodique)}$$

Les nombres réels peuvent être combinés à l'aide des opérations de base : addition, soustraction, multiplication, division, exposants et racines, c'est à dire que le résultat de ces opérations, s'il est défini, est aussi un nombre réel. Quand une expression combine plusieurs opérations, on doit les effectuer dans l'ordre conventionnel déterminé par la « priorité des opérations ».

On suppose que les opérations de base ont les propriétés vu au secondaire (voir formulaire d'algèbre) : associativité, distributivité, commutativité, etc.

Un fait important au sujet des nombres réels, c'est qu'ils comportent des nombres ne pouvant s'écrire sous forme de fractions. Il est généralement assez difficile de démontrer qu'un nombre n'est pas un nombre rationnel. Voici un des exemples les plus simple et la première preuve historique de l'existence d'un nombre ne pouvant s'écrire comme une fraction de nombre entiers. Cet argument a été formulé pour la première fois il y a 25 siècles par Hippasus, un disciple de Pythagore.

Théorème. La racine carré de deux n'est pas un nombre rationnel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Lemme. Un nombre est pair si et seulement si son carré est pair.

$$n \text{ pair} \iff n^2 \text{ pair.}$$

Preuve du lemme. ($\Longrightarrow$) On commence par démontrer que si n est un nombre pair, alors n^2 est aussi un nombre pair.

Si n est pair, alors n est le double d'un certain nombre k. On peut donc écrire que $n = 2k$. Dans ce cas,

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

ce qui montre que n^2 est bien le double d'un nombre entier.

($\Longleftarrow$) On démontre maintenant que si n^2 est un nombre pair, alors n doit être un nombre pair.

On démontre la contraposée : si n est impair, alors n^2 est aussi impair. Supposons que n est impair ; il peut donc s'écrire comme $n = 2k + 1$ pour un certain nombre k. Dans ce cas,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

ce qui établi que n^2 est impair. □

Preuve du théorème. Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Nous allons montrer que cette hypothèse mène à un résultat absurde et qu'elle ne peut pas être vraie, donc que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Si $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, il existe deux entiers a et $b \neq 0$ tel que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Comme on peut toujours simplifier une faction, on peut simplifier $\frac{a}{b}$ pour obtenir une fraction simplifiée $\frac{m}{n}$. On a donc

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

où m et n n'ont aucuns facteurs communs.

En multipliant chaque membre de l'égalité $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ par n, on obtient

$$n\sqrt{2} = m.$$

En mettant au carré, on a que

$$n^2(2) = m^2$$

m^2 doit donc être pair. Par le lemme précédant, on a que m doit être pair lui aussi. m peut donc s'écrire comme $m = 2k$ pour un certain entier k. En remplaçant m par $2k$ dans l'égalité précédente

$$n\sqrt{2} = m,$$

on obtient que

$$n\sqrt{2} = 2k.$$

On met au carré pour obtenir

$$2n^2 = 4k^2.$$

En divisant par 2, on trouve

$$n^2 = 2k^2.$$

n^2 est donc pair, ce qui implique par le lemme précédant que n est pair lui aussi.

La fraction $\frac{m}{n}$ peut donc être simplifiée car le numérateur m et le dénominateurs n sont tous les deux pairs ! Cela contredit le fait que $\frac{m}{n}$ est une faction simplifiée. L'hypothèse « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel » est donc fausse et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

Il y a plusieurs autre nombres réels qui ne sont pas rationnels :

$$\pi, \mathrm{e}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \log_2(3), \log_5(7), \text{ etc.}$$

La preuve donnée pour $\sqrt{2}$ est une des preuve les plus simples de l'irrationalité d'un nombre réel — même si elle vous semble compliquée, elle est beaucoup plus simple que la démonstration du fait que le nombre π ne peut pas être écrit comme une fraction.

Les mathématiciens n'ont pas épuisé la question de savoir quels nombres réels peuvent être écrit comme des nombres rationnels. Il y a encore plusieurs nombres réels pour lesquels on ne sait toujours pas s'il sont rationnels ou non ! Par exemple, on ne sait pas si $\pi\mathrm{e}$ et $\pi + \mathrm{e}$ sont rationnels ou non et la réponse à ces deux questions demandera le développement de nouvelles idées mathématiques.

Résumé

3.5 Autres types de nombres

Bien que ces concepts ne seront pas à l'étude dans ce cours, les nombres naturels, entiers, rationnels et réels ne sont pas les seuls types de nombres étudiés en mathématiques. Pour vous donner une idée de ce qu'il y a au delà des nombres que vous avez déjà étudiés, en voici quelques autres.

- Les nombre complexes (ensemble $\mathbb{C}$) : ce sont les nombres réels auxquels on ajoute un nouveau nombres $i = \sqrt{-1}$, c'est à dire qu'on ajoute un nombre i qui permet de résoudre l'équation $x^2 = -1$, qui n'a pas de solution dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
- Les nombres algébriques (ensemble $\mathbb{A}$) : nombres qui sont des solutions d'équations algébriques
- Les nombres transcendants : nombres qui ne sont pas algébriques ; le plus célèbre est π.
- Nombres calculables : nombres réels pour lesquels il existe un algorithme permettant de calculer ses décimales. Fait surprenant : la plupart des nombres réels sont non-calculables : il est impossible de de calculer leur décimales à l'aide d'un programme informatique !